České vysoké učení technické v Praze

Fakulta elektrotechnická

Sbírka problémů z lineární algebry

Jiří Velebil
katedra matematiky
Praha, 2025

velebil@fel.cvut.cz
https://math.fel.cvut.cz/en/people/velebil

Obsah

Jak používat tuto sbírku

V současné době se lineární algebra na FEL ČVUT vyučuje ve čtyřech mutacích: A8B01LAG, B0B01LAG, B0B01LAGA a B6B01LAG. Tento text se snaží být sbírkou komentovaných i nekomentovaných problémů pro všechny tyto mutace. Pořadí témat v tomto textu dává i doporučenou náplň jednotlivých cvičení:

A8B01LAG, **B0B01LAG** a **B0B01LAGA:** Témata 1 až 14.
Upozornění: Téma 14 se nestihne probrat na cvičeních, problémy tohoto tématu budou spočteny na závěrečných přednáškách.

B6B01LAG: Témata 1 až 13 a Téma 15.
Upozornění: Téma 15 se nestihne probrat na cvičeních, problémy tohoto tématu budou spočteny na závěrečných přednáškách.

Téma 0: Toto téma nesouvisí přímo s lineární algebrou. Jedná se o zopakování důkazových technik, které budou během semestru využívány.

Uvítám upozornění na překlepy a chyby, které mi při korekturách přes veškeré mé usilí dozajista ušly.

Jiří Velebil
katedra matematiky
FEL ČVUT
`velebil@fel.cvut.cz`

Další doporučené sbírky problémů

V doporučeném studijním textu

☞ Jiří Velebil *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*, Praha, 2020.

naleznete další řadu řešených problémů. Z volně dostupných sbírek lze doporučit například texty

☞ Robert A. Beezer, *Exercise and solution manual for a first course in linear algebra*, University of Puget Sound, 2015.

☞ Karel Výborný a Miloš Zahradník, *Používáme lineární algebru*, Praha, 2011.

Z tištěných knih jsou vynikajícími sbírkami například

☞ Hakam Dadazhdanovitch Ikramov, *Linear algebra* (*Problems book*), Mir Publishers, Moscow, 1983.

☞ Seymour Lipschutz a Marc Lipson, *Linear algebra* (6th ed), McGraw-Hill, 2018.

☞ Igor Vladimirovitch Proskuryakov, *Problems in linear algebra*, Mir Publishers, Moscow, 1978.

Upozornění: V různých sbírkách (kromě doporučeného textu AKLA) může být použita jiná terminologie nebo jiné značení. Ujistěte se vždy, jaké značení a terminologii Vámi zvolený text používá. Dále: v jiných sbírkách může být celá řada problémů, které jsou mimo rozsah přednášek lineární algebry na FEL ČVUT.

Téma 0

Proces dokazování a psaní důkazů

V matematice se používá důkaz jako korektní argumentace, která nám ukáže platnost nějakého tvrzení. Nebudeme budovat *formální* teorii důkazů, to patří do partie matematiky, které se říká *formální matematická logika*. V této kapitole ukážeme několik způsobů, jak lze tvrzení dokazovat. Nejde o úplný výčet důkazových technik. Pro naše účely nám však tento výčet bohatě postačí.

Protože důraz této kapitoly je kladen na důkazy, a ne na lineární algebru, budeme dokazovat jednoduchá tvrzení o množinách, reálných číslech, atd. Jde nám o to, pochopit *tvorbu* důkazu a jeho následný *zápis*. To se nám bude později hodit při důkazech tvrzení z lineární algebry.

Tvrzení, která dokazujeme. V matematice lze každé elementární tvrzení přepsat do tvaru:

> Ať platí α. Potom platí β.

Části α říkáme *předpoklad* tvrzení, části β říkáme *závěr* tvrzení.

Rada: snažte se vždy před začátkem důkazu tvrzení rozdělit na předpoklady a závěr. Budete tak vědět, která fakta smíte v důkazu použít a která fakta máte dokázat.

Důležité: všem pojmům v zadaném tvrzení je třeba dokonale rozumět. To znamená, že všechny pojmy v zadaném tvrzení byly řádně definovány. To není žádné hnidopišství: znalost definic nám často při tvorbě důkazu významně pomáhá.

Následující podmínky jsou ekvivalentní. . . Některá tvrzení mají tvar:

> Následující podmínky jsou ekvivalentní:
>
> (1) Platí α.
>
> (2) Platí β.
>
> (3) Platí γ.

Co se po nás v takovém případě chce dokázat? Máme dokázat, že z (1) plyne (2), že ze (2) plyne (3), a že ze (3) plyne (1).

To znamená: chce se po nás ukázat platnost „kolečka“ implikací:

$$\begin{tikzcd} & (3) \arrow[dl] & \\ (1) \arrow[rr] & & (2) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Samozřejmě, tvrzení nemusí říkat, že tři podmínky jsou ekvivalentní; takových podmínek může být klidně i devět.

Rozhodněte, zda platí... V některých případech narazíme na následující problém:

> Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:
>
> > Ať platí α. Potom platí β.

Problémy tohoto typu jsou vlastně nejzajímavější, protože odrážejí realitu matematické práce. Při tvorbě nějaké teorie totiž formulujeme *hypotézy* (tj. formulujeme tvrzení, o kterých nevíme, zda platí). A je pochopitelné, že občas zformulujeme hypotézu, která se ukáže být nepravdivou. Zacházení s hypotézami se budeme věnovat v části 0.6.

Důležité: v matematice každá hypotéza *buď* platí *nebo* neplatí. Není tedy možné odpovědět „polovičatě“. Tento černobílý pohled na svět nám ve skutečnosti opět velmi pomáhá.

Argumentační fauly. Matematika je hra, která se hraje podle pravidel *fair play*. Při dokazování se nesmíme dopouštět zakázaných způsobů argumentace. Seznam zakázaných způsobů argumentace je dlouhý a my jej nebudeme vypisovat. Zmiňme alespoň jeden faul: pokud máme tendenci v důkazu někde napsat *to je jasné*, nejspíš se dopouštíme faulu. Zastavme se a ujasněme si, proč je nám něco jasné. Pokud je nám něco opravdu jasné, měli bychom umět pořádně vysvětlit, proč je nám to jasné. Hrát fair play pak znamená, že toto „jasné“ místo pořádně vysvětlíme.

To je triviální. Občas se na místě důkazu vyskytne česká věta *Důkaz je triviální.* Jedná se o argumentační faul? Nejedná. Slovo „triviální“ je zde použito v technickém smyslu. Předpokládá se, že čtenář/ka už má jisté zkušenosti a důkaz tak snadno napíše. Zpočátku budeme větou *Důkaz je triviální.* šetřit. Postupem času však získáme zkušenost a ta nám dovolí některé důkazy bez rozpaků za triviální prohlásit.

Čeština a matematická čeština. Důkazy píšeme v přirozeném jazyce (v tomto textu česky). Na přednáškách a cvičeních se často uchýlíme k „těsnopisu“, tj., místo plných českých vět budeme psát nejrůznější šipky, zkratky, atd. Tento těsnopis je však ale vždy možné přepsat do celých českých vět. Zopakujme to: **matematický text je vždy psán v přirozeném jazyce**.

Protože přirozený jazyk je barvitý, budeme používat jistá slovní spojení, která mají pevně stanovený význam. Připomeňme některá taková spojení:

(1) *... a současně...*

(2) *... nebo...*

(3) *... buď... anebo...*

(4) *... nebo...*

(5) *... právě tehdy, když...*

(6) *Existuje alespoň jedno... tak, že platí...*

(7) *Pro všechna... platí...*

(8) A řada dalších...

Význam takových slovních spojení je třeba dobře znát.

0.1 Přímý důkaz

Schéma přímého důkazu. Chceme-li dokázat tvrzení

Ať platí α. Potom platí β.

přímých důkazem, pak postupujeme takto:

(1) Předpokládáme platnost α.

(2) Z platnosti α postupně odvozujeme platnost dalších tvrzení tak dlouho, až po konečně mnoha krocích dostaneme β.

0.1.1 Problém Ať a a b jsou libovolná reálná čísla, pro která platí $a > 3$ a $b < 2$. Potom platí $a^2 - 2b > 5$.

✱ **Řešení problému 0.1.1** Řešením je správně vedený důkaz zadaného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 0.1.1** Tvrzení dokážeme přímým důkazem. Před tvorbou důkazu si nejprve ujasníme, co víme (tj., to, co smíme během důkazu použít) a to, co chceme dokázat (to využijeme k tomu, abychom si uvědomili, kdy důkaz končí).

Víme: a je reálné číslo, b je reálné číslo, platí $a > 3$, platí $b < 2$.

Chceme dokázat: $a^2 - 2b > 5$.

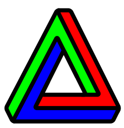
Nejprve předvedeme **špatný důkaz**: pro $a = 5$ a $b = 1$ platí $a > 3$ a $b < 2$. Protože nerovnost $5^2 - 2 \cdot 1 > 5$ platí, je důkaz hotov.

Co je špatně? Tvrzení *neznělo* následovně: ukažte, že $5^2 - 2 \cdot 1 > 5$. V předpokladech našeho tvrzení jsou zadána dvě *libovolná* reálná čísla a, b, nikoli $a = 5$ a $b = 1$. Zadané tvrzení jsme tedy *nedokázali*.

Konstrukce správného důkazu. Vysvětlíme, jak správný důkaz zkonstruovat. Uvidíme, že (typicky) důkaz tvoříme „ze dvou stran": rozvíjíme, to co víme, a zjišťujeme, co potřebujeme znát k tomu, abychom důkaz ukončili. Tvorba důkazu je tedy proces, který zakončíme, když správným způsobem „propojíme" jeho začátek a jeho konec.

První fáze důkazu.

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ je reálné číslo} \\ b \text{ je reálné číslo} \\ \text{platí } a > 3 \\ \text{platí } b < 2 \end{array}\right\} \longrightarrow\!\!\triangleright$$

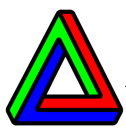


$$\longrightarrow\!\!\triangleright \text{ platí } a^2 - 2b > 5 \text{, je hotovo}$$

Zapsali jsme zatím „kostru důkazu": to, co víme, a to, co chceme dokázat. Navíc, použili jsme „těsnopis", který budeme na přednáškách a na cvičeních používat: šipku tvaru $\longrightarrow\!\!\triangleright$ budeme často používat místo slovního spojení *jestliže..., potom...* Naším úkolem je „vyplnit" to místo, kde je (zatím) nakreslen nemožný trojúhelník.[1]

Druhá fáze důkazu. V dokazovaném tvrzení figurují výrazy a^2 a $-2b$. Můžeme se o těchto výrazech něco dozvědět z toho, co víme o a a b? Ano. Náš důkaz tak můžeme mírně vylepšit na

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ je reálné číslo} \\ b \text{ je reálné číslo} \\ \text{platí } a > 3 \\ \text{platí } b < 2 \end{array}\right\} \longrightarrow\!\!\triangleright \left.\begin{array}{l} \text{platí } a^2 > 9 \\ \text{platí } -2b > -4 \end{array}\right\} \longrightarrow\!\!\triangleright$$



$$\longrightarrow\!\!\triangleright \text{ platí } a^2 - 2b > 5 \text{, je hotovo}$$

[1]Tento symbol budeme (pouze v této kapitole) používat jako symbol pro „neznámo".

Při odvozování jsme museli využít znalosti práce s nerovnostmi reálných čísel. Například musíme vědět, že vynásobením nerovnosti číslem -2 obrátíme znak nerovnosti. To znamená: z nerovnosti $b < 2$ odvodíme nerovnost $-2b > -4$.

Třetí fáze důkazu. Místo, kde je nyní nemožný trojúhelník, můžeme „vymazat“, protože nerovnosti $a^2 > 5$ a $-2b > -4$ můžeme sečíst a dostat tak nerovnost $a^2 - 2b > 5$:

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ je reálné číslo}\\ b \text{ je reálné číslo}\\ \text{platí } a > 3\\ \text{platí } b < 2 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \text{platí } a^2 > 9\\ \text{platí } -2b > -4 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{platí } a^2 - 2b > 5\text{, je hotovo}$$

Zbývají nám dvě věci: do důkazu zapíšeme tvrzení, která jsme použili (tím odstraníme veškeré pochybnosti o „zřejmosti“ jednotlivých kroků) a nakonec důkaz zapíšeme česky.

Vyčištění důkazu. K jednotlivým šipkám zapíšeme, co jsme přesně použili. Dostaneme tak

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } a \text{ je reálné číslo}\\ \text{(ii) } b \text{ je reálné číslo}\\ \text{(iii) platí } a > 3\\ \text{(iv) platí } b < 2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{\text{nerovnost (iii)}\\ \text{umocníme na druhou}\\ \text{a}\\ \text{nerovnost (iv)}\\ \text{vynásobíme } -2}]{} \left.\begin{array}{l} \text{(v) platí } a^2 > 9\\ \text{(vi) platí } -2b > -4 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{\text{nerovnosti (v)}\\ \text{a (vi) sečteme}}]{} \text{platí } a^2 - 2b > 5\text{, je hotovo}$$

Nakonec důkaz napíšeme česky.

Důkaz. Ať a a b jsou reálná čísla, pro která platí $a > 3$ a $b < 2$. Z první nerovnosti plyne (umocněním na druhou) nerovnost $a^2 > 9$, z druhé nerovnosti plyne (vynásobením -2) nerovnost $-2b > -4$. Sečtením nerovností $a^2 > 9$ a $-2b > -4$ dostaneme nerovnost $a^2 - 2b > 5$, kterou jsme chtěli dokázat. Důkaz je ukončen.

0.1.2 Problém Ať M a N jsou libovolné množiny. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(1) Platí $M \subseteq N$.

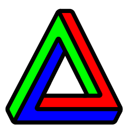
(2) Platí $M \cap N = M$.

✱ **Řešení problému 0.1.2** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2), a že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 0.1.2** Dokážeme nejprve, že z (1) plyne (2). Budeme postupovat velmi pomalu, analogicky řešení Problému 0.1.1.

První fáze důkazu.

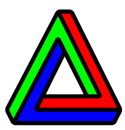
$M \subseteq N \longrightarrow$



$\longrightarrow$ platí $M \cap N = M$, je hotovo

Druhá fáze důkazu.

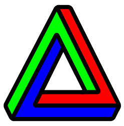
$M \subseteq N \longrightarrow$



$\longrightarrow$ platí $M \cap N \subseteq M$ a $M \subseteq M \cap N$

$\longrightarrow$ platí $M \cap N = M$, je hotovo

Třetí fáze důkazu.

$M \subseteq N \longrightarrow$  $\longrightarrow$ platí $M \subseteq M \cap N \xrightarrow[M \cap N \subseteq M \text{ platí vždy}]{}$

platí $M \cap N \subseteq M$ a $M \subseteq M \cap N \longrightarrow$ platí $M \cap N = M$, je hotovo

Čtvrtá fáze důkazu.

$M \subseteq N \xrightarrow[M \subseteq M \text{ platí vždy}]{}$ $M \subseteq M$ a $M \subseteq N \longrightarrow$ platí $M \subseteq M \cap N$

$\xrightarrow[M \cap N \subseteq M \text{ platí vždy}]{}$ platí $M \cap N \subseteq M$ a $M \subseteq M \cap N$

$\longrightarrow$ platí $M \cap N = M$, je hotovo

Vyčištění důkazu a zápis českými větami. Ať $M \subseteq N$. Chceme dokázat, že platí $M \cap N = M$. To znamená, že chceme dokázat, že platí $M \cap N \subseteq M$ a současně $M \subseteq M \cap N$. Protože inkluse $M \cap N \subseteq M$ platí vždy, stačí ukázat, že platí $M \subseteq M \cap N$. K tomu, abychom dokázali $M \subseteq M \cap N$, stačí dokázat, že platí $M \subseteq M$ a $M \subseteq N$. Protože $M \subseteq M$ platí vždy a protože $M \subseteq N$ platí díky předpokladu, je důkaz hotov.

Ukážeme, že ze (2) plyne (1). Budeme postupovat mírně rychleji. Předpokládáme, že platí $M \cap N = M$. Chceme dokázat, že platí $M \subseteq N$. Protože $M \cap N \subseteq N$ platí vždy, a protože $M \cap N = M$ platí díky předpokladu, ukázali jsme, že platí $M \subseteq N$. Důkaz je hotov.

Poznámka. V dalším již nebudeme jednotlivé fáze tvroby důkazu vypisovat. Pokud máte o nějakém důkazu pochybnosti, kreslete si na papír schéma tvorby tohoto důkazu a jednotlivé kroky analysujte.

0.2 Nepřímý důkaz (důkaz kontraposicí)

Schéma nepřímého důkazu. Chceme-li dokázat tvrzení

Ať platí α. Potom platí β.

nepřímým důkazem, pak postupujeme takto: přímým důkazem dokazujeme tvrzení

Ať neplatí β. Potom neplatí α.

0.2.1 Problém Dokažte, že pokud je n přirozené číslo, pro které n^2 je sudé, potom n je sudé číslo.

✱ **Řešení problému 0.2.1** Řešením problému je správně vedený důkaz zadaného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 0.2.1** Budeme postupovat nepřímým důkazem. Vezmeme přirozené číslo n, které není sudé, a dokážeme, že n^2 není sudé.

Protože n není sudé přirozené číslo, je n liché přirozené číslo.[2] To znamená, že existuje přirozené číslo k tak, že platí $n = 2k+1$. Potom platí $n^2 = (2k+1)^2$. Protože platí rovnosti $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ a protože $2k^2 + 2k$ je přirozené číslo, ukázali jsme, že n^2 je liché přirozené číslo. To znamená, že číslo n^2 není sudé.

Důkaz je hotov. Ukázali jsme, že pokud je n přirozené číslo, pro které n^2 je sudé, potom n je sudé číslo.

[2] Zde potřebujeme dokonale rozumět následujícím pojmům: sudé přirozené číslo a liché přirozené číslo. Dále je třeba znát tvrzení: každé přirozené číslo je buď sudé nebo liché.

0.2.2 Problém Ať a, b a c jsou reálná čísla, ať platí $a > b$. Dokažte, že když platí nerovnost $ac \leq bc$, potom platí nerovnost $c \leq 0$.

✱ **Řešení problému 0.2.2** Řešením problému je správně vedený důkaz zadaného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 0.2.2** Budeme postupovat nepřímo. To jest, pro reálná čísla a, b a c, pro která platí $a > b$, dokážeme tvrzení: jestliže $c > 0$, potom $ac > bc$.

Ať tedy platí $c > 0$. Protože platí $a > b$, platí $a - b > 0$. Z nerovností $a - b > 0$ a $c > 0$ plyne[3] nerovnost $(a - b)c > 0$. Po roznásobení levé strany poslední nerovnosti dostaneme nerovnost $ac - bc > 0$. Proto platí nerovnost $ac > bc$..

0.3 Důkaz sporem

Schéma důkazu sporem. Chceme-li dokázat tvrzení

Ať platí α. Potom platí β.

sporem, postupujeme takto:

(1) Předpokládáme, že platí α a že β neplatí.

(2) Z bodu (1) postupně odvozujeme platnost dalších tvrzení, až po konečně mnoha krocích dostaneme platnost evidentně neplatného tvrzení. Tomuto tvrzení říkáme **spor**. Jakmile se spor objeví, důkaz sporem končí.

0.3.1 Problém Dokažte, že neexistuje[a] kladné racionální číslo r s vlastností $r^2 = 2$.

[a]To jest: máme dokázat, že reálné číslo $\sqrt{2}$ není racionální. Dokázat *existenci* reálného čísla $\sqrt{2}$ je ovšem velmi netriviální problém. Proto jsme naše tvrzení zformulovali opatrně. Legenda praví, že iracionalitu čísla $\sqrt{2}$ dokázal již Hippasus z Metapontu zhruba 500 let před naším letopočtem. Jeho kolegové pythagorejci jej pak, podle téže legendy, utopili v moři.

✱ **Řešení problému 0.3.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že neexistuje kladné racionální číslo r s vlastností $r^2 = 2$.

✱ **Komentář k problému 0.3.1** Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že r je kladné racionální číslo, pro které platí $r^2 = 2$. To znamená, že existují[4] *nesoudělná* kladná přirozená čísla a, b taková, že platí $r = a/b$. Protože $r^2 = 2$, víme, že platí rovnost $2b^2 = a^2$. To znamená, že přirozené číslo a^2 je sudé. Podle Problému 0.2.1 je tedy a sudé přirozené číslo. To znamená, že pro nějaké přirozené číslo k platí rovnost $a = 2k$.

Protože platí rovnosti $2b^2 = a^2$ a $a = 2k$, musí platit $b^2 = 2k^2$. Protože k^2 je přirozené číslo, ukázali jsme, že b^2 je sudé číslo. Podle Problému 0.2.1 je tedy b sudé přirozené číslo.

Ukázali jsme, že a a b jsou obě sudá přirozená čísla, která jsou nesoudělná. To je spor.

Důkaz je hotov: dokázali jsme, že neexistuje kladné racionální číslo r s vlastností $r^2 = 2$.

---

[3]Zde je důležité perfektně rozumět relaci uspořádání reálných čísel. Přesněji: v množině $\mathbb{R}$ reálných čísel existuje podmožina $\mathbb{R}_+$ s následujícími třemi vlastnostmi:

(1) Pro každé reálné číslo r platí buď $r \in \mathbb{R}_+$ nebo $-r \in \mathbb{R}_+$, nebo $r = 0$.

(2) Ať $r \in \mathbb{R}_+$ a $s \in \mathbb{R}_+$. Potom $r + s \in \mathbb{R}_+$.

(3) Ať $r \in \mathbb{R}_+$ a $s \in \mathbb{R}_+$. Potom $rs \in \mathbb{R}_+$.

Množina $\mathbb{R}_+$ je množina všech *kladných* reálných čísel a výše uvedené tři vlastnosti vyjadřují fakt, že $\mathbb{R}$ je *uspořádané těleso* (viz např. AKLA, Kapitola 1.3). Uspořádání $<$ na $\mathbb{R}$ je pak definováno takto: $a < b$ právě tehdy, když $b - a \in \mathbb{R}_+$.

[4]Toto je okamžik důkazu, kdy musíme dokonale rozumět následujícím pojmům: racionální číslo, nesoudělnost dvou přirozených čísel.

0.3.2 Problém Množina všech prvočísel je nekonečná.[a]

[a] Budeme potřebovat dokonale porozumět definicím:

(1) Přirozené číslo p je *prvočíslo*, pokud $p \geq 2$ a pokud p je dělitelné pouze čísly 1 a p.

(2) Množina M je *konečná*, pokud je buď $M = \emptyset$ nebo existuje kladné přirozené číslo k tak, že $M = \{x_1, \ldots, x_k\}$.

(3) Množina M je *nekonečná*, pokud není konečná.

✱ **Řešení problému 0.3.2** Řešením je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 0.3.2** Označme jako P množinu všech prvočísel. Ukážeme, že P je nekonečná množina. Budeme postupovat sporem. Ať tedy množina P není nekonečná. Podle definice to znamená, že P je konečná množina. Může nastat pouze jedna ze dvou možností:

(1) $P = \emptyset$. To ale vede ke sporu, protože (například) $2 \in P$.

(2) $P \neq \emptyset$. Protože množina P je konečná, musí existovat kladné přirozené číslo k takové, že platí rovnost

$$P = \{p_1, \ldots, p_k\}$$

Definujme přirozené číslo n takto: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, tj. n je součin všech čísel z množiny P. Protože přirozené číslo $n+1$ má prvočíselný rozklad, musí být $n+1$ dělitelné nekterým z prvočísel p_1, …, p_k. Označme toto prvočíslo jako p_{i_0}. To znamená, že prvočíslo p_{i_0} dělí přirozené číslo $n+1$. Ovšem prvočíslo p_{i_0} dělí také přirozené číslo n. To znamená, že prvočíslo p_{i_0} dělí také přirozené číslo $(n+1)-n$. Neboli: prvočíslo p_{i_0} dělí také přirozené číslo 1. To je spor s definicí prvočísla.

Ukázali jsme, že předpoklad konečnosti množiny P vede ke sporu. Tím je důkaz ukončen.

0.4 Důkaz indukcí

Princip matematické indukce. K tomu, abychom dokázali platnost tvrzení $V(n)$ pro všechna přirozená čísla n, pro která platí $n \geq n_0$, stačí dokázat následující dvě podmínky:

(1) Platí tvrzení $V(n_0)$.

(2) Tvrzení $V(n+1)$ platí, jakmile platí tvrzení $V(n)$.

Schéma důkazu matematickou indukcí. Při důkazu tvrzení

Pro všechna $n \geq n_0$ platí $V(n)$.

matematickou indukcí postupujeme takto:

(1) **Základní krok.** Dokážeme platnost tvrzení $V(n_0)$.

(2) **Indukční krok.** Chceme dokázat tvrzení $V(n+1)$ pro pevné $n \geq n_0$. Toto tvrzení dokážeme tak, že předpokládáme platnost tvrzení $V(n)$. Tomuto předpokladu se říká **indukční předpoklad**.

0.4.1 Problém Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí nerovnost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

✱ **Řešení problému 0.4.1** Řešením problému je správně vedený důkaz matematickou indukcí toho, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí nerovnost $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2}$.

✱ Komentář k problému 0.4.1 Tvrzení $V(n)$, jehož platnost budeme dokazovat, zní:

Platí nerovnost $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

(1) **Základní krok.** Pro $n = 2$ tvrzení zní:

Platí nerovnost $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$.

To je jistě pravda, protože $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$. Důkaz základního kroku je u konce.

(2) **Indukční krok.** Máme pevně zvolené přirozené číslo $n \geq 2$ a máme dokázat platnost tvrzení $V(n+1)$, tj, máme dokázat tvrzení

Platí nerovnost $\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{2}$.

Nyní přichází *nejdůležitější okamžik* při důkazu indukčního kroku: je třeba v problému, který máme dokázat, „objevit“ problém „menších rozměrů“. Na tento problém menších rozměrů pak budeme chtít aplikovat indukční předpoklad.

Povšimněme si, že levá strana $\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)}$ dokazované nerovnosti z tvrzení $V(n+1)$ „začíná a končí později“, než levá strana nerovnosti $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ z tvrzení $V(n)$.

Protože ale platí

$$\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\underbrace{\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)}_{\text{korekce, která „zachraňuje“ rovnost}}$$

nabízí se následující postup.

Indukční předpoklad. Platí nerovnost $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

Nyní můžeme indukční předpoklad použít následovně:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)} &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right) \\
&> \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

To ale stále není nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat. Jak to udělat? Kdyby platila další nerovnost

$$\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right) \geq 0$$

mohli bychom pokračovat, a důkaz indukčního kroku by vypadal následovně:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)} &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right) \\
&> \frac{1}{2}+\underbrace{\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)}_{\geq 0} \\
&\geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Zbývá tedy dokázat, že $-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} \geq 0$. To je ale snadné: tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2n+1} \geq \underbrace{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+2}}_{=\frac{1}{2n+2}}$$

která pro všechna $n \geq 1$ platí.

Důkaz indukčního kroku je ukončen, dokázali jsme, že nerovnost

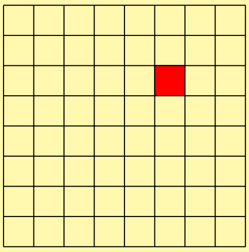
$$\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{2}$$

platí.

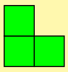
Důkaz indukcí je ukončen. Nerovnost $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ platí pro všechna přirozená čísla $n \geq 1$.

Upozornění: častou chybou při indukčním kroku je *začít* s tvrzením $V(n+1)$ a nějakými úpravami je *redukovat* na tvrzení $V(n)$.[5]

0.4.2 Problém Pro přirozené číslo $n \geq 1$ budeme místností rozměrů $n \times n$ rozumět šachovnici rozměrů $2^n \times 2^n$, ze které je jedno pole vyjmuto. Toto je příklad místnosti rozměrů 3:



„Parketě“ ve tvaru



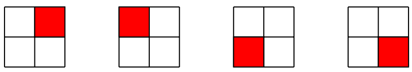
budeme říkat trimino.

Dokažte matematickou indukcí: Pro každé $n \geq 1$ lze každou místnost rozměrů n vyparketovat triminy.

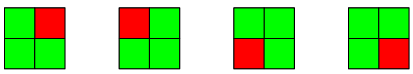
✱ **Řešení problému 0.4.2** Řešením problému je správně vedený důkaz matematickou indukcí toho, že pro každé $n \geq 1$ lze každou místnost rozměrů n vyparketovat triminy.

✱ **Komentář k problému 0.4.2** V našem případě je $n_0 = 1$ a tvrzení $V(n)$ zní: jakoukoli místnost rozměrů n lze vyparketovat triminy. Chceme dokázat, že pro všechna $n \geq n_0$ platí tvrzení $V(n)$. Dokážeme to principem matematické indukce.

(1) **Základní krok.** Dokážeme platnost tvrzení $V(1)$. Protože místnost rozměrů 1 má jeden z následujících tvarů



je zřejmé, že každou takovou místnost lze vyparketovat jedním triminem

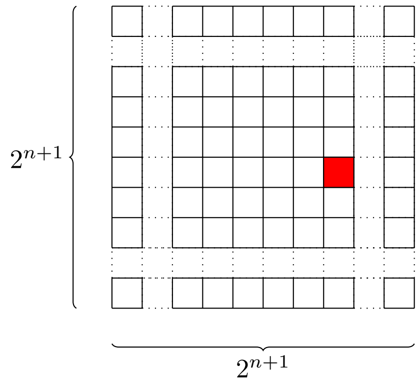


Důkaz základního kroku matematické indukce je ukončen: ukázali jsme, že platí tvrzení $V(1)$.

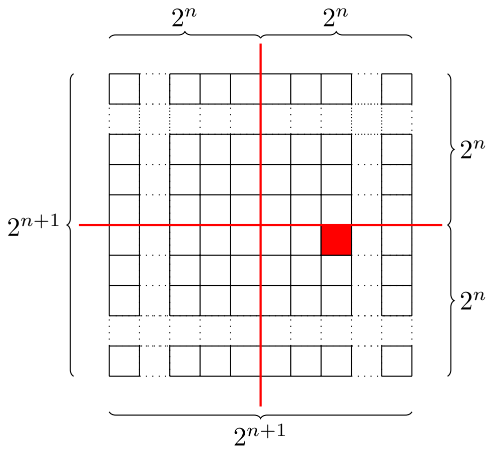
(2) **Indukční krok.** Ať máme místnost rozměrů $n + 1$. Chceme ukázat platnost tvrzení $V(n + 1)$. To znamená, že máme místnost rozměrů $n + 1$ a my ji chceme vyparketovat triminy. Naše místnost tedy

[5] Nejen, že je tento postup špatně. Často je tento postup nemožný, viz Problém 0.4.2.

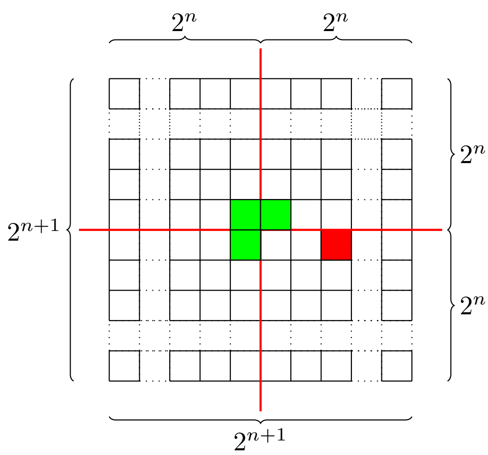
vypadá takto:



Jak zformulovat indukční předpoklad? V tom nám poradí *dekomposice* problému: potřebujeme najít místnost(i) rozměrů n. Téměř okamžitě se nabízí rozpůlit délku stran zadané místnosti a získat tak čtyři šachovnice rozměrů $2^n \times 2^n$:



Všimněme si, že pouze šachovnice vpravo dole je místností rozměrů n. Na tuto místnost bychom mohli použít indukční předpoklad a vyparketovat ji triminy. Co se zbývajícími třemi čtverci? V každém z nich chybí jeden „vyňatý“ čtverec. Protože ale tyto čtverce jsou *tři*, můžeme umístit jedno trimino následovně:



Tím získáme *dekomposici* problému velikosti $n + 1$ (tj., jak vyparketovat místnost rozměrů $n + 1$) na čtyři problémy velikosti n (tj., jak vyparketovat místnost rozměrů n). A tato dekomposice vede okamžitě k tomu, že můžeme zformulovat indukční předpoklad následovně:

Indukční předpoklad. Každou místnost rozměrů n lze vyparketovat triminy.

Nyní je již snadné dokončit důkaz indukčního kroku: abychom vyparketovali místnost rozměrů $n+1$, rozdělíme ji na čtyři čtverce rozměrů $2^n \times 2^n$, vhodným položením jednoho trimina získáme čtyři místnosti rozměrů n a každou tuto místnost již umíme podle indukčního předpokladu vyparketovat.

Důkaz indukcí je u konce. Ukázali jsme, že pro všechna $n \geq 1$ lze každou místnost rozměrů n vyparketovat triminy.

Důležitá poznámka. Tento příklad jasně ilustruje, že každý důkaz indukcí je vlastně *rekursivní algoritmus*. Základní krok důkazu indukcí je situace, kdy algoritmus zpracovává „data nejmenších možných rozměrů" a kdy pracuje nerekursivně. Indukční krok spočívá v tom, že rekursivní algoritmus při zpracování „dat velkých rozměrů" nejprve provede *dekomposici* velikosti dat na úlohy, které mají zpracovat data menších rozměrů, a potom tato data zpracuje rekrsivním voláním (tj., využije se indukční předpoklad).

Kontrola správnosti důkazu matematickou indukcí. Jste-li na pochybách, zda jste napsali důkaz matematickou indukcí, využijte předchozí poznámku: správně napsaný důkaz indukcí musí „běžet jako rekursivní algoritmus". To znamená: při kontrole správnosti důkazu matematickou indukcí si důkaz „spusťte" jako rekursivní algoritmus.

0.5 Důkaz rozborem případů

Schéma důkazu rozborem případů. Chceme=li dokázat tvrzení

Ať platí α_1 nebo α_2. Potom platí β.

rozborem případů, dokážeme, že platí *obě* následující tvrzení

(1) Ať platí α_1. Potom platí β.

(2) Ať platí α_2. Potom platí β.

Pochopitelně: toto schéma lze zobecnit pro dokazování tvrzení tvaru

Ať platí α_1, nebo α_2, nebo. . . , nebo α_k. Potom platí β.

pro pevné přirozené číslo $k \geq 1$.

0.5.1 Problém Ať A, B a M jsou množiny. Ať platí $A \subseteq M$ a $B \subseteq M$. Ukažte, že potom platí $A \cup B \subseteq M$.

✱ **Řešení problému 0.5.1** Řešením je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 0.5.1** Ať platí $A \subseteq M$ a $B \subseteq M$. Chceme dokázat, že platí $A \cup B \subseteq M$. Zvolme tedy libovolné $x \in A \cup B$. Chceme dokázat, že platí $x \in M$. Nastane alespoň jeden z následujících případů.

(1) $x \in A$.
V tomto případě platí $x \in M$, protože platí $A \subseteq M$.

(2) $x \in B$.
V tomto případě platí $x \in M$, protože platí $B \subseteq M$.

Žádný další příklad nastat nemůže. Důkaz je hotov.

0.5.2 Problém Existují dvě kladná iracionální čísla a a b taková, že číslo a^b je racionální.

✱ **Řešení problému 0.5.2** Řešením je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 0.5.2** Důkaz provedeme rozborem případů. Může nastat právě jeden ze dvou případů.

(1) Číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je racionální.

V tomto případě jsou čísla $a = \sqrt{2}$ a $b = \sqrt{2}$ dvě kladná iracionální čísla taková, že a^b je racionální číslo. Důkaz je hotov.

(2) Číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální.

V tomto případě jsou čísla $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $b = \sqrt{2}$ dvě kladná iracionální čísla taková, že a^b je racionální číslo. Platí totiž rovnosti

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

Důkaz je hotov.

0.6 Hypotézy — To jest: Rozhodněte, zda platí...

Jak nakládat s hypotézami. Hypotéza má tvar tvrzení, o kterém *nevíme*, zda platí. Je těžké podat obecný návod, jak s hypotézami zacházet. Pokud na první pohled vidíme, že hypotéza neplatí, hypotézu zamítneme (s příslušným protipříkladem). Pokud nic na první pohled nevidíme, pokoušíme se (velmi obezřetně) hypotézu dokázat. Buď se nám to povede (pak se hypotéza stává tvrzením), nebo se důkaz na nějakém místě „zadrhne“. Toto místo pak bývá (většinou) zdrojem protipříkladu, který hypotézu zamítne.

0.6.1 Problém Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Ať A a B jsou množiny. Potom z rovnosti $A \cap B = A \cup B$ plyne rovnost $A = B$.

✱ **Řešení problému 0.6.1** Řešením problému je buď správně vedený důkaz daného tvrzení, nebo protipříklad.

✱ **Komentář k problému 0.6.1** Nejprve analysujme předpoklad, tj., rovnost $A \cap B = A \cup B$. Dozvídáme se platnost dvou inklusí:

(1) Platí $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Tato inkluse platí *vždy*, protože platí $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. Inkluse $A \cap B \subseteq A \cup B$ tedy „neříká nic zajímavého“.

(2) Platí $A \cup B \subseteq A \cap B$.

Inkluse $A \cup B \subseteq A \cap B$ platí právě tehdy, když platí $A \cup B \subseteq A$ a $A \cup B \subseteq B$. Protože *vždy* platí i inkluse $A \subseteq A \cup B$ a $B \subseteq A \cup B$, dozvídáme se, že platí

$$B \subseteq A \cup B \subseteq A \quad \text{a} \quad A \subseteq A \cup B \subseteq B$$

To znamená, že se dozvídáme, že platí

$$B \subseteq A \quad \text{a} \quad A \subseteq B$$

neboli, že platí rovnost $A = B$.

Důkaz je hotov. Dané tvrzení platí.

Poznámka. Správně vedený důkaz nám často umožňuje tvrzení „destilovat“. Například z našeho tvrzení můžeme „vydestilovat“ tvrzení:

Ať A a B jsou množiny. Potom z inkluse $A \cup B \subseteq A \cap B$ plyne rovnost $A = B$.

0.6.2 Problém Rozhodněte o pravdivosti následujícího tvrzení:

> Ať A a B jsou množiny. Potom z inkluse $A \subseteq B$ plyne rovnost $A \cap B = A \cup B$.

✱ **Řešení problému 0.6.2** Řešením problému je buď správně vedený důkaz daného tvrzení, nebo protipříklad.

✱ **Komentář k problému 0.6.2** Analysujme rovnost $A \cap B = A \cup B$ za *předpokladu*, že platí $A \subseteq B$. Potom platí

$$A \cap B = A \quad \text{a} \quad A \cup B = B$$

Když tedy platí $A \subseteq B$, máme dokázat rovnost $A = B$. A to zjevně není možné. Protipříkladem je $A = \emptyset$ a $B = \{b\}$. Potom platí $A \subseteq B$, ale

$$\underbrace{A \cap B}_{=\emptyset} \neq \underbrace{A \cup B}_{=\{b\}}$$

Hypotézu zamítáme. Tvrzení

> Ať A a B jsou množiny. Potom z inkluse $A \subseteq B$ plyne rovnost $A \cap B = A \cup B$.

neplatí.

0.7 Chybná tvrzení a chybné důkazy.

0.7.1 Problém Nalezněte chybu v důkazu. Ukažte, že tvrzení je chybné.

Tvrzení. Ať a je sudé přirozené číslo a ať b je liché přirozené číslo. Potom $b^2 - a^2 = a + b$.

Důkaz. Protože a je sudé přirozené číslo a b je liché přirozené číslo, platí $a = 2k$ a $b = 2k + 1$. Potom

$$b^2 - a^2 = (2k+1)^2 - (2k)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 = 4k + 1 = 2k + (2k+1) = a + b$$

✱ **Řešení problému 0.7.1** Řešením problému je nalezení místa, kde důkaz selhává.

✱ **Návod k řešení problému 0.7.1** Podrobně analysujte začátek důkazu: *Protože a je sudé přirozené číslo a b je liché přirozené číslo, platí $a = 2k$ a $b = 2k + 1$.* Tuto analýzu použijte ke konstrukci protipříkladu k danému tvrzení.

0.7.2 Problém Nalezněte chybu v důkazu. Ukažte, že tvrzení je chybné.

Tvrzení. Ať x a y jsou reálná čísla, pro která platí $x^2 y = 9y$. Jestliže $x \neq 3$, potom $y = 0$.

Důkaz. Ať platí $x^2 y = 9y$. Rovnost $x^2 y = 9y$ přepišme jako $(x^2 - 9) \cdot y = 0$. To znamená, že platí $x^2 - 9 = 0$ nebo $y = 0$. Protože $x \neq 3$, platí $x^2 \neq 9$. To znamená, že platí $x^2 - 9 \neq 0$. Proto platí $y = 0$.

✱ **Řešení problému 0.7.2** Řešením problému je nalezení místa, kde důkaz selhává.

✱ **Návod k řešení problému 0.7.2** Opravdu z nerovnosti $x \neq 3$ plyne nerovnost $x^2 \neq 9$? Podrobnou analýzou této situace nalezněte protipříklad daného tvrzení. To jest: nalezněte reálná čísla x a y, pro která platí $x^2 y = 9y$, $x \neq 3$, ale $y \neq 0$.

0.7.3 Problém Nalezněte chybu v důkazu. Ukažte, že tvrzení je chybné.

Tvrzení. Ať A, B a C jsou množiny. Jestliže $A \cup B = A \cup C$, potom $B = C$.

Důkaz. Ať $A \cup B = A \cup C$. Ukážeme, že $B \subseteq C$. Inklusi $C \subseteq B$ dokážeme analogicky.
Zvolme $x \in B$. Potom $x \in A \cup B$. Podle předpokladu je $x \in A \cup C$. To znamená, že $x \in A$ nebo $x \in C$. My jsme ale nepředpokládali, že $x \in A$. Proto je $x \in C$. Ukázali jsme, že $B \subseteq C$.

✱ **Řešení problému 0.7.3** Řešením problému je nalezení místa, kde důkaz selhává.

✱ **Návod k řešení problému 0.7.3** Nejasným místem je okamžik, kdy z $x \in A$ nebo $x \in C$ odvozujeme, že $x \in C$. Analysujte tuto situaci a vytvořte tak protipříklad. To jest, nalezněte množiny A, B, C takové, že $A \cup B = A \cup C$, ale $B \neq C$.

Téma 1

Uvedení do algebry

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
B6B01LAG	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**

Co se procvičuje: základní operace s reálnými a komplexními čísly, operace sčítání a násobení modulo m, výpočty s polynomy, vlastnosti abstraktní binární operace.

Důležité: 0 je přirozené číslo.

1.1 Počítání s čísly

1.1.1 Problém Dokažte, že pro libovolné reálné číslo r platí rovnost[a] $0 \cdot r = 0$.

[a]Zobecnění tohoto tvrzení dokážete v Problému 3.1.4.

✱ **Řešení problému 1.1.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro libovolné reálné číslo r platí rovnost $0 \cdot r = 0$.

✱ **Komentář k problému 1.1.1** Nejprve ukážeme, že neutrální prvek vzhledem ke sčítání je v $\mathbb{R}$ určen jednoznačně.[1] To jest, pokud pro reálná čísla 0_1 a 0_2 platí rovnosti

$$0_1 + x = x \quad 0_2 + x = x$$

pro všechna reálná čísla x, potom $0_1 = 0_2$.

To je jednoduché: protože 0_2 je neutrální, platí $0_1 = 0_2 + 0_1$. Protože 0_1 je neutrální, platí $0_2 + 0_1 = 0_2$. Celkově tedy platí $0_1 = 0_2$.

Nyní již můžeme přikročit k důkazu toho, že pro libovolné reálné číslo r platí rovnost $0 \cdot r = 0$.

Zvolme tedy reálné číslo r. Využijeme předchozího: k tomu, abychom dokázali rovnost $0 \cdot r = 0$, stačí dokázat, že $0 \cdot r$ je neutrální vzhledem ke sčítání. To znamená, že stačí ukázat rovnost

$$x + 0 \cdot r = x$$

pro libovolné reálné číslo x.

[1]Zobecnění tohoto faktu dokážete v Problému 1.3.1.

Nejprve si všimněme toho, že platí $0 \cdot r + 0 \cdot r = (0+0) \cdot r = 0 \cdot r$. Proto platí

$$x = x + 0 \cdot r - 0 \cdot r = x + 0 \cdot r + 0 \cdot r - 0 \cdot r = x + 0 \cdot r$$

a to jsme chtěli dokázat.

1.1.2 Problém Ukažte, že pro jakákoli reálná čísla r, s jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Platí $r \cdot s = 0$.

(2) Platí $r = 0$ nebo $s = 0$.

✱ **Řešení problému 1.1.2**

✱ **Komentář k problému 1.1.2** Z (1) plyne (2). Předpokládejme, že platí rovnost $r \cdot s = 0$. Může nastat pouze jedna z následujících možností:

(i) $r = 0$. V tomto případě je důkaz hotov.

(ii) $r \neq 0$. Protože $\mathbb{F}$ je těleso, existuje r^{-1}. Z rovnosti $r \cdot s = 0$ plyne rovnost $r^{-1} \cdot (r \cdot s) = r^{-1} \cdot 0$. Podle Problému 1.1.1 platí $r^{-1} \cdot 0 = 0$ a podle asociativity násobení, vlastnosti inverse a neutrality 1 vzhledem k násobení platí $r^{-1} \cdot (r \cdot s) = (r^{-1} \cdot r) \cdot s = 1 \cdot s = s$. Rovnost $r^{-1} \cdot (r \cdot s) = r^{-1} \cdot 0$ lze tedy přepsat na rovnost $s = 0$. Důkaz je hotov.

Ze (2) plyne (1). Předpokládejme, že $r = 0$. Potom rovnost $0 \cdot s = 0$ platí podle Problému 1.1.1. V případě, kdy $s = 0$, postupujeme analogicky.

1.1.3 Problém Ukažte, že z nerovností $a + x > b + y$ a $a > b$ v $\mathbb{R}$ obecně neplyne[a] nerovnost $x > y$.

[a]Nerovnosti tedy od sebe obecně *nemůžeme* odečítat.

✱ **Řešení problému 1.1.3** Řešením problému je nalezení protipříkladu, tj. konstrukce reálných čísel a, b, x, y tak, že $a + x > b + y$ a $a > b$ platí, ale $x > y$ neplatí.

✱ **Komentář k problému 1.1.3** Zvolte například $a = 2$, $b = 1$, $x = 1$, $y = 1$. Potom $a + x > b + y$ a $a > b$ platí, ale $x > y$ neplatí.

1.1.4 Problém Ukažte, že pro každé reálné číslo $x \geq 0$ existuje nejvýše jedno[a] reálné číslo $r \geq 0$ s vlastností $r^2 = x$.

[a]Takové číslo r existuje dokonce *právě jedno* a říká se mu *druhá odmocnina* z x (značení $\sqrt{x}$). K důkazu existence druhé odmocniny bychom však potřebovali znát přesnou definici množiny reálných čísel.

✱ **Řešení problému 1.1.4** Řešením je správně vedený důkaz toho, že pro každé reálné číslo $x \geq 0$ existuje nejvýše jedno reálné číslo $r \geq 0$ s vlastností $r^2 = x$.

✱ **Komentář k problému 1.1.4** V případě $x = 0$ není co dokazovat: platí $0^2 = 0$ a podle Problému 1.1.2 je 0 jediné reálné číslo s touto vlastností. Ať tedy $x > 0$.

Předpokládejme, že existují dvě reálná čísla r_1, r_2, pro která platí: $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$ a $r_1^2 = x$, $r_2^2 = x$. Ukážeme, že platí $r_1 = r_2$.

Protože platí $r_1^2 = r_2^2$, platí rovnosti

$$0 = r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2) \cdot (r_1 + r_2)$$

To znamená, že musí platit $r_1 - r_2 = 0$ nebo $r_1 + r_2 = 0$. Pokud platí $r_1 + r_2 = 0$, je $r_1 = -r_2$. To znamená, že jedno z čísel r_1, r_2 je záporné. To je spor. Musí tedy platit $r_1 - r_2 = 0$. To znamená, že platí $r_1 = r_2$. Důkaz je hotov.

1.1.5 Problém Ukažte, že ke komplexnímu číslu $a + bi$ existuje inverse právě tehdy, když $a^2 + b^2 \neq 0$.

✱ **Řešení problému 1.1.5** Řešením je správně vedený důkaz toho, že ke komplexnímu číslu $a + bi$ existuje inverse právě tehdy, když $a^2 + b^2 \neq 0$.

✱ **Komentář k problému 1.1.5**

(1) Ať má číslo $a + bi$ inversi. Ukážeme, že pak platí $a^2 + b^2 \neq 0$.
Ať platí $a^2 + b^2 = 0$. Potom platí $a = b = 0$, neboli $a + bi = 0$. Protože předpokládáme, že $(a + bi)^{-1}$ existuje, platí
$$1 = (a + bi) \cdot (a + bi)^{-1} = 0 \cdot (a + bi)^{-1} = 0$$
To je spor. Musí tedy platit $a^2 + b^2 \neq 0$.

(2) Ať platí $a^2 + b^2 \neq 0$. Ukážeme, že pak číslo $a + bi$ má inversi.
Protože $a^2 + b^2 \neq 0$, můžeme definovat
$$(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$
Potom platí
$$(a + bi) \cdot \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{(a + bi) \cdot (a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

1.1.6 Problém Pro každé komplexní číslo $z = a + bi$ označte[a] jako $\overline{z} = a - bi$. Indukcí dokažte, že pro všechna přirozená čísla $k \geq 0$ a pro všechna komplexní čísla z platí rovnost $\overline{(z^k)} = (\overline{z})^k$.

[a] Komplexnímu číslu $\overline{z}$ se říká *číslo komplexně sdružené* se z.

✱ **Řešení problému 1.1.6** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro všechna přirozená čísla $k \geq 0$ a pro všechna komplexní čísla z platí rovnost $\overline{(z^k)} = (\overline{z})^k$.

✱ **Komentář k problému 1.1.6** Nejprve ukážeme, že pro libovolná komplexní čísla $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí rovnost $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. To je snadné:
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
a
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
Nyní dokážeme, že pro všechna přirozená čísla $k \geq 0$ platí rovnost $\overline{(z^k)} = (\overline{z})^k$. Budeme postupovat indukcí podle $k \geq 0$. Důkaz rozdělíme na základní krok a na indukční krok.

(1) $k = 0$. Pro všechna komplexní čísla z platí rovnosti $\overline{(z^0)} = \overline{1} = 1$ a $(\overline{z})^0 = 1$. To znamená, že platí $\overline{(z^0)} = (\overline{z})^0$. Dokázali jsme základní krok indukce.

(2) $k > 0$. Ať $z = a + bi$ je libovolné komplexní číslo. Předpokládejme, že platí rovnost $\overline{(z^{k-1})} = (\overline{z})^{k-1}$. Díky platnosti rovnosti $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ pro libovolná komplexní čísla z_1, z_2 a platnosti indukčního předpokladu platí:
$$\overline{z^k} = \overline{z^{k-1} \cdot z} = \overline{z^{k-1}} \cdot \overline{z} = (\overline{z})^{k-1} \cdot \overline{z} = (\overline{z})^k$$
a to jsme chtěli dokázat.

Důkaz indukcí je hotov: rovnost $\overline{(z^k)} = (\overline{z})^k$ platí pro všechna přirozená čísla $k \geq 0$ a pro všechna komplexní čísla z.

1.1.7 Problém Ukažte, že pro všechna a, b v $\mathbb{Z}_3$ platí rovnost $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.

✱ **Řešení problému 1.1.7** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro všechna a, b v $\mathbb{Z}_3$ platí rovnost $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.

✱ **Komentář k problému 1.1.7** V $\mathbb{Z}$ platí rovnost $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$. Přečteme-li tuto rovnost v $\mathbb{Z}_3$, dostáváme rovnost $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ v $\mathbb{Z}_3$.

1.1.8 Problém Zapište tabulku násobení v $\mathbb{Z}_6$ a vypište všechny prvky, které mají v $\mathbb{Z}_6$ inversi (i s příslušnými inversemi).

✱ **Řešení problému 1.1.8** Tabulka násobení v $\mathbb{Z}_6$ je

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

a platí

$$1^{-1} = 1 \qquad 5^{-1} = 5$$

✱ **Komentář k problému 1.1.8** V $\mathbb{Z}_6$ čísla a a b násobíme takto: spočteme součin $a \cdot b$ v $\mathbb{Z}$ a výsledek nahradíme zbytkem po dělení 6. Dostáváme tedy

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Z tabulky násobení je zřejmé, že čísla 0, 2, 3 a 4 nemají inversi v $\mathbb{Z}_6$. Dále z tabulky násobení plyne, že platí

$$1^{-1} = 1 \quad \text{a} \quad 5^{-1} = 5$$

1.1.9 Problém Nalezněte 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$.

✱ **Řešení problému 1.1.9** V $\mathbb{Z}_{17}$ platí $12^{-1} = 10$.

✱ **Komentář k problému 1.1.9** Protože 17 je prvočíslo a protože v $\mathbb{Z}_{17}$ platí $12 \neq 0$, číslo 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$ existuje. Předvedeme *rekursivní* výpočet čísla 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$.

(1) Budeme předpokládat, že umíme nalézt a^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$ pro všechna $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$.
Podle věty o dělení se zbytkem v $\mathbb{Z}$ platí rovnost $17 = 1 \cdot 12 + 5$. To znamená, že v $\mathbb{Z}_{17}$ platí rovnost $0 = 12 + 5$, neboli $5 = -12$. Podle předpokladu, umíme nalézt 5^{-1}. Potom $1 = 5 \cdot 5^{-1} = 12 \cdot (-5^{-1})$, neboli $12^{-1} = -5^{-1}$.

(2) Číslo 5^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$ nalezneme opět rekursivně. Budeme předpokládat, že umíme nalézt a^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$ pro všechna $a \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Podle věty o dělení se zbytkem v $\mathbb{Z}$ platí rovnost $17 = 3 \cdot 5 + 2$. To znamená, že v $\mathbb{Z}_{17}$ platí rovnost $0 = 3 \cdot 5 + 2$, neboli $2 = -3 \cdot 5$. Podle předpokladu, umíme nalézt 2^{-1}. Potom $1 = 2 \cdot 2^{-1} = 5 \cdot (-3 \cdot 2^{-1})$, neboli $5^{-1} = -3 \cdot 2^{-1}$.

(3) Číslo 2^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$ nalezneme opět rekursivně. Budeme předpokládat, že umíme nalézt a^{-1} v $\mathbb{Z}_{17}$ pro všechna $a \in \{1\}$. To je ale jednoduché: protože $1 \cdot 1 = 1$, platí $1^{-1} = 1$.
Podle věty o dělení se zbytkem v $\mathbb{Z}$ platí rovnost $17 = 8 \cdot 2 + 1$. To znamená, že v $\mathbb{Z}_{17}$ platí rovnost $0 = 8 \cdot 2 + 1$, neboli $1 = -8 \cdot 2$. Platí $1^{-1} = 1$. Potom $1 = 1 \cdot 1^{-1} = 2 \cdot (-8 \cdot 1^{-1})$, neboli $2^{-1} = -8 \cdot 1^{-1}$.
Rekursivní výpočet skončil.

Dosadíme nyní do výše uvedených rovností:

$$12^{-1} = -\underbrace{5^{-1}}_{=-3\cdot 2^{-1}} = 3 \cdot \underbrace{2^{-1}}_{=-8\cdot 1^{-1}} = -3 \cdot 8 \cdot 1 = -24 = 10 \quad \text{v } \mathbb{Z}_{17}$$

1.1.10 Problém (Binomická věta) Dokažte matematickou indukcí: pro libovolná reálná čísla a, b a pro libovolné přirozené číslo n platí rovnost[a]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

[a]Toto tvrzení zobecníte v Problému 3.4.2.

✱ **Řešení problému 1.1.10** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro libovolná reálná čísla a, b a pro libovolné přirozené číslo n platí rovnost

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

✱ **Komentář k problému 1.1.10** Postupujeme matematickou indukcí podle přirozeného čísla n:

(1) Základní krok pro $n = 0$: platí $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$. Využili jsme rovností $0! = 1$ a $a^0 = 1$, $b^0 = 1$, pro všechna reálná čísla a, b.

(2) Zvolme pevné přirozené číslo n.

(a) Indukční předpoklad: rovnost

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

platí pro všechna reálná čísla a, b.

(b) Indukční krok: ukážeme, že pro všechna reálná čísla a, b platí

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

a to uděláme následovně: zvolme libovolná reálná čísla a, b. Potom (s využitím indukčního předpokladu) platí rovnosti[2]

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n \\
&= (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}$$

[2]Jak tyto výpočty souvisí s lineární algebrou? Ukazují hezkou techniku počítání se sumami: v rovnosti $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k$ jsme využili možnosti *přeindexovat* sumu. Více se počítání se sumačním znaménkem budeme věnovat v Tématu 3.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}
$$

kde jsme využili rovností

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n+1-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (n+1-k)} \\
&= \frac{n! \cdot (n+1-k) + n! \cdot k}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)! \cdot (n+1-k)} \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)! \cdot (n+1-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

pro libovolné k, pro které platí $1 \leq k \leq n$.

Důkaz indukcí je hotov.

Poznámka: rovnost $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ pro libovolné k, pro které platí $1 \leq k \leq n$, je základem *rekursivního* výpočtu kombinačních čísel. Schématu kombinačních čísel, které takto vytvoříme, se často říká *Pascalův trojúhelník*:

$$
\begin{tikzcd}
k=0 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 & \dots & \\
1 & & & & & & n=0 \\
1 & 1 & & & & & n=1 \\
1 & 2 & 1 & & & & n=2 \\
1 & 3 & 3 \arrow[dr] & 1 \arrow[d] & & & n=3 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & n=4 \\
\vdots & & & & & & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Například $4 = \binom{4}{3}$ tak dostaneme sečtením $3 = \binom{3}{2}$ a $1 = \binom{3}{3}$, což je v našem obrázku vyznačeno šipkami. Podobně získáme další prvky Pascalova trojúhelníku.

Výhodou tohoto schématu je (například) velmi rychlé určení vzorce

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= 1\cdot a^4\cdot b^0+4\cdot a^3\cdot b^1+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a^1\cdot b^3+1\cdot a^0\cdot b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

Protože pro reálná čísla a, b a pro přirozené číslo k platí rovnosti $a-b=a+(-b)$ a $(-b)^k=(-1)^k\cdot b$, získáváme tím i vzorec

$$\begin{aligned}(a-b)^4 &= 1\cdot a^4\cdot(-b)^0+4\cdot a^3\cdot(-b)^1+6\cdot a^2\cdot(-b)^2+4\cdot a^1\cdot(-b)^3+1\cdot a^0\cdot(-b)^4\\ &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\end{aligned}$$

1.2 Základní výpočty s polynomy

1.2.1 Problém Vynásobte polynomy $a(x)=3x^4+2x+1$ a $b(x)=2x+4$ ze $\mathbb{Z}_5[x]$.

✱ **Řešení problému 1.2.1** Řešením je polynom $a(x)\cdot b(x)=x^5+2x^4+4x^2+4$ v $\mathbb{Z}_5[x]$.

✱ **Komentář k problému 1.2.1** Polynomy v $\mathbb{Z}_5[x]$ násobíme „obvyklým způsobem“, přičemž využíváme faktu, že koeficienty polynomů jsou čísla ze $\mathbb{Z}_5$. To znamená, že platí

$$(3x^4+2x+1)\cdot(2x+4)=6x^5+4x^2+2x+12x^4+8x+4=x^5+2x^4+4x^2+4$$

Ukázali jsme, že $a(x)\cdot b(x)=x^5+2x^4+4x^2+4$ v $\mathbb{Z}_5[x]$.

1.2.2 Problém Zapište polynom $p(x)$ z $\mathbb{C}[x]$, který má 3-násobný kořen 2 a 2-násobný kořen $(1+i)$. Polynom $p(x)$ žádné další kořeny mít nesmí.

✱ **Řešení problému 1.2.2** Hledaný polynom je

$$p(x)=(x-2)^3\cdot(x-(1+i))^2=x^5+x^4(-4-2i)+x^3(8+2i)+x^2(-8+4i)+x(-8-16i)+(16+32i)$$

✱ **Komentář k problému 1.2.2** Z hledaného polynomu $p(x)$ musíme umět vytknout třetí mocninu kořenového faktoru čísla 2 (protože $p(x)$ má mít 3-násobný kořen 2) a druhou mocninu kořenového faktoru čísla $1+i$ (protože $p(x)$ má mít 2-násobný kořen $1+i$). Žádné další kořenové faktory z polynomu $p(x)$ již vytknout jít nesmí. To znamená, že musí platit rovnosti

$$\begin{aligned}p(x) &= (x-2)^3\cdot(x-(1+i))^2\\ &= (x^3-2x^2+4x-8)\cdot(x^2-2(1+i)x+(1+i)^2)\\ &= (x^3-2x^2+4x-8)\cdot(x^2-2(1+i)x-2i)\\ &= x^5-2x^4+4x^3-8x^2-2(1+i)x^4+4(1+i)x^3-8(1+i)x+16(1+i)-2ix^3+4ix^2-8ix+16i\\ &= x^5+x^4(-4-2i)+x^3(8+2i)+x^2(-8+4i)+x(-8-16i)+(16+32i)\end{aligned}$$

1.2.3 Problém Ať polynom $p(x)=x^4-2x^3+5x-4$ z $\mathbb{R}[x]$ má celočíselný kořen a. Ukažte, že potom číslo a musí dělit číslo -4.

✱ **Řešení problému 1.2.3** Řešením je správně vedený důkaz toho, že pokud polynom $p(x)=x^4-2x^3+5x-4$ z $\mathbb{R}[x]$ má celočíselný kořen a, potom a musí dělit číslo -4.

✱ **Komentář k problému 1.2.3** Ať a je celé číslo, pro které platí $a^4-2a^3+5a-4=0$. Potom platí

$$4=a^4-2a^3+5a=a\cdot(a^3-2a^2+5)$$

Protože celé číslo $a\cdot(a^3-2a^2+5)$ je dělitelné číslem a (využíváme toho, že a i a^3-2a^2+5 jsou celá čísla), musí číslem a být dělitelné i číslo 4. V oboru celých čísel z toho plyne, že číslem a je dělitelné číslo -4. A to jsme chtěli dokázat.

1.2.4 Problém Ať $p(x)$ je polynom v $\mathbb{R}[x]$ a ať pro komplexní číslo z platí $p(z) = 0$. Dokažte, že potom $p(\overline{z}) = 0$.

✱ **Řešení problému 1.2.4** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $p(\overline{z}) = 0$, jakmile $p(x)$ je polynom v $\mathbb{R}[x]$ a z je komplexní číslo, pro které platí $p(z) = 0$.

✱ **Komentář k problému 1.2.4** Můžeme bez obav předpokládat, že stupeň n polynomu $p(x)$ je alespoň 1. Skutečně: polynom $p(x)$ stupně $-\infty$ je $p(x) = 0$ a polynom stupně 0 je $p(x) = a$, kde $a \neq 0$ je reálné číslo. To znamená, že polynom stupně $-\infty$ má jako kořeny *všechna* komplexní čísla a polynom stupně 0 nemá jako kořen *žádné* komplexní číslo. Pro polynomy stupně $-\infty$ a 0 je tedy tvrzení pravdivé z triviálních důvodů.

Ať tedy polynom $p(x)$ má stupeň alespoň 1. Označme

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

kde $n \geq 1$ je přirozené číslo a čísla $a_n, \ldots, a_0$ jsou reálná, $a_n \neq 0$. Ať z je komplexní číslo, pro které platí

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Podle Problému 1.1.6 platí

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{0} \\
&= \overline{p(z)} \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \\
&= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\
&= p(\overline{z})
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $p(\overline{z}) = 0$.

1.2.5 Problém V $\mathbb{R}[x]$ vydělte polynom $a(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ polynomem $b(x) = 3x - 1$ se zbytkem. Výsledek zapište jako rovnici pro dělení se zbytkem v $\mathbb{R}[x]$.

✱ **Řešení problému 1.2.5** V $\mathbb{R}[x]$ platí rovnost

$$(2x^3 - 5x^2 + 2x - 3) = (\frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{5}{27}) \cdot (3x - 1) + \frac{-76}{27}$$

✱ **Komentář k problému 1.2.5** Předvedeme dva různé způsoby řešení.

(1) Podle „klasického“ algoritmu pro dělení polynomu polynomem platí

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(\; 2x^3 & -\,5x^2 & +\,2x & -\,3 \big) & : \big(3x-1\big) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{5}{27} + \dfrac{-\frac{76}{27}}{3x-1} \\
-\,2x^3 & +\,\frac{2}{3}x^2 & & & \\ \hline
 & -\,\frac{13}{3}x^2 & +\,2x & & \\
 & \frac{13}{3}x^2 & -\,\frac{13}{9}x & & \\ \cline{2-3}
 & & \frac{5}{9}x & -\,3 & \\
 & & -\,\frac{5}{9}x & +\,\frac{5}{27} & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,\frac{76}{27} &
\end{array}$$

To znamená, že v $\mathbb{R}[x]$ platí rovnost

$$\underbrace{2x^3 - 5x^2 + 2x - 3}_{=a(x)} = \underbrace{(\frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{5}{27})}_{=\text{kvocient}} \cdot \underbrace{(3x - 1)}_{=b(x)} + \underbrace{(\frac{-76}{27})}_{=\text{zbytek}}$$

(2) K výpočtu použijeme Hornerovo schéma. Kořen polynomu $3x - 1$ je roven $\frac{1}{3}$, proto Hornerovým schématem spočteme

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 2 & -3 \\ x = \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & -\frac{13}{9} & \frac{5}{27} \\ \hline & 2 & -\frac{13}{3} & \frac{5}{9} & -\frac{76}{27} \end{array}$$

a my tedy dostáváme rovnost[3]

$$(2x^3 - 5x^2 + 2x - 3) = (2x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{5}{9}) \cdot (x - \frac{1}{3}) + \frac{-76}{27}$$

neboli

$$(2x^3 - 5x^2 + 2x - 3) = \frac{1}{3}(2x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{5}{9}) \cdot 3 \cdot (x - \frac{1}{3}) + \frac{-76}{27}$$

což je rovnost

$$\underbrace{2x^3 - 5x^2 + 2x - 3}_{=a(x)} = \underbrace{(\frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{9}x + \frac{5}{27})}_{=\text{kvocient}} \cdot \underbrace{(3x - 1)}_{=b(x)} + \underbrace{(\frac{-76}{27})}_{=\text{zbytek}}$$

1.2.6 Problém V $\mathbb{Z}_5[x]$ vydělte polynom $a(x) = 3x^3 + 2x + 1$ polynomem $b(x) = 2x + 4$ se zbytkem. Výsledek zapište jako rovnici pro dělení se zbytkem v $\mathbb{Z}_5[x]$.

✱ **Řešení problému 1.2.6** Rovnice dělení polynomu $3x^3 + 2x + 1$ polynomem $2x + 4$ se zbytkem v $\mathbb{Z}_5[x]$ je

$$(3x^3 + 2x + 1) = \underbrace{(4x^2 + 2x + 2)}_{\text{kvocient}} \cdot (2x + 4) + \underbrace{3}_{\text{zbytek}}$$

✱ **Komentář k problému 1.2.6** Použijeme „klasický“ algoritmus. To jest budeme počítat obdobně jako v $\mathbb{R}[x]$, ovšem s tím rozdílem, že inverse koeficientů polynomů budeme počítat v $\mathbb{Z}_5$. Nejprve velmi pomalu projdeme celý algoritmus a poté jej zapíšeme analogicky tomu, jak dělení polynomů se zbytkem zapisujeme v $\mathbb{R}[x]$.

(1) Vydělíme vedoucí člen $3x^3$ polynomu $a(x)$ vedoucím členem $2x$ polynomu $b(x)$. To znamená: spočítáme $3 \cdot 2^{-1} \cdot x^2$. Protože $2^{-1} = 3$ v $\mathbb{Z}_5$, dostaneme $3 \cdot 2^{-1} \cdot x^2 = 3 \cdot 3 \cdot x^2 = 4x^2$. Využili jsme toho, že $3 \cdot 3 = 4$ v $\mathbb{Z}_5$.
Nyní spočteme „zpětnou korekci“, tj. vynásobíme $4x^2 \cdot (2x + 4) = 3x^3 + x^2$ v $\mathbb{Z}_5[x]$. Tuto zpětnou korekci odečteme od polynomu $3x^3 + 2x + 1$. Dostaneme $(3x^3 + 2x + 1) - (3x^3 + x^2) = 4x^2 + 2x + 1$. Protože stupeň polynomu $4x^2 + 2x + 1$ je větší než stupeň polynomu $2x + 4$, není polynom $4x^2 + 2x + 1$ zbytkem po dělení polynomem $2x + 4$. Algoritmus tedy musí pokračovat.
V dalším kole algoritmu máme tedy vydělit polynom $4x^2 + 2x + 1$ polynomem $2x + 4$ se zbytkem.
Zatím máme zapsáno

$$\begin{array}{rrrrrl} (& 3x^3 & & +2x & +1) & : \ (2x+4) = 4x^2 \\ -(& 3x^3 & +x^2) & & & \\ \hline & & 4x^2 & +2x & +1 & \end{array}$$

(2) Polynom $4x^2 + 2x + 1$ vydělíme polynomem $2x + 4$ se zbytkem analogicky bodu (1): vezmeme vedoucí členy $4x^2$ a $2x$, vydělíme je (dostaneme $2x$) a spočteme zpětnou korekci $2x \cdot (2x + 4) = 4x^2 + 3x$ a tuto zpětnou korekci odečteme od $4x^2 + 2x + 1$.
Dostaneme tak zápis

$$\begin{array}{rrrrrl} (& 3x^3 & & +2x & +1) & : \ (2x+4) = 4x^2 + 2x \\ -(& 3x^3 & +x^2) & & & \\ \hline & & 4x^2 & +2x & +1 & \\ & & -(4x^2 & +3x) & & \\ \hline & & & 4x & +1 & \end{array}$$

[3] *Připomenutí:* Hornerovo schéma lze bez jakýchkoli dalších úvah použít pouze pro dělení polynomem, který má koeficient u nejvyšší mocniny roven číslu 1.

Protože polynom $4x+1$ ještě není zbytek po dělení polynomem $2x+4$, pokračujeme dalším kolem algoritmu: polynom $4x+1$ máme vydělit polynomem $2x+4$ se zbytkem.

(3) Polynom $4x+1$ vydělíme polynomem $2x+4$ se zbytkem analogicky bodům (1) a (2). Dostaneme tak zápis

$$\begin{array}{rrrrrl}
(& 3x^3 & & +2x & +1) & : \ (2x+4) = 4x^2+2x+2 \\
-(& 3x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & & 4x^2 & +2x & +1 & \\
 & & -(4x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & & 4x & +1 & \\
 & & & -(4x & +3) & \\
\hline
 & & & & 3 &
\end{array}$$

Protože 3 *je* zbytkem po dělení polynomem $2x+4$, výpočet končí.

Rovnice dělení polynomu $3x^3+2x+1$ polynomem $2x+4$ se zbytkem v $\mathbb{Z}_5[x]$ je

$$(3x^3+2x+1) = \underbrace{(4x^2+2x+2)}_{\text{kvocient}} \cdot (2x+4) + \underbrace{3}_{\text{zbytek}}$$

1.3 Abstraktní binární operace

1.3.1 Problém Ať $\star$ je binární operace na množině X. Ať e_1, e_2 jsou prvky množiny X, pro které platí rovnosti

$$e_1 \star x = x \star e_1 = x \qquad e_2 \star x = x \star e_2 = x$$

pro všechna x z X. Potom platí[a] $e_1 = e_2$.

[a] To znamená: dokažte, že pokud $\star$ má neutrální prvek, potom je tento neutrální prvek jednoznačně určen.

✱ **Řešení problému 1.3.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pokud $\star$ má neutrální prvek, potom je jednoznačně určen.

✱ **Komentář k problému 1.3.1** Protože e_1 je neutrální prvek operace $\star$, platí rovnost $e_2 = e_1 \star e_2$. Protože e_2 je neutrální prvek $\star$, platí rovnost $e_1 \star e_2 = e_1$. Celkově platí $e_1 = e_2$, a to jsme chtěli dokázat.

1.3.2 Problém Na množině reálných čísel $\mathbb{R}$ je definována binární operace $\star$ následovně:

$$x \star y = x + y + x^2 y$$

(1) Ukažte, že operace $\star$ není komutativní.

(2) Ukažte, že operace $\star$ má jednoznačně určený neutrální prvek. Označte tento prvek jako e.

(3) Ukažte, že pro každé reálné číslo a existuje jediné reálné číslo[a] a_r takové, že platí $a \star a_r = e$.

(4) Ukažte, že existuje reálné číslo a takové, že rovnice $x \star a = e$ nemá řešení.[b]

[a] Číslu a_r se (z pochopitelných důvodů) říká *pravá inverse* prvku a.
[b] O čísle a pak říkáme, že nemá *levou inversi*.

✱ **Řešení problému 1.3.2**

(1) Například pro $a = 2$ a $b = 1$ platí $a \star b = 7$ a $b \star a = 5$. Rovnost $x \star y = y \star x$ tedy obecně neplatí.

(2) Platí $e = 0$.

(3) Platí $a_r = -\dfrac{a}{1+a^2}$.

(4) Například rovnice $x \star 1 = e$ nemá žádné řešení, tj. například $a = 1$ nemá levou inversi.

✱ **Komentář k problému 1.3.2**

(1) Například pro $a = 2$ a $b = 1$ platí $a \star b = 2 + 1 + 2^2 \cdot 1 = 7$ a $b \star a = 1 + 2 + 1^2 \cdot 2 = 5$. Rovnost $x \star y = y \star x$ tedy obecně neplatí.

(2) Hledáme reálné číslo e tak, aby pro všechna reálná čísla x platily rovnosti $x \star e = e \star x = x$. To znamená, že musí platit rovnosti

$$x = x \star e = x + e + x^2 e = x + (1 + x^2)e$$

a

$$x = e \star x = e + x + e^2 x$$

První rovnost lze upravit na rovnost $0 = (1+x^2) \cdot e$. Protože reálné číslo $1+x^2$ je vždy nenulové, musí platit $e = 0$. Protože platí

$$0 \star x = 0 + x + 0^2 x = x$$

je splněna i druhá rovnost a my jsme dokázali, že $e = 0$ je neutrální prvek operace $\star$. Podle Problému 1.3.1 je neutrální prvek jakékoli binární operace určen jednoznačně. To znamená, že $e = 0$ je jediný neutrální prvek operace $\star$.

(3) Ať a je libovolné reálné číslo. Chceme ukázat, že rovnice $a \star x = e$ má jediné řešení. Tato rovnice má tvar

$$a + (1 + a^2)x = a + x + a^2 x = a \star x = e = 0$$

a má jediné řešení

$$a_r = -\frac{a}{1 + a^2}$$

(4) Uvažujme o rovnici $x \star a = e$. Chceme nalézt a tak, aby tato rovnice neměla žádné řešení v $\mathbb{R}$. Rovnici $x \star a = e$ můžeme zapsat takto

$$\underbrace{x + a + x^2 a}_{=x\star a} = \underbrace{0}_{=e}$$

Zvolíme-li $a = 1$, dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 + x + 1 = 0$, která nemá řešení v $\mathbb{R}$. To znamená, že rovnice $x \star 1 = 0$ nemá řešení.

1.3.3 Problém Ať $X = \{a, b, c, d\}$. Na množině X je zadána binární operace $\star$ následovně:

$$x \star y = x$$

Zakreslete tabulku binární operace $\star$. Rozhodněte, zda $\star$ je asociativní binární operace.

✱ **Řešení problému 1.3.3** Tabulka operace $\star$ je:

$\star$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d

Operace $\star$ je asociativní (řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $\star$ je asociativní).

✱ **Komentář k problému 1.3.3** Podle definice vypadá tabulka operace $\star$ následovně:

$\star$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d

Pro jakákoli x, y, z z množiny X platí rovnosti

$$x \star (y \star z) = x \qquad (x \star y) \star z = x \star z = x$$

To znamená, že operace $\star$ je asociativní.

1.3.4 Problém Ať je binární operace $\star$ na množině X asociativní a ať má neutrální prvek e. Ať a je prvek množiny X. Ukažte: pokud pro prvky v, w z X platí rovnosti

$$a \star v = v \star a = e \qquad a \star w = w \star a = e$$

To znamená: dokažte, že pokud k a existuje inverse vzhledem k operaci $\star$, potom je jednoznačně určena.

✱ **Řešení problému 1.3.4** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pokud k a existuje inverse vzhledem k operaci $\star$, potom je jednoznačně určena.

✱ **Komentář k problému 1.3.4** Podle předpokladu platí rovnosti

$$v = v \star e = v \star (a \star w) = (v \star a) \star w = e \star w = w$$

1.3.5 Problém Ať je binární operace $\star$ na množině X asociativní a ať má neutrální prvek e. Ať p a b jsou prvky X. Ukažte, že pokud existují p^{-1} a b^{-1}, potom existuje i $(b \star p)^{-1}$ a platí rovnost[a] $(b \star p)^{-1} = p^{-1} \star b^{-1}$.

[a]Tomuto tvrzení se často říká *Socks & Shoes Theorem*. Z tohoto žertovného názvu plyne i návod důkazu: interpretujte součin $b \star p$ jako *nejdříve obleču ponožky* (prvek p), *potom obuji boty* (prvek b). Pak součin $b \star p$ znamená: *nejprve jsem oblékl ponožky a potom obul boty*. Kdy existuje inverse k $b \star p$? Zjevně přesně tehdy, když existují p^{-1} (mohu svléci ponožky) a b^{-1} (mohu zout boty). Jak vypadá $(b \star p)^{-1}$? Musím *nejprve* zout boty a *poté* svléci ponožky. To znamená, že platí $(b \star p)^{-1} = p^{-1} \star b^{-1}$.

✱ **Řešení problému 1.3.5** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pokud existují p^{-1} a b^{-1}, potom existuje i $(b \star p)^{-1}$ a platí rovnost $(b \star p)^{-1} = p^{-1} \star b^{-1}$.

✱ **Komentář k problému 1.3.5** Podle předpokladu platí rovnosti

$$p^{-1} \star p = e = p \star p^{-1} \qquad b^{-1} \star b = e = b \star b^{-1}$$

To znamená, že platí rovnosti

$$(p^{-1} \star b^{-1}) \star (b \star p) = p^{-1} \star (b^{-1} \star b) \star p = p^{-1} \star e \star p = p^{-1} \star p = e$$

a

$$(b \star p) \star (p^{-1} \star b^{-1}) = b \star (p \star p^{-1}) \star b^{-1} = b \star e \star b^{-1} = b \star b^{-1} = e$$

Tyto rovnosti ukazují, že $p^{-1} \star b^{-1}$ je inverse prvku $b \star p$. Podle Problému 1.3.4 je inverse určena jednoznačně. To znamená, že platí $(b \star p)^{-1} = p^{-1} \star b^{-1}$.

1.3.6 Problém Ať $\star$ je asociativní binární operace na množině X a ať e je neutrální prvek vzhledem k operaci $\star$. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(1) Pro každé a z X existuje inverse a^{-1} prvku a.

(2) Ať a a b jsou jakékoli prvky množiny X. Potom rovnice $a \star x = b$ má právě jedno řešení.

(3) Ať a je jakýkoli prvek množiny X. Rovnice $a \star x = e$ má právě jedno řešení.

✱ **Řešení problému 1.3.6** Řešením problému jsou správně vedené důkazy toho, že z (1) plyne (2), že ze (2) plyne (3), a že ze (3) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 1.3.6** Z (1) plyne (2). Zvolme jakékoli prvky a a b z množiny X. Potom platí rovnosti

$$a \star (a^{-1} \star b) = (a \star a^{-1}) \star b = e \star b = b$$

To znamená, že prvek $a^{-1} \star b$ je řešením rovnice $a \star x = b$. Ukážeme, že je to jediné řešení rovnice $a \star x = b$. Ať tedy v řeší rovnici $a \star x = b$. To znamená: ať platí $a \star v = b$. Potom platí rovnost $a^{-1} \star (a \star v) = a^{-1} \star b$. Levou stranu poslední rovnosti lze upravit:

$$a^{-1} \star (a \star v) = (a^{-1} \star a) \star v = e \star v = v$$

To znamená, že platí $v = a^{-1} \star b$. A to jsme chtěli dokázat.

Ze (2) plyne (3). To je triviální: z podmínky (2) okamžitě plyne, že rovnice $a \star x = e$ má jediné řešení.

Ze (3) plyne (1). Označme jako v jediné řešení rovnice $a \star x = e$. To znamená, že platí $a \star v = e$. Ukážeme, že platí i rovnost $v \star a = e$. Podle Problému 1.3.4 tím ukážeme, že $v = a^{-1}$.

Označme jako w jediné řešení rovnice $v \star x = e$. Potom platí rovnosti

$$e = v \star w = (v \star e) \star w = (v \star (a \star v)) \star w = (v \star a) \star (v \star w) = (v \star a) \star e = v \star a$$

1.4 Problémy s návodem k řešení

1.4.1 Problém

(1) Ať I a J jsou dvě neprázdné konečné disjunktní množiny, ať $\{r_i \mid i \in I\}$ a $\{r_i \mid i \in J\}$ jsou dvě konečné množiny reálných čísel. Dokažte, že platí rovnost

$$\sum_{i \in I \cup J} r_i = \sum_{i \in I} r_i + \sum_{i \in J} r_i$$

(2) Rovnost z bodu (1) rozšiřte na *libovolné* disjunktní konečné množiny I, J. Vysvětlete, že potom musí nutně platit rovnost

$$\sum_{i \in \emptyset} r_i = 0$$

✱ Řešení problému 1.4.1

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro dvě neprázdné konečné disjunktní množiny I, J a dvě konečné množiny reálných čísel $\{r_i \mid i \in I\}$ a $\{r_i \mid i \in J\}$ platí rovnost

$$\sum_{i \in I \cup J} r_i = \sum_{i \in I} r_i + \sum_{i \in J} r_i$$

(2) Řešením problému je vysvětlení rovnosti

$$\sum_{i \in \emptyset} r_i = 0$$

✱ Návod k řešení problému 1.4.1 Pro důkaz rovnosti v bodě (1) využijte vlastností sčítání reálných čísel: sčítání reálných čísel je komutativní a asociativní binární operace.

Návod k bodu (2): má-li rovnost

$$\sum_{i \in I \cup J} r_i = \sum_{i \in I} r_i + \sum_{i \in J} r_i$$

platit pro libovolné konečné disjunktní množiny I a J, potom musí pro libovolnou jednoprvkovou množinu $I = \{i_0\}$ platit rovnost

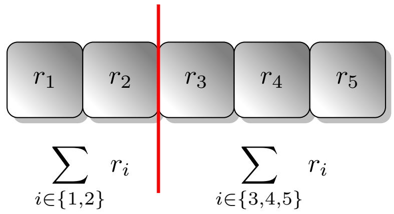
$$r_{i_0} = \sum_{i \in I} r_i = \sum_{i \in I \cup \emptyset} r_i = \sum_{i \in I} r_i + \sum_{i \in \emptyset} r_i = r_{i_0} + \sum_{i \in \emptyset} r_i$$

To znamená, že součet $\sum_{i \in \emptyset} r_i$ je neutrální prvek vzhledem ke sčítání. Nyní použijte první část důkazu Problému 1.1.1 nebo Problém 1.3.1.

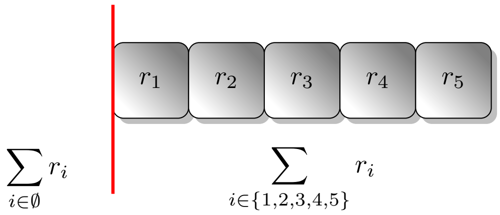
Poznámka: rovnost $\sum_{i \in \emptyset} r_i = 0$ lze intuitivně vysvětlit i následovně. Zvolme (například) pět reálných čísel r_1, r_2, r_3, r_4 a r_5. Součet lze uzávorkovat například takto:

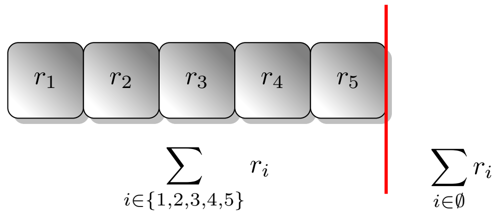
$$(r_1 + r_2) + (r_3 + r_4 + r_5)$$

a to jde znázornit i „rozdělením“ pole r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 na dvě části



„Dělicí čára“ ovšem může být vedena i úplně nalevo od pole r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 nebo úplně napravo od pole r_1, r_2, r_3, r_4, r_5





Protože celkový součet umístěním dělicí čáry nezměníme, jde o další vysvětlení toho, že je účelné definovat součet $\sum\limits_{i\in\emptyset} r_i$ jako číslo 0. Podobné vysvětlení lze použít i v Problémech 1.4.2 a 1.4.9.

1.4.2 Problém Pro neprázdnou konečnou množinu $\{r_i \mid i \in I\}$ reálných čísel označte jako

$$\prod_{i\in I} r_i$$

součin všech prvků množiny $\{r_i \mid i \in I\}$. Vysvětlete, proč je vhodné definovat

$$\prod_{i\in\emptyset} r_i = 1$$

✱ **Řešení problému 1.4.2** Řešením problému je smysluplná argumentace vedoucí k definici

$$\prod_{i\in\emptyset} r_i = 1$$

✱ **Návod k řešení problému 1.4.2** Postupujte analogicky řešení Problému 1.4.1: místo se sčítáním reálných čísel pracujte s násobením reálných čísel.

1.4.3 Problém Ukažte, že pro všechna přirozená čísla n platí rovnost $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Dejte této rovnosti kombinatorický význam.

✱ **Řešení problému 1.4.3** Řešením problému je správně vedený důkaz rovnosti $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pro všechna přirozená čísla n.

Kombinatorický význam: počet všech podmnožin n-prvkové množiny je roven součtu počtu všech jejích k-prvkových podmnožin, pro k od 0 do n.

✱ **Návod k řešení problému 1.4.3** Použijte Problém 1.1.10 pro $a = 1$ a $b = 1$.

Kombinatorický význam: číslo 2^n udává počet všech podmožin n-prvkové množiny, číslo $\binom{n}{k}$ udává počet všech k-prvkových množin n-prvkové množiny. To znamená, že rovnost $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ říká: počet všech podmnožin n-prvkové množiny je roven součtu počtu všech jejích k-prvkových podmnožin, pro k běžící od 0 do n.

1.4.4 Problém Ukažte, že na množině čísel $\mathbb{Z}_7$ *nelze* definovat binární relaci $<$ tak, aby platily následující tři podmínky:[a]

(1) Pro každé x ze $\mathbb{Z}_7$ platí právě jedno z následujících: $0 < -x$, $x = 0$, $0 < x$.

(2) Jestliže $0 < x$ a $0 < y$, potom $0 < x + y$.

(3) Jestliže $0 < x$ a $0 < y$, potom $0 < x \cdot y$.

[a] Dokážete tak, že těleso $\mathbb{Z}_7$ *nelze* uspořádat.

✱ **Řešení problému 1.4.4** Řešením je správně vedený důkaz nemožnosti existence binární relace $<$ na množině $\mathbb{Z}_7$, která má všechny tři uvedené vlastnosti.

✱ **Návod k řešení problému 1.4.4** Předpokládejte, že na množině $\mathbb{Z}_7$ *existuje* binární relace $<$, která má všechny tři uvedené vlastnosti. Odvoďte spor podle následujícího návodu:

(i) Ukažte, že musí platit $0 < 1$. K tomu využijte vlastnosti (1), (3) a faktu, že $(-1) \cdot (-1) = 1$ v $\mathbb{Z}_7$.

(ii) Využijte předchozí bod (i) a vlastnost (2) k tomu, abyste dokázali, že $0 < \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}_{=0}$ v $\mathbb{Z}_7$. Platnost $0 < 0$ v $\mathbb{Z}_7$ je ve sporu s vlastností (1).

Ukázali jsme, že na množině $\mathbb{Z}_7$ nemůže existovat binární relace $<$, která má vlastnosti (1)–(3).

1.4.5 Problém Nalezněte dva různé polynomy $a(x)$ a $b(x)$ v $\mathbb{Z}_2[x]$, pro které jsou funkce $x \mapsto a(x)$ a $x \mapsto b(x)$ ze $\mathbb{Z}_2$ do $\mathbb{Z}_2$ stejné.[a]

[a] Tento problém vysvětluje, proč obecně *nelze* polynom definovat jako funkci.

✱ **Řešení problému 1.4.5** Například pro $a(x) = x$ a $b(x) = x^2$ v $\mathbb{Z}_2[x]$ platí:

$$a(0) = b(0) = 0 \quad \text{a} \quad a(1) = b(1) = 1$$

Polynomy $a(x)$ a $b(x)$ jsou různé, protože mají různý stupeň.

✱ **Návod k řešení problému 1.4.5** Spočtěte funkční hodnoty polynomů v $\mathbb{Z}_2[x]$ pro malé stupně.

1.4.6 Problém Ukažte, že polynom $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ má kořen $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

✱ **Řešení problému 1.4.6** Řešení problému je výpočet $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^4 - 10 \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 + 1 = 0$.

✱ **Návod k řešení problému 1.4.6** Dosaďte reálné číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ do výrazu $x^4 - 10x^2 + 1$. Využijte při tom známé vzorce pro druhou a čtvrtou mocninu dvoučlenu, viz také Problém 1.1.10.

1.4.7 Problém Ať $p(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$ je polynom z $\mathbb{R}[x]$, o kterém víte, že má alespoň jeden celočíselný kořen. Dokažte, že v $\mathbb{R}[x]$ platí rovnost $p(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)^2$. To jest: ukažte, že polynom $p(x)$ má kořen 2 násobnosti 1 a kořen -3 násobnosti 2.

✱ **Řešení problému 1.4.7** Řešením problému je smysluplná argumentace, která ukáže, že v $\mathbb{R}[x]$ platí rovnost $p(x) = (x - 2) \cdot (x + 3)^2$.

✱ **Návod k řešení problému 1.4.7** Postupujte podobně jako v Problému 1.2.3: protože polynom $p(x)$ má celočíselné koeficienty a protože koeficient u nejvyšší mocniny v polynomu $p(x)$ je roven 1, musí pro celočíselný kořen a polynomu $p(x)$ platit: číslo a dělí číslo -18 v oboru celých čísel.

Díky této úvaze ukažte, že pro celočíselný kořen a polynomu $p(x)$ musí platit

$$a = \pm 1 \quad \text{nebo} \quad a = \pm 2 \quad \text{nebo} \quad a = \pm 3 \quad \text{nebo} \quad a = \pm 6 \quad \text{nebo} \quad a = \pm 9 \quad \text{nebo} \quad a = \pm 18$$

Hodnoty $p(a)$ spočtěte Hornerovým schématem. Vyjde (například) $p(-3) = 0$ a příslušné Hornerovo schéma

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -3 & -18 \\ x = -3 & & -3 & -3 & 18 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

dá rozklad $p(x) = (x+3) \cdot (x^2 + x - 6)$. Kvadratickou rovnici $x^2 + x - 6 = 0$ vyřešte obvyklým způsobem: vyjdou kořeny -3 a 2.

1.4.8 Problém Polynom $a(x) = 5x^4 + 4x^3 + 2x + 4$ vydělte v $\mathbb{Z}_7[x]$ polynomem $b(x) = 4x^2 + 6x + 2$ se zbytkem. Výsledek zapište jako rovnici dělení se zbytkem v $\mathbb{Z}_7[x]$.

✱ **Řešení problému 1.4.8** V $\mathbb{Z}_7[x]$ platí rovnost

$$(5x^4 + 4x^3 + 2x + 4) = \underbrace{(3x^2 + 2)}_{\text{kvocient}} \cdot (4x^2 + 6x + 2) + \underbrace{(4x)}_{\text{zbytek}}$$

✱ **Návod k řešení problému 1.4.8** Postupujte analogicky řešení Problému 1.2.6.

1.4.9 Problém Ať $\star$ je binární operace na množině X, která je komutativní, asociativní, a která má neutrální prvek e. To jest: ať platí rovnosti

$$x \star y = y \star x \qquad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z \qquad x \star e = x = e \star x$$

pro všechna x, y, z, z množiny X.

Pro neprázdnou konečnou množinu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ prvků množiny X definujte

$$\mathop{\star}_{i \in \{1,\ldots,n\}} x_i = x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_n$$

Vysvětlete, proč je vhodné definovat[a]

$$\mathop{\star}_{i \in \emptyset} x_i = e$$

[a] To jest: jedná se o zobecnění Problémů 1.4.1 a 1.4.2.

✱ **Řešení problému 1.4.9** Řešením problému je smysluplná argumentace vedoucí k definici

$$\mathop{\star}_{i \in \emptyset} x_i = e$$

✱ **Návod k řešení problému 1.4.9** Postupujte analogicky řešení Problémů 1.4.1 a 1.4.2; místo s operacemi sčítání a násobení reálných čísel pracujte s operací $\star$.

Téma 2

Základy 2D a 3D geometrie

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: různé popisy přímek v $\mathbb{R}^2$ a přímek a rovin v $\mathbb{R}^3$. Jde převážně o opakování středoškolské geometrie v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$.

2.1 Přímky v rovině $\mathbb{R}^2$

2.1.1 Problém V rovině $\mathbb{R}^2$ je dvěma body $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ zadána přímka $\boldsymbol{\pi}$.[a]

(1) Nalezněte parametrický popis přímky $\boldsymbol{\pi}$. To jest: body $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ na přímce $\boldsymbol{\pi}$ popište jako body tvaru $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Ukažte, že parametr t je jednoznačně určen bodem $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a že alespoň jedno z čísel s_1, s_2 musí být nenulové..

(2) Nalezněte obecnou rovnici přímky $\boldsymbol{\pi}$. To jest: body $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ na přímce $\boldsymbol{\pi}$ popište jako body splňující rovnost $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, kde a_1, a_2, b jsou reálná čísla. Ukažte, že alespoň jedno z čísel a_1, a_2 musí být nenulové.

(3) Nalezněte normálovou rovnici přímky $\boldsymbol{\pi}$. To jest: nalezněte bod $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ a reálná čísla a_1, a_2 tak, že body $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ na přímce $\boldsymbol{\pi}$ splňují rovnost $a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2) = 0$. Ukažte, že alespoň jedno z čísel a_1, a_2 musí být nenulové.

[a] Pro B0B01LAG(A): porovnejte tento problém s (například) Problémem 14.1.1.

✱ **Řešení problému 2.1.1**

(1) Platí například: každý bod na přímce $\boldsymbol{\pi}$ je ve tvaru

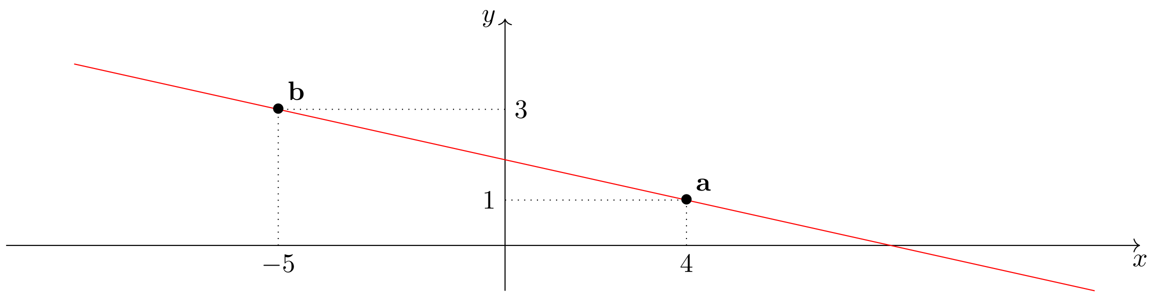
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pro jednoznačně určené reálné číslo t.

(2) Hledaná obecná rovnice přímky $\boldsymbol{\pi}$ je (například) $2x_1 + 9x_2 = 17$.

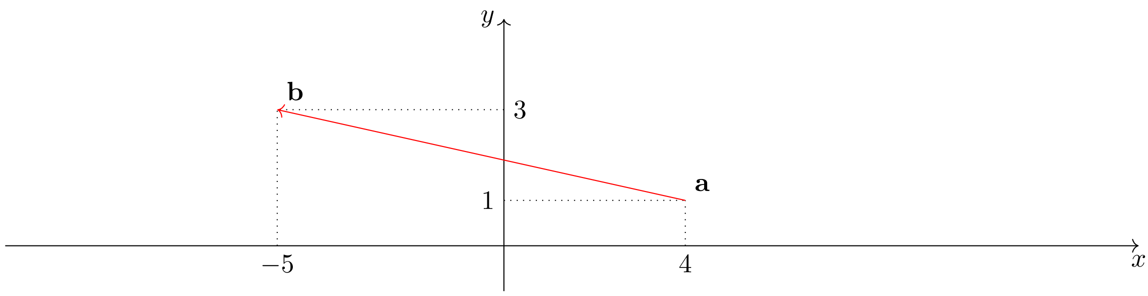
(3) Hledaná normálová rovnice přímky $\boldsymbol{\pi}$ je (například) $2(x_1 - 4) + 9(x_2 - 1) = 0$.

✱ **Komentář k problému 2.1.1** Nejprve nakresleme obrázek: hledaná přímka $\boldsymbol{\pi}$, určená body **a** a **b**, má graf

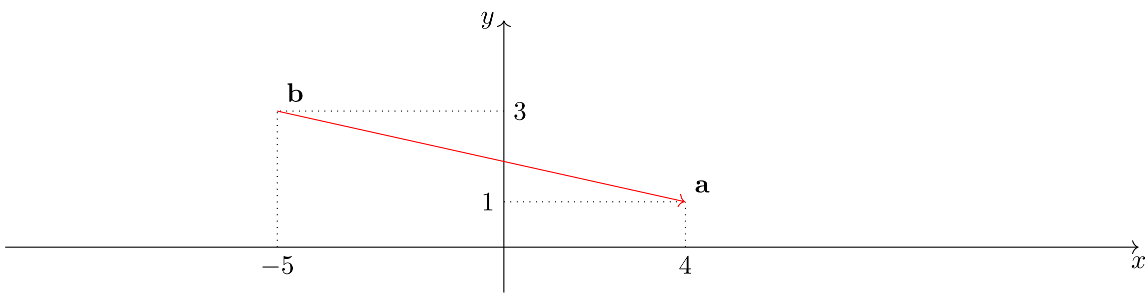


(1) Parametrický popis přímky souvisí s nalezením *směru* **s** přímky a *volbou* jednoho bodu **p** přímky. Tento bod **p** budeme považovat za „počátek“ přímky. Jednotlivé body přímky pak budeme popisovat jako výrazy $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{s}$, kde t je reálné číslo. Bod tvaru $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{s}$ je bod, ve kterém jsme, když „necháme uplynout čas“ t při pohybu z bodu **p** ve směru **s**.

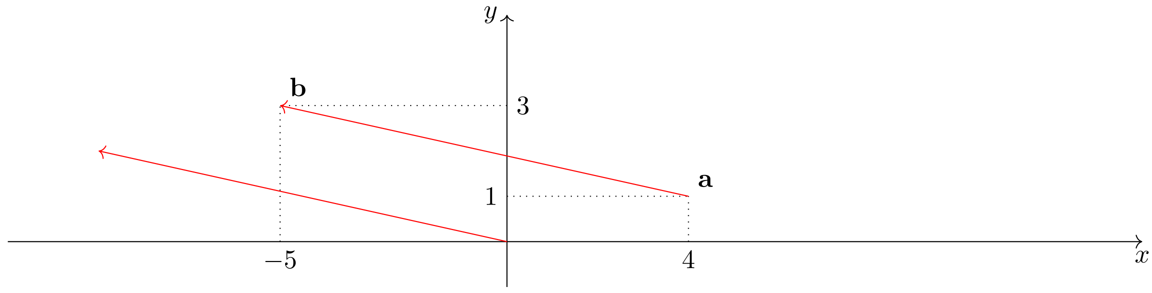
(a) Nalezení směru **s**. Směr zadané přímky je orientovaná úsečka spojující body **a** a **b**. Můžeme vybrat směr „od **a** k **b**“



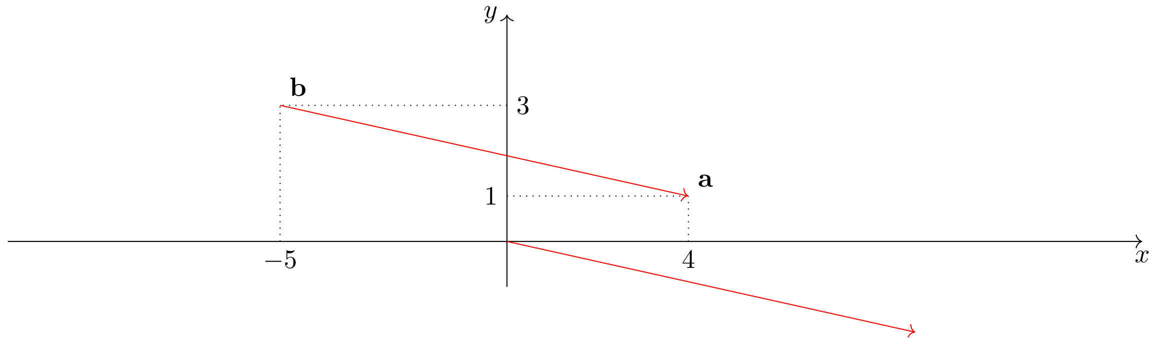
nebo směr „od **b** k **a**“



Všimněme si, že ani v jednom z případů *nemá* příslušná orientovaná úsečka *počátek v bodě* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zatím tedy *nemůžeme mluvit o směrovém vektoru*. V obou případech musíme *posunout* orientované úsečky *paralelně* tak, aby v bodě $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ počátek měly. Získáme tak



nebo



Všimněme si, že v prvním případě mluvíme o *vektoru*

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

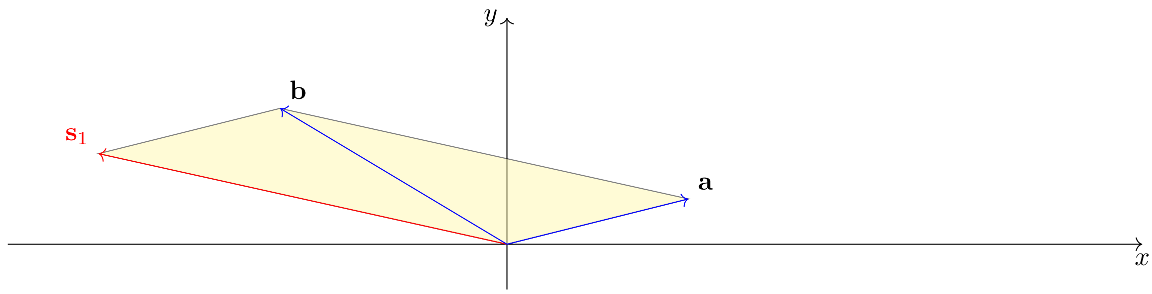
a ve druhém případě o *vektoru*

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

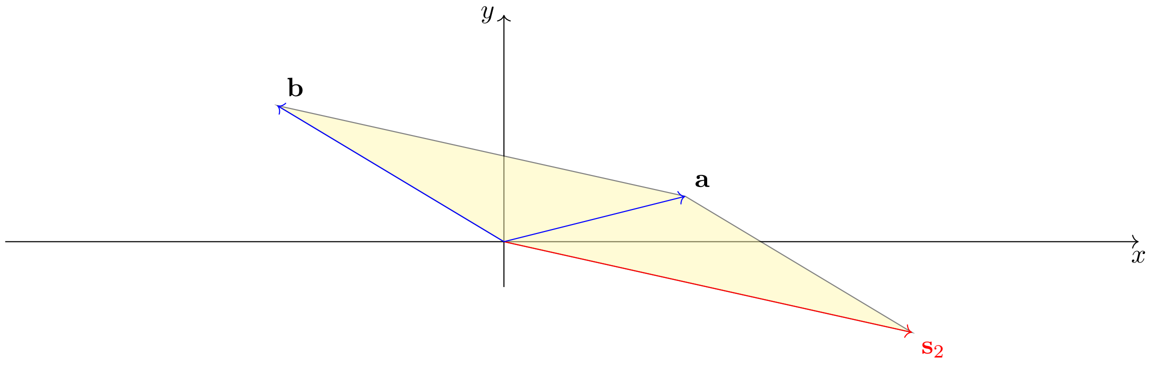
O tom se lze snadno přesvědčit výpočty

$$\mathbf{a} + \mathbf{s}_1 = \mathbf{b} \quad \text{a} \quad \mathbf{b} + \mathbf{s}_2 = \mathbf{a}$$

nebo obrázky



a



To znamená: směr zadané přímky *není určen jako vektor jednoznačně*; máme přinejmenším dvě možnosti. Zvolme jednu z nich, například

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) Na zadané přímce určitě leží body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Každý z těchto bodů tedy můžeme zvolit jako „počátek" $\mathbf{p}$ zadané přímky. Zvolme

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

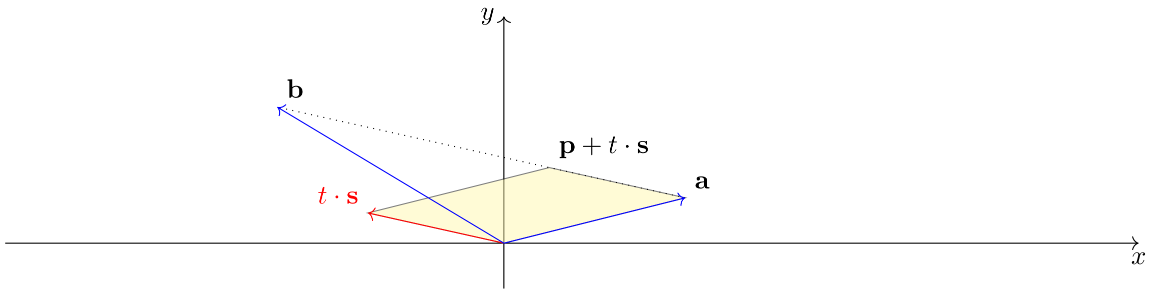
Tvrdíme, že každý bod na zadané přímce lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{s}$$

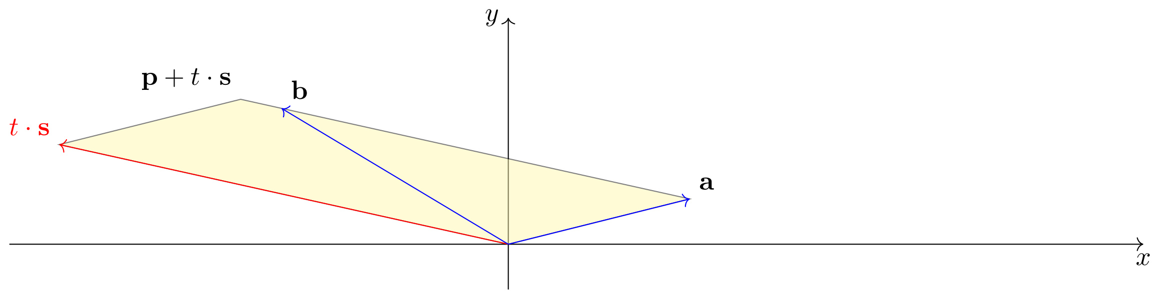
pro jednoznačně určené reálné číslo t.
Než to dokážeme, uvědomme si, že jsme zvolili $\mathbf{p} = \mathbf{a}$ a $\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. To znamená, že platí rovnosti

$$\mathbf{p} + 0 \cdot \mathbf{s} = \mathbf{a} \quad \text{a} \quad \mathbf{p} + 1 \cdot \mathbf{s} = \mathbf{b}$$

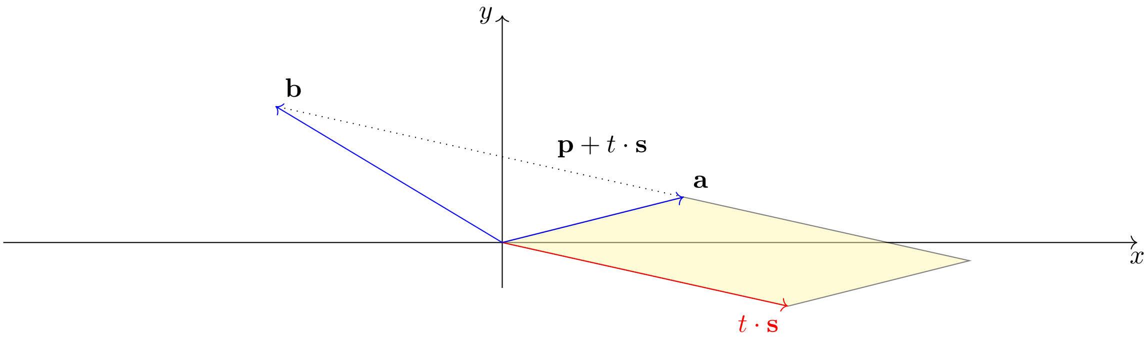
které lze interpretovat takto: v „čase" $t = 0$ jsme v bodě $\mathbf{a}$ a v „čase" $t = 1$ jsme (ve směru $\mathbf{s}$) přešli do bodu $\mathbf{b}$. Podobně budeme interpretovat body tvaru $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{s}$ pro obecné reálné číslo t.
Jak vypadá obecný bod tvaru $\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{s}$? Pro $1 > t > 0$ jde o bod tvaru



pro $t > 1$ jde o bod tvaru



a pro $t < 0$ jde o bod tvaru



V každém z případů leží bod $\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{s}$ na přímce určené body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, protože bod $\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{s}$ je vrcholem čtyřúhelníku, který má jednu stranu rovnu vektoru $\mathbf{a}$ a druhá strana je *násobkem* vektoru $\mathbf{s}$.
Obráceně: pokud bod $\mathbf{x}$ leží na přímce určené body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, potom lze jednoznačně nalézt reálné číslo t tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\cdot\mathbf{s}$. Bod $\mathbf{x}$ totiž musí být vrcholem čtyřúhelníku, který má jednu stranu rovnu vektoru $\mathbf{a}$ a jehož druhá strana je *násobkem* vektoru $\mathbf{s}$.

Ukázali jsme, že směrová rovnice přímky $\boldsymbol{\pi}$ určené body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je (například)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kde t je reálné číslo. Žádná z položek směrového vektoru $\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ není rovna nule.

(2) Na přímce $\boldsymbol{\pi}$ určené body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ leží určitě body $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pro hledaná čísla a_1, a_2 a b tedy musí platit rovnosti

$$a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 1 = b \qquad \text{a} \qquad a_1 \cdot (-5) + a_2 \cdot 3 = b$$

Intuitivně se zdá, že *jedno z čísel* a_1, a_2 a b *smíme zvolit* (a *zbývající dvě čísla dopočítat*). Smíme zvolit číslo b? Zkusme to a zvolme $b = 0$. Dostáváme tedy

$$a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 1 = 0 \qquad \text{a} \qquad a_1 \cdot (-5) + a_2 \cdot 3 = 0$$

a proto platí $a_1 = 0$ a $a_2 = 0$. Hledaná rovnice je tedy

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

které vyhovují *všechny* body $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ v rovině. Problém jsme tedy *nevyřešili*, protože rovnice $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$ *nepopisuje* body ležící přesně na přímce $\boldsymbol{\pi}$.
Smíme zvolit $b = 1$? Dostáváme soustavu rovností

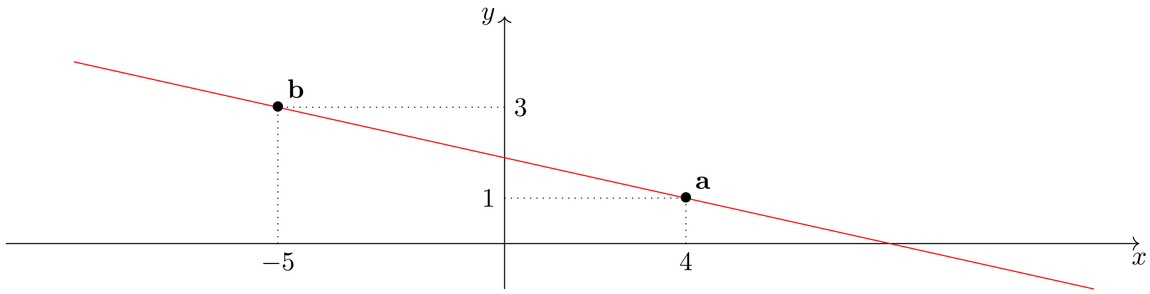
$$a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 1 = 1 \qquad \text{a} \qquad a_1 \cdot (-5) + a_2 \cdot 3 = 1$$

která má *jediné* řešení $a_1 = 2/17$ a $a_2 = 9/17$. Jak ale zjistit, že body popsané rovnicí

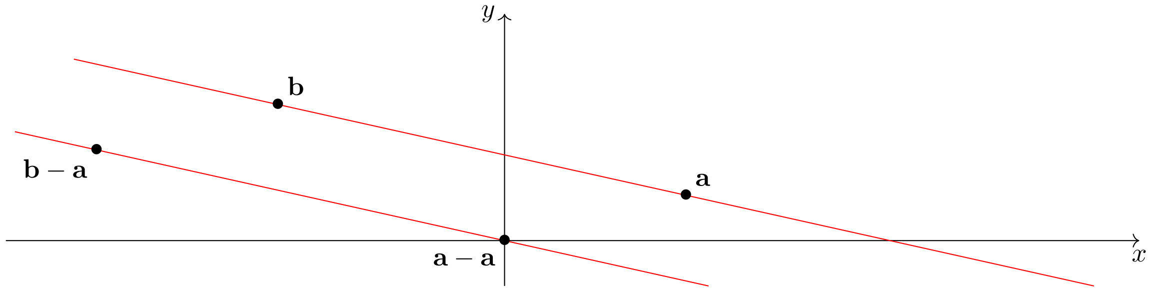
$$\frac{2}{17}x_1 + \frac{9}{17}x_2 = 1$$

opravdu popisují všechny body na přímce $\boldsymbol{\pi}$? Potřebujeme *koncepční* a *geometrický* pohled na zadaný problém.

Přímku $\boldsymbol{\pi}$ určenou body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$



nejprve *paralelně posuneme* tak, aby procházela počátkem. To znamená, budeme studovat přímku, určenou body $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ a $\mathbf{a}-\mathbf{a}$:



Protože

$$\mathbf{b}-\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lze úvahou, analogickou bodu (1), zjistit, že body na takto posunuté přímce jsou přesně body tvaru

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

neboli

$$p_1 = -9t \quad \text{a} \quad p_2 = 2t$$

kde t je reálné číslo. Takové body jsou ale *přesně* ty body $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, pro které platí rovnost

$$2p_1 + 9p_2 = 0$$

To je pravda: pokud $p_1 = -9t$ a $p_2 = 2t$, potom $2p_1 + 9p_2 = -18t + 18t = 0$. Obráceně: pokud platí $2p_1 + 9p_2 = 0$, potom lze jednoznačně určit t tak, že $p_1 = -9t$ a $p_2 = 2t$. Takže: rovnice $2p_1 + 9p_2 = 0$ popisuje přesně body na přímce $\boldsymbol{\pi}$ *paralelně posunuté do počátku*.

Nyní musíme provést *zpětné paralelní posunutí*: přímka $\boldsymbol{\pi}$ obsahuje přesně body tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+p_1 \\ 1+p_2 \end{pmatrix}$$

kde $2p_1 + 9p_2 = 0$. Pro takové body platí rovnost

$$2 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 2 \cdot (4+p_1) + 9 \cdot (1+p_2) = 8 + 9 + \underbrace{2p_1 + 9p_2}_{=0} = 17$$

Hledaná obecná rovnice přímky[1] je $2x_1 + 9x_2 = 17$.

[1]Pochopitelně: jedná se v podstatě o rovnici $\frac{2}{17}x_1 + \frac{9}{17}x_2 = 1$, kterou jsme nalezli dříve.

(3) Pro nalezení normálové rovnice máme již vše připraveno: díky bodu (2) víme, že přímka $\boldsymbol{\pi}$ obsahuje přesně body tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + p_1 \\ 1 + p_2 \end{pmatrix}$$

kde $2p_1 + 9p_2 = 0$. To znamená, že přímka $\boldsymbol{\pi}$ obsahuje přesně body $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pro které platí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \text{kde } 2p_1 + 9p_2 = 0.$$

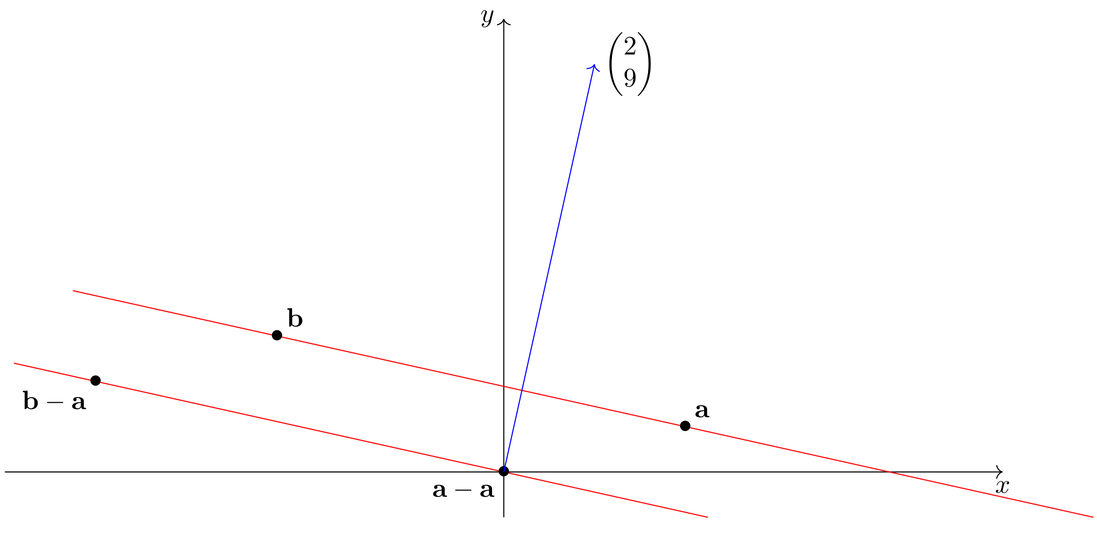
Zapsáno jinak: přímka $\boldsymbol{\pi}$ obsahuje přesně body $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pro které platí rovnost

$$2(x_1 - 4) + 9(x_2 - 1) = 0$$

Poznámka. Geometrický význam rovnic v části (2) a (3) je následující.[2] Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

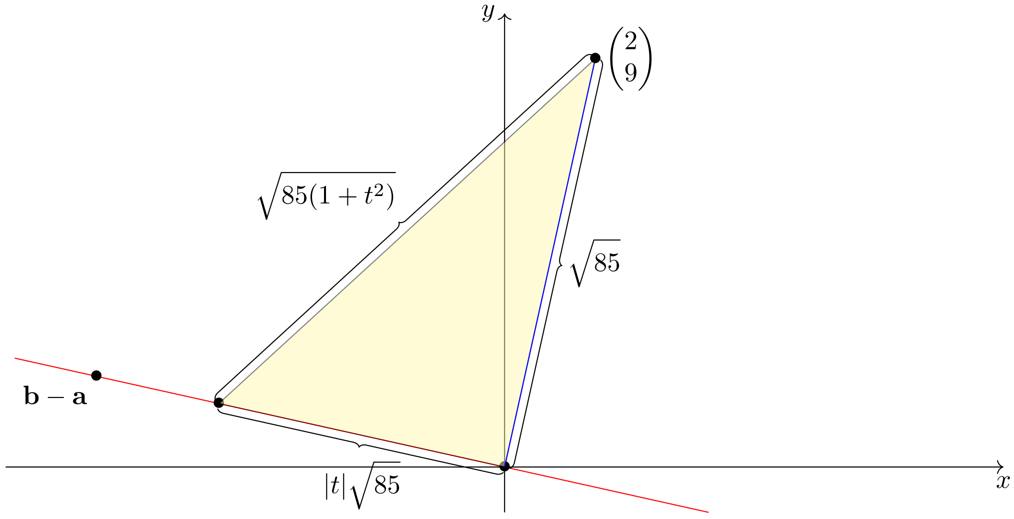
je vektor, který je *kolmý* na přímku $\boldsymbol{\pi}$ posunutou do počátku:



To lze zjistit například pomocí *Pythagorovy věty*: bod tvaru $\begin{pmatrix} -9t \\ 2t \end{pmatrix}$ spolu s body $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ určuje

[2] Plně tomuto významu budeme rozumět až po zavedení standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^2$.

trojúhelník



a pro čtverce délek jeho stran platí rovnost

$$(1+t^2)\cdot 85 = 85 + t^2\cdot 85$$

Podle (obrácené) Pythagorovy věty, viz Problém 2.3.1, je tedy úhel proti nejdelší straně roven $\pi/2$. To znamená, že koeficienty 2 a 9 z rovnice $2x_1 + 9x_2 = \dots$ tvoří *normálový vektor* přímky $\boldsymbol{\pi}$.

2.1.2 Problém Určete průsečík dvou přímek v $\mathbb{R}^2$, které jsou zadány rovnicemi

$$2x - 4y = 2 \quad \text{a} \quad 2x + 4y = 2$$

pokud takový průsečík existuje.

✱ **Řešení problému 2.1.2** Hledaný průsečík je bod $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 2.1.2** Chceme najít bod $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, který splňuje soustavu rovnic

$$2x_0 - 4y_0 = 2 \quad \text{a} \quad 2x_0 + 4y_0 = 2$$

Sečtením obou rovnic je vidět, že musí platit $4x_0 = 4$, neboli $x_0 = 1$. Díky první rovnici to znamená, že $4y_0 = 2x_0 - 2 = 0$. Tedy $y_0 = 0$. Žádný jiný společný bod dvě přímky

$$2x - 4y = 2 \quad \text{a} \quad 2x + 4y = 2$$

nemají.

2.1.3 Problém V $\mathbb{R}^2$ jsou rovnicemi

$$2x + 4y = 2 \quad \text{a} \quad x - y = 2$$

zadány dvě přímky. Zjistěte vztah průsečíku těchto dvou přímek a průsečíku přímek

$$6y = -2 \quad \text{a} \quad x - y = 2$$

Druhá dvojice přímek vzešla z první dvojice přímek takto:

(1) Odečteme „dvojnásobek druhé přímky“ od přímky první.

(2) Druhou přímku ponecháme beze změny.

✱ **Řešení problému 2.1.3** Obě dvojice přímek mají *stejný* průsečík $\begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 2.1.3** Ať bod $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ je průsečíkem první dvojice přímek

$$2x + 4y = 2 \quad \text{a} \quad x - y = 2$$

To znamená: ať platí

$$2x_0 + 4y_0 = 2 \quad \text{a} \quad x_0 - y_0 = 2$$

Potom platí $2(x_0 - y_0) = 2 \cdot 2$ (tj. bod $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ leží na „dvojnásobku druhé přímky“). Dále, odečtením dostaneme

$$(2x_0 + 4y_0) - 2(x_0 - y_0) = 2 - 2 \cdot 2$$

neboli

$$6y_0 = -2$$

To znamená, že bod $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ je průsečíkem druhé dvojice přímek

$$6y = -2 \quad \text{a} \quad x - y = 2$$

Obráceně: ať bod $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ je průsečíkem druhé dvojice přímek

$$6y = -2 \quad \text{a} \quad x - y = 2$$

To znamená, ať platí

$$6y_0 = -2 \quad \text{a} \quad x_0 - y_0 = 2$$

Potom platí $2(x_0 - y_0) = 2 \cdot 2$ (to je „dvojnásobek druhé přímky“) a platí tedy rovnost („sečtení přímek“) $2x_0 + 4y_0 = 2$. To znamená, že bod $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ je průsečíkem první dvojice přímek

$$2x + 4y = 2 \quad \text{a} \quad x - y = 2$$

Poznámka. Toto pozorování (v daleko obecnější podobě) je základem rozumné metody řešení soustav lineárních rovnic. Viz Téma 8.

2.1.4 Problém Ať $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ jsou po dvou různé body v $\mathbb{R}^2$. Nalezněte podmínku, která říká, že všechny tři body leží na jedné přímce.

✱ **Řešení problému 2.1.4** Body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ leží na jedné přímce právě tehdy, když existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že platí rovnost $\mathbf{c} = (1 - t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$.

✱ **Komentář k problému 2.1.4** Protože body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ jsou po dvou různé, stačí nalézt podmínku, která říká, že bod $\mathbf{c}$ leží na přímce určené body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Podobně jako v Problému 2.1.1 lze ukázat, že bod $\mathbf{c}$ leží na přímce určené body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ právě tehdy, když existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že platí rovnost

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + t \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Jinými slovy: bod $\mathbf{c}$ leží na přímce určené body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ právě tehdy, když existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že platí rovnost

$$\mathbf{c} = (1 - t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$$

2.2 Přímky a roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$

2.2.1 Problém V $\mathbb{R}^3$ jsou dány body $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Nalezněte parametrickou rovnici přímky $\boldsymbol{\pi}$, určené body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. To jest, analogicky Problému 2.1.1 nalezněte bod $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ a vektor $\mathbf{s} = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}$ tak, že přímka $\boldsymbol{\pi}$ obsahuje přesně body tvaru

$$\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{s}$$

kde t je reálné číslo.

✱ **Řešení problému 2.2.1** Parametrická rovnice přímky $\boldsymbol{\pi}$ je

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

✱ **Komentář k problému 2.2.1** Budeme postupovat podobně jako v Problému 2.1.1 (kreslete si obrázek): směr přímky je dán vektorem (například)

$$\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Za „počátek“ přímky zvolíme

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Parametrická rovnice dané přímky je tedy

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

kde $t \in \mathbb{R}$.

Důležitá poznámka. Zjistili jsme, že parametrické rovnice přímek v $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ se hledají zcela analogicky. Lze očekávat, že parametrické rovnice přímek se budou hledat podobně i v prostorech vyšší dimense.

Existují *obecná* rovnice přímky v $\mathbb{R}^3$ a *normálová* rovnice přímky v $\mathbb{R}^3$? Ano, existují. Budou mít však podobu jisté *soustavy dvou lineárních rovnic*. Tato soustava bude popisovat přímku jako průsečík dvou rovin.

2.2.2 Problém V $\mathbb{R}^3$ jsou zadány body $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ a $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Tyto tři body určují rovinu $\boldsymbol{\pi}$ v $\mathbb{R}^3$.

(1) Nalezněte parametrickou rovnici roviny $\boldsymbol{\pi}$.

(2) Nalezněte obecnou rovnici roviny $\boldsymbol{\pi}$.

✱ **Řešení problému 2.2.2**

(1) Hledaná parametrická rovnice roviny $\boldsymbol{\pi}$ je (například)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

kde t_1 a t_2 jsou reálná čísla.

(2)

✱ Komentář k problému 2.2.2

(1) Parametrickou rovnici roviny $\boldsymbol{\pi}$ očekáváme ve tvaru

$$\mathbf{p} + t_1 \cdot \mathbf{s}_1 + t_2 \cdot \mathbf{s}_2$$

kde $\mathbf{p}$ je bod, kterým rovina $\boldsymbol{\pi}$ prochází, a seznam $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ je „směr“ roviny $\boldsymbol{\pi}$.[3] Co chceme od „směru“ $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$? Vektory $\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_2$ *nesmí ležet na jedné přímce*. Směr nalezneme snadno: trojici bodů $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ „posuneme do počátku“, tj. z trojice $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ nejprve vytvoříme trojici $(\mathbf{a}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})$ a vybereme *nenulové* vektory

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Vektory $\mathbf{s}_1$ a $\mathbf{s}_2$ na jedné přímce neleží. Proto je seznam $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ možným směrem roviny $\boldsymbol{\pi}$. Za „počátek“ roviny $\boldsymbol{\pi}$ vybereme

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Hledaná parametrická rovnice roviny $\boldsymbol{\pi}$ je (například)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

kde t_1 a t_2 jsou reálná čísla.

(2) Obecnou rovnici roviny očekáváme ve tvaru

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla. Protože body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ musí v rovině $\boldsymbol{\pi}$ ležet, musí platit rovnosti

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = d \qquad a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = d \qquad a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = d$$

Naštěstí je vidět, že volba $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ a $d = 2$ vede k cíli. V bodoucnu si ale podobné hádání nebudeme moci dovolit: pro hledání obecných rovnic rovin v $\mathbb{R}^3$ *potřebujeme umět řešit soustavy lineárních rovnic*. To se naučíme v Tématu 8.

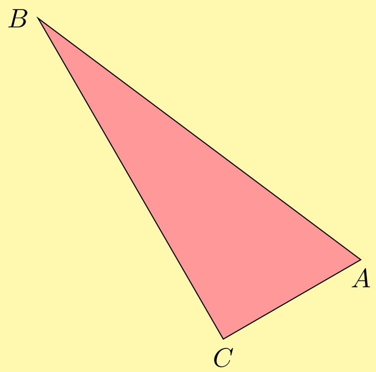
[3] Například rovina $z = 3$ v $\mathbb{R}^3$ (tj. „rovina podstavy, zvednutá o 3“) prochází například bodem $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ a má směr určený dvojicí vektorů $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

2.3 Problémy s návodem k řešení

2.3.1 Problém Ať $\triangle ABC$ je trojúhelník v rovině, pro který platí rovnost

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

Potom je trojúhelník $\triangle ABC$ pravoúhlý a pravý úhel je u vrcholu C.[a] Viz obrázek:



Při důkazu smíte použít klasickou Pythagorovu větu pro pravoúhlé trojúhelníky.

[a] Z pochopitelných důvodů se tomuto tvrzení říká *obrácení* Pythagorovy věty. Pokud jste zneklidněni, že při důkazu používáme Pythagorovu větu, pak vězte, že výsledek lze dokázat i *bez použití* Pythagorovy věty. Důkaz je pak ovšem poněkud těžší, viz článek Stephen Casey, The converse of the theorem of Pythagoras, *The Mathematical Gazette* 92.524 (2008), 309–313.

✱ **Řešení problému 2.3.1** Řešením problému je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Návod k řešení problému 2.3.1** Sestrojte nejprve trojúhelník $\triangle XYZ$, pro který platí $|XZ| = |AC|$, $|YZ| = |BC|$ a který má pravý úhel u vrcholu Z. Podle Pythagorovy věty platí

$$|XZ|^2 + |YZ|^2 = |XY|^2$$

Protože $|XZ| = |AC|$, $|YZ| = |BC|$ a protože platí $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, platí i rovnost

$$|AB|^2 = |XY|^2$$

Speciálně tedy platí rovnosti $|XZ| = |AC|$, $|YZ| = |BC|$ a $|AB| = |XY|$. Dva trojúhelníky, které mají shodné velikosti odpovídajících stran, jsou shodné (tomu se někdy říká *Věta* (SSS)). Protože trojúhelník $\triangle XYZ$ je pravoúhlý, je pravoúhlý i trojúhelník $\triangle ABC$. Pravý úhel v trojúhelníku $\triangle ABC$ je u vrcholu C, protože pravý úhel v trojúhelníku $\triangle XYZ$ je u vrcholu Z.

2.3.2 Problém Nalezněte parametrickou a obecnou rovnici přímky $\boldsymbol{\pi}$ v $\mathbb{R}^2$, která je určena body $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 2.3.2** Parametrická rovnice přímky $\boldsymbol{\pi}$ je (například)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Obecná rovnice přímky $\boldsymbol{\pi}$ je (například)

$$x + y = 3$$

✱ **Návod k řešení problému 2.3.2** Postupujte jako při řešení Problému 2.1.1.

2.3.3 Problém Zapište dvě přímky v $\mathbb{R}^2$, které nemají společný bod.

✱ **Řešení problému 2.3.3** Jedná se například o přímky $x + y = 0$ a $x + y = 1$.
✱ **Návod k řešení problému 2.3.3** Potřebujete najít (nějakou jednoduchou) soustavu rovnic tvaru

$$ax + by = c \quad \text{a} \quad Ax + By = C$$

která *nemá* řešení.

2.3.4 Problém Ať $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou po dvou různé body v $\mathbb{R}^3$. Nalezněte podmínky, které říkají, že body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ určují jednoznačně rovinu v $\mathbb{R}^3$.[a]

[a]Elegantní řešení této úlohy naleznete v Problému 9.4.4.

✱ **Řešení problému 2.3.4** Body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ určují jednoznačně rovinu v $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když rovnost

$$\mathbf{c} = t \cdot \mathbf{a} + (1 - t) \cdot \mathbf{b}$$

pro $t \in \mathbb{R}$ nemá řešení.
✱ **Návod k řešení problému 2.3.4** Body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ nesmí ležet na společné přímce v $\mathbb{R}^3$. Postupujte podobně jako v Problému 2.1.4.

2.3.5 Problém Určete všechny možné geometrické tvary průsečíku tří (ne nutně různých) rovin v $\mathbb{R}^3$. Ke každé situaci uveďte příklad.

✱ **Řešení problému 2.3.5** Tři roviny v $\mathbb{R}^3$ mohou mít průsečík ve tvaru některé z následujících množin:

(1) Prázdná množina. Například roviny $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$ a $x + y + z = 2$.
(2) Jeden bod. Například roviny $x + 0y + 0z = 1$, $0x + y + 0z = 2$ a $0x + 0y + z = 3$.
(3) Jedna přímka. Například roviny $x + 0y + 0z = 0$, $0x + 0y + z = 0$ a $x + 0y + z = 0$.
(4) Rovina. Například roviny $x + y + z = 2$, $2x + 2y + 2z = 4$ a $3x + 3y + 3z = 6$.

✱ **Návod k řešení problému 2.3.5** Nakreslete si obrázky.

Téma 3

Výpočty v tělesech a lineárních prostorech

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) **A8B01LAG**	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: výpočty v abstraktním tělese a v abstraktním lineárním prostoru, lineární závislost a nezávislost množiny vektorů, lineární obal množiny vektorů.

3.1 Výpočty v tělese a výpočty v lineárním prostoru

3.1.1 Problém

(1) Ať $\{a_{ij} \mid i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, s\}$ je množina prvků tělesa $\mathbb{F}$. Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} a_{ij} \right)$$

Dejte oběma stranám této rovnosti „geometrickou“ interpretaci.

(2) Ať $\{\vec{v}_{ij} \mid i = 1, \dots, r \quad j = 1, \dots, s\}$ je množina vektorů v lineárním prostoru L $\mathbb{F}$. Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s} \vec{v}_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} \vec{v}_{ij} \right)$$

✱ **Řešení problému 3.1.1**

(1) Zadaná rovnost platí. Řešením problému je správně vedený důkaz platnosti této rovnosti.

(2) Zadaná rovnost platí. Řešením problému je správně vedený důkaz platnosti této rovnosti.

✱ **Komentář k problému 3.1.1**

(1) Začneme geometrickou představou: zadaná čísla lze zapsat do obdélníkové tabulky

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,s-2} & a_{1,s-1} & a_{1s} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2,s-2} & a_{2,s-1} & a_{2s} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,s-2} & a_{3,s-1} & a_{3s} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & a_{r-1,4} & \dots & a_{r-1,s-2} & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s} \\
a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & a_{r4} & \dots & a_{r,s-2} & a_{r,s-1} & a_{rs}
\end{array}
$$

Sečtením prvků v jednotlivých řádcích dostaneme

$$
\begin{array}{cccccccc||c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,s-2} & a_{1,s-1} & a_{1s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{1j} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2,s-2} & a_{2,s-1} & a_{2s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{2j} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,s-2} & a_{3,s-1} & a_{3s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{3j} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\
a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & a_{r-1,4} & \dots & a_{r-1,s-2} & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{r-1,j} \\
a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & a_{r4} & \dots & a_{r,s-2} & a_{r,s-1} & a_{rs} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{rj}
\end{array}
$$

a sečtením těchto součtů dostaneme pravou část $\sum\limits_{i=1}^{r}\left(\sum\limits_{j=1}^{s} a_{rj}\right)$ rovnosti

$$
\begin{array}{cccccccc||c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,s-2} & a_{1,s-1} & a_{1s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{1j} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2,s-2} & a_{2,s-1} & a_{2s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{2j} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,s-2} & a_{3,s-1} & a_{3s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{3j} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \vdots \\
a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & a_{r-1,4} & \dots & a_{r-1,s-2} & a_{r-1,s-1} & a_{r-1,s} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{r-1,j} \\
a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & a_{r4} & \dots & a_{r,s-2} & a_{r,s-1} & a_{rs} & \sum\limits_{j=1}^{s} a_{rj} \\
\hline\hline
 & & & & & & & & \sum\limits_{i=1}^{r}\left(\sum\limits_{j=1}^{s} a_{rj}\right)
\end{array}
$$

Sečtením prvků v jednotlivých sloupcích dostaneme

$$
\begin{array}{cccccccc||}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1,s-2} & a_{1,s-1} & a_{1s} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2,s-2} & a_{2,s-1} & a_{2s} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3,s-2} & a_{3,s-1} & a_{3s} \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & a_{r-1,4} & \ldots & a_{r-1,s-2} & a_{r-1,s-1} & \\
a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & a_{r4} & \ldots & a_{r,s-2} & a_{r,s-1} & a_{rs} \\
\hline\hline
\sum\limits_{i=1}^{r} a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i3} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i4} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i,s-2} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i,s-1} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{is}
\end{array}
$$

a sečtením těchto součtů dostaneme levou část $\sum\limits_{j=1}^{s}\left(\sum\limits_{i=1}^{r} a_{rj}\right)$ rovnosti

$$
\begin{array}{cccccccc||c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots & a_{1,s-2} & a_{1,s-1} & a_{1s} & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots & a_{2,s-2} & a_{2,s-1} & a_{2s} & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & a_{3,s-2} & a_{3,s-1} & a_{3s} & \\
\vdots & & & & & & & \vdots & \\
a_{r-1,1} & a_{r-1,2} & a_{r-1,3} & a_{r-1,4} & \ldots & a_{r-1,s-2} & a_{r-1,s-1} & & \\
a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & a_{r4} & \ldots & a_{r,s-2} & a_{r,s-1} & a_{rs} & \\
\hline\hline
\sum\limits_{i=1}^{r} a_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i2} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i3} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i4} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i,s-2} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{i,s-1} & \sum\limits_{i=1}^{r} a_{is} & \sum\limits_{j=1}^{s}\left(\sum\limits_{i=1}^{r} a_{is}\right)
\end{array}
$$

Důležité: výše uvedený důkaz využíval pouze následujících vlastností operace sčítání v tělese $\mathbb{F}$: sčítání je komutativní, asociativní a má neutrální prvek 0.

(2) Sčítání vektorů v lineárním prostoru je komutativní, asociativní a má neutrální prvek $\vec{o}$. Důkaz se tedy provede analogicky části (1).

3.1.2 Problém Vyřešte následující lineární rovnice:

(1) $3x = 4$ v $\mathbb{R}$.

(2) $7x = 4$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

(3) $(3-4i)x = (3-i)$ v $\mathbb{C}$.

(4) $2x = 0$ v $\mathbb{Z}_6$.

✱ Řešení problému 3.1.2

(1) Řešením $3x = 4$ v $\mathbb{R}$ je $x = 4/3$. Jde o jediné řešení.

(2) Řešením $7x = 4$ v $\mathbb{Z}_{11}$ je $x = 10$. Jde o jediné řešení.

(3) Řešením $(3-4i)x = (3-i)$ v $\mathbb{C}$ je $x = \dfrac{13}{25} + \dfrac{9}{25}i$. Jde o jediné řešení.

(4) Řešením $2x = 0$ v $\mathbb{Z}_6$ jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$.

✱ Komentář k problému 3.1.2

(1) Protože $\mathbb{R}$ je těleso a protože $3 \neq 0$, existuje 3^{-1}. Rovnost $3x = 4$ v $\mathbb{R}$ je ekvivalentní rovnosti $x = 3^{-1} \cdot 4$. Protože $3^{-1} = 1/3$, je $x = 4/3$. Jde o jediné řešení.

(2) Protože 11 je prvočíslo, je $\mathbb{Z}_{11}$ těleso. Protože $7 \neq 0$ v $\mathbb{Z}_{11}$, existuje 7^{-1}. Nalezneme tuto inversi hrubou silou:[1]

$$\begin{array}{lllll} 7 \cdot 1 = 7, & 7 \cdot 2 = 3, & 7 \cdot 3 = 10, & 7 \cdot 4 = 6, & 7 \cdot 5 = 2, \\ 7 \cdot 6 = 9, & 7 \cdot 7 = 5, & 7 \cdot 8 = 1, & 7 \cdot 9 = 8, & 7 \cdot 10 = 4 \end{array}$$

To znamená, že $7^{-1} = 8$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

Rovnost $7x = 4$ v $\mathbb{Z}_{11}$ je ekvivalentní rovnosti $x = 7^{-1} \cdot 4$ v $\mathbb{Z}_{11}$. To znamená, že $x = 8 \cdot 4 = 10$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

(3) Protože $\mathbb{C}$ je těleso a protože $(3 - 4i) \neq 0$, existuje $(3 - 4i)^{-1}$. Rovnost $(3 - 4i)x = (3 - i)$ v $\mathbb{C}$ je ekvivalentní rovnosti $x = (3 - 4i)^{-1} \cdot (3 - i)$ v $\mathbb{C}$. Komplexní číslo $(3 - 4i)^{-1}$ nalezneme standardním trikem (viz Problém 1.1.5)

$$(3-4i)^{-1} = \frac{1}{3-4i} = \frac{1}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

To znamená, že platí

$$x = (3-4i)^{-1} \cdot (3-i) = \left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right) \cdot (3-i) = \frac{13}{25} + \frac{9}{25}i$$

(4) Protože 6 není prvočíslo, $\mathbb{Z}_6$ *není* těleso. Musíme tedy nalézt řešení hrubou silou:

$$2 \cdot 0 = 0, \quad 2 \cdot 1 = 1, \quad 2 \cdot 2 = 4, \quad 2 \cdot 3 = 0, \quad 2 \cdot 4 = 2, \quad 2 \cdot 5 = 4$$

To znamená, že existují *přesně dvě* řešení rovnice $2x = 0$ v $\mathbb{Z}_6$: $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$.

3.1.3 Problém Ať a je prvek tělesa $\mathbb{F}$. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:[a]

(1) Ať b je libovolný prvek $\mathbb{F}$. Potom rovnice $ax = b$ má jediné řešení.

(2) Rovnice $ax = 1$ má jediné řešení.

(3) Existuje a^{-1}.

[a] Porovnejte znění tohoto problému se zněním Problému 1.3.6.

✱ **Řešení problému 3.1.3** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že podmínky (1)–(3) jsou navzájem ekvivalentní.

✱ **Komentář k problému 3.1.3** Z (1) plyne (2). Zvolme $b = 1$. Podle (1) má rovnice $ax = 1$ jediné řešení.

Ze (2) plyne (3). Definujme a^{-1} jako jediné řešení rovnice $ax = 1$. Potom platí $a \cdot a^{-1} = 1$. Protože násobení v tělese je komutativní, platí i $a^{-1} \cdot a = 1$. To znamená, že inverse k a existuje.

Ze (3) plyne (1). Protože platí $a \cdot (a^{-1} \cdot b) = b$, má rovnice $ax = b$ řešení $a^{-1} \cdot b$. Chceme ukázat, že to je jediné řešení. Předpokládejme tedy, že existuje v tak, že $av = b$. Chceme ukázat, že $v = a^{-1} \cdot b$. Rovnost $av = b$ je ale ekvivalentní rovnosti $v = a^{-1} \cdot b$. Tím je důkaz hotov.

3.1.4 Problém Ať $\mathbb{F}$ je těleso. Ukažte, že pro jakýkoli prvek r z $\mathbb{F}$ platí rovnost[a] $r \cdot 0 = 0$.

[a] Jde o zobecnění Problému 1.1.1. Zobecnění *tohoto* problému dokážete v Problému 3.4.3.

✱ **Řešení problému 3.1.4** Řešením problému je správně vedený důkaz zadaného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 3.1.4** Důkaz je zcela analogický důkazu Problému 1.1.1: protože v tělese je neutrální prvek vzhledem ke sčítání jednoznačně určen (viz Problém 1.3.1), stačí ukázat, že pro všechna x v $\mathbb{F}$ platí rovnost $x + 0 \cdot r = x$.

Nejprve si všimněme toho, že platí $0 \cdot r + 0 \cdot r = (0 + 0) \cdot r = 0 \cdot r$. Proto platí

$$x = x + 0 \cdot r - 0 \cdot r = x + 0 \cdot r + 0 \cdot r - 0 \cdot r = x + 0 \cdot r$$

a to jsme chtěli dokázat.

[1] Existují algoritmy, které hledají inverse nenulových prvků v tělesech tvaru $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo. Tyto algoritmy jsou mimo rozsah přednášky z lineární algebry. Náznakem takového algoritmu je metoda hledání inverse k číslu 12 v $\mathbb{Z}_{17}$ z Problému 1.1.9.

3.1.5 Problém Ať $\mathbb{F}$ je těleso. Ukažte, že pro prvky r, s z $\mathbb{F}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:[a]

(1) Platí $r \cdot s = 0$.

(2) Platí $r = 0$ nebo $s = 0$.

[a] Jde o zobecnění Problému 1.1.2. Zobecnění *tohoto* problému dokážete v Problému 3.4.4.

✱ **Řešení problému 3.1.5** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 3.1.5** Z (1) plyne (2). Předpokládejme, že platí rovnost $r \cdot s = 0$. Může nastat pouze jedna z následujících možností:

(i) $r = 0$. V tomto případě je důkaz hotov.

(ii) $r \neq 0$. Protože $\mathbb{F}$ je těleso, existuje r^{-1}. Z rovnosti $r \cdot s = 0$ plyne rovnost $r^{-1} \cdot (r \cdot s) = r^{-1} \cdot 0$. Podle Problému 3.1.4 platí $r^{-1} \cdot 0 = 0$ a podle asociativity násobení, vlastnosti inverse a neutrality 1 vzhledem k násobení platí $r^{-1} \cdot (r \cdot s) = (r^{-1} \cdot r) \cdot s = 1 \cdot s = s$. Rovnost $r^{-1} \cdot (r \cdot s) = r^{-1} \cdot 0$ lze tedy přepsat na rovnost $s = 0$. Důkaz je hotov.

Ze (2) plyne (1). Předpokládejme, že $r = 0$. Potom rovnost $0 \cdot s = 0$ platí podle Problému 3.1.4. V případě, kdy $s = 0$, postupujeme analogicky.

3.2 Lineární závislost a lineární nezávislost

3.2.1 Problém V lineárním prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ nalezněte dva lineárně nezávislé vektory.[a]

[a] To znamená, že dimense $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ je alespoň 2. Ve skutečnosti lineární prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ *nemá* konečnou dimensi. To je velmi netriviální fakt, viz například AKLA, Příklad 3.6.5.

✱ **Řešení problému 3.2.1** Řešením tohoto problému jsou dva vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ v $\mathbb{R}$ a správně vedený důkaz toho, že tyto dva vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou v prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ lineárně nezávislé.

✱ **Komentář k problému 3.2.1** Lineární kombinace v lineárním prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ mají tvar

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{x}_i$$

kde a_i jsou *racionální* čísla (tj. skaláry) a $\vec{x}_i$ jsou *reálná* čísla (tj. vektory).

Hledáme tedy reálná čísla $\vec{v}$ a $\vec{w}$ s následující vlastností: jestliže a a b jsou racionální čísla taková, že $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} = 0$, potom $a = b = 0$.

Takovými čísly jsou například $\vec{v} = 1$ a $\vec{w} = \sqrt{2}$. Opravdu: ať a a b jsou racionální čísla taková, že $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} = 0$. Potom platí $b \cdot \sqrt{2} = -a$. Může nastat pouze jedna z následujících možností:

(1) $b = 0$. V tomto případě platí díky rovnosti $b \cdot \sqrt{2} = -a$ i rovnost $a = 0$. Důkaz je hotov.

(2) $b \neq 0$. Z rovnosti $b \cdot \sqrt{2} = -a$ plyne, že $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$. To znamená, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. A to je spor. Možnost $b \neq 0$ tedy nemůže nastat.

Ukázali jsme, že vektory $\vec{v} = 1$ a $\vec{w} = \sqrt{2}$ jsou lineárně nezávislé v lineárním prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$.

3.2.2 Problém Rozhodněte o pravdivosti následujícího tvrzení: *Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Pro vektor $\vec{x}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *Množina $\{\vec{v}\}$ je lineárně nezávislá.*

(2) *Vektor $\vec{v}$ je nenulový.*

✱ **Řešení problému 3.2.2** Tvrzení platí. Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 3.2.2** Ukážeme, že z (1) plyne (2). Předpokládejme, že množina $\{\vec{v}\}$ je lineárně nezávislá. Chceme ukázat, že vektor $\vec{v}$ je nenulový. Kdyby platilo $\vec{v} = \vec{o}$, potom by $\{\vec{o}\}$ byla lineárně závislá množina, a to je spor.

Ukážeme, že ze (2) plyne (1). Předpokládejme, že vektor $\vec{v}$ je nenulový. Ukážeme, že množina $\{\vec{v}\}$ je lineárně nezávislá. Ať tedy a je skalár z $\mathbb{F}$, pro který platí $a \cdot \vec{v} = \vec{o}$. Protože $\vec{v} \neq \vec{o}$, musí platit $a = 0$ (viz přednášku 1B). Ukázali jsme, že množina $\{\vec{v}\}$ je lineárně nezávislá.

3.2.3 Problém Ať $\vec{v}$ je nenulový vektor v lineárním prostoru L nad $\mathbb{F}$. Ukažte, že, jestliže pro vektor $\vec{w}$ z L platí $\vec{w} \notin \mathsf{span}(\vec{v})$, potom je množina $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ lineárně nezávislá. Dejte tomuto tvrzení geometrickou interpretaci v případě, kdy $L = \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 3.2.3** Řešením problému je správně vedený důkaz daného tvrzení. Geometrická interpretace v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$: podmínka $\vec{w} \notin \mathsf{span}(\vec{v})$ říká, že vektor $\vec{w}$ neleží na přímce $\mathsf{span}(\vec{v})$. Tvrzení říká, že potom jsou $\vec{v}$ a $\vec{w}$ lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Komentář k problému 3.2.3** Ať $\vec{w}$ je vektor z L, pro který platí $\vec{w} \notin \mathsf{span}(\vec{v})$. Předpokládejme, že pro skaláry a, b z $\mathbb{F}$ platí $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} = \vec{o}$. Chceme dokázat, že $a = b = 0$.

Může nastat pouze jedna z následujících možností:

(1) $b = 0$. Potom z rovnosti $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} = \vec{o}$ plyne rovnost $a \cdot \vec{v} = \vec{o}$. Protože $\vec{v}$ je nenulový vektor, musí platit $a = 0$. Důkaz je hotov.

(2) $b \neq 0$. Potom z rovnosti $a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} = \vec{o}$ plyne rovnost $\vec{w} = -b^{-1} \cdot a \cdot \vec{v}$. To znamená, že $\vec{w} \in \mathsf{span}(\vec{v})$, a to je spor. Možnost $b \neq 0$ tedy nastat nemůže.

Ukázali jsme, že že $a = b = 0$. To znamená, že $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory.

Geometrická interpretace tvrzení v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ je následující:

(1) Nenulový vektor $\vec{v}$ určuje v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ přímku $p = \mathsf{span}(\vec{v})$. Tato přímka p prochází počátkem a má směr $\vec{v}$.

(2) Předpoklad $\vec{w} \notin \mathsf{span}(\vec{v})$ říká, že vektor $\vec{w}$ neleží na přímce p.

(3) Tvrzení říká, že pokud $\vec{w}$ neleží na přímce p, pak jsou $\vec{v}$ a $\vec{w}$ lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

3.3 Lineární obal a lineární podprostor

3.3.1 Problém Rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny N a M lineárního prostoru L platí rovnosti

(1) $\mathsf{span}(M \cap N) = \mathsf{span}(M) \cap \mathsf{span}(N)$.

(2) $\mathsf{span}(M \cup N) = \mathsf{span}(M) \cup \mathsf{span}(N)$.

Pokud rovnosti obecně neplatí, platí v nich obecně alespoň některé inkluse?

✱ **Řešení problému 3.3.1**

(1) Tvrzení neplatí. Protipříklad je $L = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$, $N = \{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\}$.

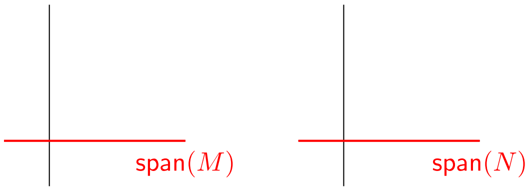
(2) Tvrzení neplatí. Protipříklad je $L = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$, $N = \{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$.

Obecně platí následující inkluse: $\mathsf{span}(M \cap N) \subseteq \mathsf{span}(M) \cap \mathsf{span}(N)$ a $\mathsf{span}(M) \cup \mathsf{span}(N) \subseteq \mathsf{span}(M \cup N)$. Řešením jsou správně vedené důkazy platnosti těchto inklusí.

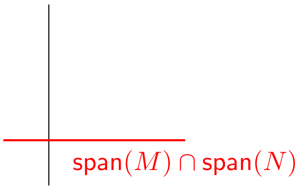
✱ **Komentář k problému 3.3.1**

(1) Pro $L = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ a $N = \{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\}$ platí

(a) $\mathsf{span}(M)$ je "osa x" a $\mathsf{span}(N)$ je také "osa x", viz obrázek



(b) Proto $\mathsf{span}(M) \cap \mathsf{span}(N)$ je opět "osa x"

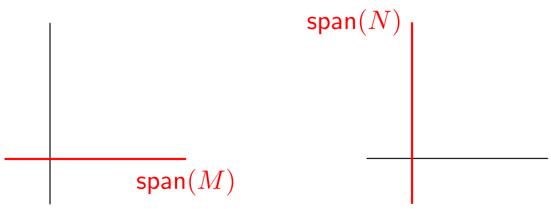


Protože $M \cap N = \emptyset$, je $\mathsf{span}(M \cap N) = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$.

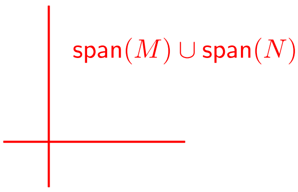
Našli jsme protipříklad. To znamená, že rovnost $\mathsf{span}(M \cap N) = \mathsf{span}(M) \cap \mathsf{span}(N)$ obecně neplatí.

(2) Pro $L = \mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ a $N = \{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ platí

(a) $\mathsf{span}(M)$ je "osa x", $\mathsf{span}(N)$ je "osa y", viz obrázek



(b) Proto $\mathsf{span}(M) \cup \mathsf{span}(N)$ je "osový kříž"



ale $\mathsf{span}(M \cup N) = \mathbb{R}^2$.

Našli jsme protipříklad. To znamená, že rovnost $\mathsf{span}(M \cup N) = \mathsf{span}(M) \cup \mathsf{span}(N)$ obecně neplatí.

Protože obecně platí inkluse

$$M \cap N \subseteq M, \quad M \cap N \subseteq N, \quad M \subseteq M \cup N, \quad N \subseteq M \cup N$$

pak podle uzávěrových vlastností lineárního obalu platí i inkluse

$$\mathsf{span}(M \cap N) \subseteq \mathsf{span}(M), \quad \mathsf{span}(M \cap N) \subseteq \mathsf{span}(N), \quad \mathsf{span}(M) \subseteq \mathsf{span}(M \cup N), \quad \mathsf{span}(N) \subseteq \mathsf{span}(M \cup N)$$

Podle vlastností průniku a sjednocení množin tedy platí inkluse

$$\mathsf{span}(M \cap N) \subseteq \mathsf{span}(M) \cap \mathsf{span}(N) \quad \text{a} \quad \mathsf{span}(M) \cup \mathsf{span}(N) \subseteq \mathsf{span}(M \cup N)$$

3.3.2 Problém Ať V a W jsou lineární podprostory lineárního prostoru L. Dokažte, že platí rovnost $V \cap W = \mathsf{span}(V \cap W)$.

✱ **Řešení problému 3.3.2** Řešením je správně vedený důkaz toho, že platí rovnost $V \cap W = \mathsf{span}(V \cap W)$.

✱ **Komentář k problému 3.3.2** Podle Přednášky 2A platí, že $V \cap W$ je lineární podprostor prostoru L. Proto (opět podle Přednášky 2A) platí $V \cap W = \mathsf{span}(V \cap W)$.

3.4 Problémy s návodem k řešení

3.4.1 Problém Ukažte, že kvadratická rovnice $3x^2 = 0$ má v $\mathbb{Z}_{12}$ přesně šest různých řešení.

✱ **Řešení problému 3.4.1** Rovnost $3x^2 = 0$ platí pro $x \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ v $\mathbb{Z}_{12}$.

✱ **Návod k řešení problému 3.4.1** Postupujte hrubou silou, tj. spočtěte v $\mathbb{Z}_{12}$ hodnoty $3 \cdot 0^2$, $3 \cdot 1^2$, $3 \cdot 2^2$, $\dots$, $3 \cdot 11^2$.

3.4.2 Problém (Binomická věta v obecném tělese) Ať $\mathbb{F}$ je těleso. Dokažte matematickou indukcí: pro libovolné prvky a, b z $\mathbb{F}$ a pro libovolné přirozené číslo n platí rovnost[a]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

[a] Jedná se o zobecnění Problému 1.1.10.

✱ **Řešení problému 3.4.2** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro libovolné prvky a, b a $\mathbb{F}$ a pro libovolné přirozené číslo n platí rovnost

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

✱ **Návod k řešení problému 3.4.2** Postupujte stejně, jako při důkazu Problému 1.1.10.

3.4.3 Problém Ať L je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Dokažte, že pro libovolný vektor $\vec{v}$ z L platí $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$.

✱ **Řešení problému 3.4.3** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Návod k řešení problému 3.4.3** Postupujte analogicky řešení Problému 3.1.4. Uvědomte si, že počítáte s vektory a se skaláry; využívejte tedy vlastností násobení skalárem v lineárním prostoru.

3.4.4 Problém Ať L je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$. Dokažte, že pro libovolný vektor $\vec{v}$ z L a libovolný skalár a z $\mathbb{F}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Platí $a \cdot \vec{v} = \vec{o}$.

(2) Platí $a = 0$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$.

✱ **Řešení problému 3.4.4** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Návod k řešení problému 3.4.4** Postupujte analogicky řešení Problému 3.1.5. Uvědomte si, že počítáte s vektory a se skaláry; využívejte tedy vlastností násobení skalárem v lineárním prostoru.

3.4.5 Problém Ať $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ jsou lineárně nezávislé vektory v lineárním prostoru L nad $\mathbb{F}$. Ukažte, že jestliže pro vektor $\vec{w}$ z L platí $\vec{w} \notin \mathsf{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, potom je množina $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ lineárně nezávislá.

✱ **Řešení problému 3.4.5** Řešením problému je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Návod k řešení problému 3.4.5** Inspirujte se řešením Problému 3.2.3.

3.4.6 Problém Ať V a W jsou lineární podprostory lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$. Ať platí, že $V \cup W$ je lineární podprostor lineárního prostoru L. Ukažte, že potom platí $V \subseteq W$ nebo $W \subseteq V$.

✱ **Řešení problému 3.4.6** Řešením problému je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Návod k řešení problému 3.4.6** Postupujte sporem: ať $V \cup W$ je lineární podprostor lineárního prostoru L a ať neplatí ani $V \subseteq W$ ani $W \subseteq V$.

Protože neplatí ani $V \subseteq W$ ani $W \subseteq V$, zvolte $\vec{v} \in V \setminus W$ a $\vec{w} \in W \setminus V$. Potom $\vec{v} + \vec{w} \in V \cup W$, protože $V \cup W$ je lineární podprostor.

Nastane jedna ze dvou možností:

(1) $\vec{v} + \vec{w} \in V$. Potom rovnost $\vec{w} = (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{v}$ ukazuje, že $\vec{w} \in V$. To je spor.

(2) $\vec{v} + \vec{w} \in W$. Potom rovnost $\vec{v} = (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{w}$ ukazuje, že $\vec{v} \in W$. To je spor.

Téma 4

Báze a dimense lineárního prostoru

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: množina generátorů lineárního prostoru, báze a dimense lineárního prostoru.

4.1 Konečně generované lineární prostory

4.1.1 Problém Ať V a W jsou konečně generované lineární podprostory lineárního prostoru L. Ukažte, že $V \vee W$ je konečně generovaný lineární podprostor prostoru L.

✱ **Řešení problému 4.1.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $V \vee W$ je konečně generovaný lineární podprostor prostoru L.

✱ **Komentář k problému 4.1.1** Označme jako G_V a G_W konečné množiny takové, že platí

$$V = \mathsf{span}(G_V) \qquad \text{a} \qquad W = \mathsf{span}(G_W)$$

Ukážeme, že platí rovnost

$$V \vee W = \mathsf{span}(G_V \cup G_W)$$

Protože $G_V \cup G_W$ je konečná množina, bude tím důkaz hotov.

Rovnost dvou množin dokážeme jako platnost dvou inklusí:

(1) Inkluse $\mathsf{span}(G_V \cup G_W) \subseteq V \vee W$.
Platí $G_V \subseteq V$ a $G_W \subseteq W$. Proto platí $G_V \cup G_W \subseteq V \cup W$. Podle vlastností lineárního obalu (viz přednášku 2A) platí $\mathsf{span}(G_V \cup G_W) \subseteq \mathsf{span}(V \cup W)$. Podle definice spojení (viz přednášku 2A) je $V \vee W = \mathsf{span}(V \cup W)$.
Ukázali jsme, že platí $\mathsf{span}(G_V \cup G_W) \subseteq V \vee W$.

(2) Inkluse $V \vee W \subseteq \mathsf{span}(G_V \cup G_W)$.
Protože $G_V \subseteq G_V \cup G_W$ a $G_W \subseteq G_V \cup G_W$, platí $V \subseteq \mathsf{span}(G_V \cup G_W)$ a $W \subseteq \mathsf{span}(G_V \cup G_W)$. Proto platí $V \cup W \subseteq \mathsf{span}(G_V \cup G_W)$. To znamená, že platí $\mathsf{span}(V \cup W) \subseteq \mathsf{span}(G_V \cup G_W)$.
Ukázali jsme, že platí $V \vee W \subseteq \mathsf{span}(G_V \cup G_W)$.

4.1.2 Problém Ať V a W jsou lineární podprostory lineárního prostoru L, kde $W \subseteq V$. Rozhodněte, zda platí:

Jestliže W je konečně generovaný, potom V je konečně generovaný.

✱ **Řešení problému 4.1.2** Tvrzení neplatí. Protipříkladem je $L = V = \mathbb{R}[x]$ a $W = \{0\}$; W je konečně generovaný, ale V konečně generovaný není.[1]

✱ **Komentář k problému 4.1.2** Tvrzení neplatí, protože jsme schopni zkonstruovat protipříklad. Například lineární prostor $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$ není konečně generovaný, ale $\{0\} = \mathsf{span}(\emptyset)$ je jeho konečně generovaný lineární podprostor. To znamená: náš protipříklad je $L = V = \mathbb{R}[x]$ a $W = \{0\}$.

4.2 Báze a dimense

4.2.1 Problém O následujících seznamech rozhodněte, zda jsou uspořádanými bázemi lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Smíte využít faktu, že $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(1) Seznam $B_1 = (\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix})$.

(2) Seznam $B_2 = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}148\\3\\2\end{pmatrix})$.

(3) Seznam $B_3 = (\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\\6\end{pmatrix})$.

✱ **Řešení problému 4.2.1**

(1) Seznam B_1 je uspořádanou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Seznam B_2 není uspořádanou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(3) Seznam B_3 není uspořádanou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Komentář k problému 4.2.1**

(1) Ukážeme, že vektory $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé. To lze udělat mnoha způsoby. Ukážeme dva takové způsoby.

(a) Předvádíme „nejelegantnější“ způsob. Vektory $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ jsou zjevně lineárně nezávislé. A pro vektor $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ platí

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \notin \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$$

protože každý vektor ze $\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ musí mít na druhé a třetí položce reálná čísla tvaru $2a$ a $3a$ pro nějaké reálné číslo a. Rovnosti $3 = 2a$ a $2 = 3a$ však nemají společné řešení.

[1] Lineární prostor $\mathbb{R}[x]$ není konečně generovaný podle Přednášky 3A.

Podle přednášky (viz přednášku 2B) je množina

$$\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\}$$

lineárně nezávislá. Protože $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, je B_1 uspořádanou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(b) Předvádíme „standardní“ způsob, tj. důkaz z definice. Předpokládejme tedy, že pro reálná čísla a, b, c platí rovnost

$$a \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Pokud ukážeme, že $a = b = c = 0$, jsou zadané vektory lineárně nezávislé.
Výše uvedená rovnost je ekvivalentní následující soustavě rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2a & & & + & 3c & = & 0 \\ 3a & & & + & 2c & = & 0 \end{array}$$

Poslední dvě rovnice mají pouze triviální řešení $a = c = 0$. Díky první rovnici pak platí i $b = 0$.
Proto je B_1 uspořádanou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Seznam B_2 obsahuje dva vektory. Protože $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, musí každá (uspořádaná) báze $\mathbb{R}^3$ obsahovat přesně tři vektory. Tudíž B_2 není uspořádanou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(3) Předpokládejme, že pro reálná čísla a, b, c platí rovnost

$$a \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Pokud ukážeme, že $a = b = c = 0$, jsou zadané vektory lineárně nezávislé.
Výše uvedená rovnost je ekvivalentní následující soustavě rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & 4c & = & 0 \\ 4a & & & + & 8c & = & 0 \\ 3a & & & + & 6c & = & 0 \end{array}$$

Poslední dvě rovnice ale mají *netriviální* řešení: například $a = 2$, $c = -1$. Pro toto netriviální řešení platí (z první rovnice) $b = 2$.
Ukázali jsme, že zadané vektory jsou lineárně závislé. Proto B_3 není uspořádanou bází prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

4.2.2 Problém Ať $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$. Rozhodněte, pro která $n \geq 2$ je seznam

$$B = (\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \ldots, \vec{b}_{n-1} + \vec{b}_n, \vec{b}_n + \vec{b}_1)$$

opět bází prostoru L.

✱ Řešení problému 4.2.2

(1) Pro sudé n, kde $n \geq 2$, seznam B není uspořádanou bází prostoru L.

(2) Pro liché n, kde $n \geq 2$, je seznam B uspořádanou bází prostoru L.

✱ Komentář k problému 4.2.2 Seznam B obsahuje přesně n vektorů. To znamená, že B je báze lineárního prostoru L právě tehdy, když vektory z B jsou lineárně nezávislé. Zvolme tedy skaláry $a_1, \ldots, a_n$ tak, že platí

$$a_1 \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) + a_2 \cdot (\vec{b}_2 + \vec{b}_3) + \ldots + a_{n-1} \cdot (\vec{b}_{n-1} + \vec{b}_n) + a_n \cdot (\vec{b}_n + \vec{b}_1) = \vec{o}$$

Chceme využít fakt, že $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ je uspořádaná báze. To znamená, že přepíšeme výše uvedenou lineární kombinaci jako kombinaci vektorů $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$,..., $\vec{b}_n$:

$$(a_1 + a_n) \cdot \vec{b}_1 + (a_1 + a_2) \cdot \vec{b}_2 + (a_2 + a_3) \cdot \vec{b}_3 + \ldots + (a_{n-1} + a_n) \cdot \vec{b}_n = \vec{o}$$

Musí tedy platit rovnosti

$$a_1 + a_n = 0 \qquad a_1 + a_2 = 0 \qquad a_2 + a_3 = 0 \qquad \ldots \qquad a_{n-1} + a_n = 0$$

Výpočet rozdělíme na dvě části:

(1) Číslo n je sudé. Definujme $a_k = (-1)^k$ pro $k = 1, \dots, n$. Tato čísla splňují rovnosti

$$a_1 + a_n = 0 \qquad a_1 + a_2 = 0 \qquad a_2 + a_3 = 0 \qquad \ldots \qquad a_{n-1} + a_n = 0$$

To znamená, že pro sudé n seznam B není uspořádanou bází prostoru L.

(2) Číslo n je liché. *Sudý* počet rovností

$$a_1 + a_2 = 0 \qquad a_2 + a_3 = 0 \qquad \ldots \qquad a_{n-1} + a_n = 0$$

je splněn právě tehdy, když $a_1 = a_i$ pro všechna lichá i a $a_2 = a_i$ pro všechna sudá i. Rovnost $a_1 + a_n = 0$ je tedy splněna právě tehdy, když $a_1 = a_n = 0$. To znamená, že $a_i = 0$ pro *všechna* $i = 1, \dots, n$.

To znamená, že pro liché n seznam B je uspořádanou bází prostoru L.

Důležité: U problémů tohoto typu bývá vhodné si uvědomit, co se odehrává pro „malé“ hodnoty n.

- $n = 2$: $B = (\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2 + \vec{b}_1)$. To je lineárně závislý seznam (obsahuje totiž dva stejné vektory). Platí:

$$-(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) + (\vec{b}_2 + \vec{b}_1) = \vec{o}$$

- $n = 3$: $B = (\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \vec{b}_3 + \vec{b}_1)$. To je lineárně nezávislý seznam: jestliže

$$a_1 \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) + a_2 \cdot (\vec{b}_2 + \vec{b}_3) + a_3 \cdot (\vec{b}_3 + \vec{b}_1) = \vec{o}$$

  neboli

$$(a_1 + a_3) \cdot \vec{b}_1 + (a_1 + a_2) \cdot \vec{b}_2 + (a_2 + a_3) \cdot \vec{b}_3 = \vec{o}$$

  potom

$$a_1 + a_3 = 0 \qquad a_1 + a_2 = 0 \qquad a_2 + a_3 = 0$$

  Z posledních dvou rovnic plyne, že $a_1 = a_3$. Z první rovnice plyne $a_1 = a_3 = 0$. To znamená, že $a_2 = 0$ (díky poslední rovnici).

- $n = 4$: $B = (\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \vec{b}_3 + \vec{b}_4, \vec{b}_4 + \vec{b}_1)$. To je lineárně závislý seznam:

$$-(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) + (\vec{b}_2 + \vec{b}_3) - (\vec{b}_3 + \vec{b}_4) + (\vec{b}_4 + \vec{b}_1) = \vec{o}$$

- $n = 5$: $B = (\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \vec{b}_3 + \vec{b}_4, \vec{b}_4 + \vec{b}_5, \vec{b}_5 + \vec{b}_1)$. To je lineárně nezávislý seznam: jestliže

$$a_1 \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) + a_2 \cdot (\vec{b}_2 + \vec{b}_3) + a_3 \cdot (\vec{b}_3 + \vec{b}_4) + a_4 \cdot (\vec{b}_4 + \vec{b}_5) + a_5 \cdot (\vec{b}_5 + \vec{b}_1) = \vec{o}$$

  neboli

$$(a_1 + a_5) \cdot \vec{b}_1 + (a_1 + a_2) \cdot \vec{b}_2 + (a_2 + a_3) \cdot \vec{b}_3 + (a_3 + a_4) \cdot \vec{b}_4 + (a_4 + a_5) \cdot \vec{b}_5 = \vec{o}$$

  potom

$$a_1 + a_5 = 0 \qquad a_1 + a_2 = 0 \qquad a_2 + a_3 = 0 \qquad a_3 + a_4 = 0 \qquad a_4 + a_5 = 0$$

  Z posledních čtyř rovnic plyne, že $a_1 = a_3 = a_5$ a $a_2 = a_4$. Z první rovnice plyne $a_1 = a_5 = 0$. To znamená, že $a_2 = a_4 = 0$.

Nyní by mělo vzniknout podezření, že B není báze pro sudá n a že B je báze pro lichá n. Toto podezření ovšem *není* důkaz!

4.2.3 Problém Ať $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$. Definujte zobrazení

$$\mathbf{f}_1 : L \longrightarrow \mathbb{F} \qquad \mathbf{f}_2 : L \longrightarrow \mathbb{F} \qquad \dots \qquad \mathbf{f}_n : L \longrightarrow \mathbb{F}$$

takto:

$$\mathbf{f}_1(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) = x_1 \qquad \mathbf{f}_2(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) = x_2 \qquad \dots \qquad \mathbf{f}_n(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) = x_n$$

(1) Ukažte, že zobrazení $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, …, $\mathbf{f}_n$ jsou lineární.

(2) Ukažte, že množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$ všech lineárních zobrazení z prostoru L do $\mathbb{F}$.

✱ Řešení problému 4.2.3

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že zobrazení $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, …, $\mathbf{f}_n$ jsou lineární.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$ všech lineárních zobrazení z prostoru L do $\mathbb{F}$.

✱ Komentář k problému 4.2.3 Budeme využívat toho, že každý vektor z L se dá zapsat (dokonce jednoznačně) ve tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i$, pro skaláry x_1, …, x_n.

(1) Ukážeme, že zobrazení $\mathbf{f}_1$ je lineární. Linearita zobrazení $\mathbf{f}_2$, …, $\mathbf{f}_n$ se dokáže analogicky.

(a) Zobrazení $\mathbf{f}_1$ respektuje sčítání, protože platí rovnosti

$$\mathbf{f}_1(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i + \sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot \vec{b}_i) = \mathbf{f}_1(\sum_{i=1}^{n} (x_i + x_i') \cdot \vec{b}_i) = x_1 + x_1' = \mathbf{f}_1(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) + \mathbf{f}_1(\sum_{i=1}^{n} x_i' \cdot \vec{b}_i)$$

pro všechny vektory tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i$ a $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i' \cdot \vec{b}_i$.

(b) Zobrazení $\mathbf{f}_1$ respektuje násobení skalárem, protože platí rovnosti

$$\mathbf{f}_1(a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) = \mathbf{f}_1(\cdot \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i) \cdot \vec{b}_i) = a \cdot x_1 = a \cdot \mathbf{f}_1(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i)$$

pro všechny vektory tvaru $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i$ a pro všechny skaláry a.

(2) Ukážeme, že množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ generuje lineární prostor $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$ a že množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ je lineárně nezávislá v lineárním prostoru $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$.

(a) Množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ generuje lineární prostor $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$.
Potřebujeme ukázat, že platí $\mathsf{span}(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}) = \mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$. Inkluse $\mathsf{span}(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}) \subseteq \mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$ platí vždy. Stačí tedy ukázat platnost inkluse $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F}) \subseteq \mathsf{span}(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\})$.
Zvolme lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow \mathbb{F}$. Chceme ukázat, že $\mathbf{f} \in \mathsf{span}(\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\})$. Definujme skaláry a_1, …, a_n následovně:

$$a_1 = \mathbf{f}(\vec{b}_1) \qquad a_2 = \mathbf{f}(\vec{b}_2) \qquad \dots \qquad a_n = \mathbf{f}(\vec{b}_n)$$

Potom platí

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \mathbf{f}_j$$

v $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$, protože rovnosti[2]

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbf{f}(\vec{b}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{f}_i(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{b}_j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{f}_i\right)(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{b}_j) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \mathbf{f}_j\right)(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i)
\end{aligned}$$

platí pro každý vektor tvaru $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i$.

(b) Množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ je lineárně nezávislá v lineárním prostoru $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$. Předpokládejme, že pro skaláry $a_1, \ldots, a_n$ platí rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{f}_i = \mathbf{o}$$

Chceme ukázat, že $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$.
Aplikujme obě strany výše uvedené rovnosti na vektor $\vec{b}_1$. Dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{f}_i\right)(\vec{b}_1) = \mathbf{o}(\vec{b}_1)$$

neboli

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{f}_i(\vec{b}_1)}_{=a_1} = 0$$

Ukázali jsme, že $a_1 = 0$. Rovnosti $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$ se dokáží analogicky.

4.2.4 Problém Ať V a W jsou lineární podprostory lineárného prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$. Ať $\dim(V) = \dim(W) = 3$. Co lze říci o $\dim(V \cap W)$ a $\dim(V \vee W)$?

✱ **Řešení problému 4.2.4** Může nastat jedna ze tří možností:

(1) $\dim(V \cap W) = 1$ a $\dim(V \vee W) = 5$.
(2) $\dim(V \cap W) = 2$ a $\dim(V \vee W) = 4$.
(3) $\dim(V \cap W) = 3$ a $\dim(V \vee W) = 3$.

[2]Důležité: uvědomte si, že platí $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \vec{b}_j$, atd. Je totiž jedno, jak se jmenuje index, přes který se sčítá.

✱ **Komentář k problému 4.2.4** Použijeme větu o dimensi spojení a průniku (viz přednášku 3A). To znamená, že musí platit rovnost

$$\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \cap W) + \dim(V \vee W)$$

Protože $\dim(V) = \dim(W) = 3$, musí platit rovnost $\dim(V \cap W) + \dim(V \vee W) = 6$. Dále, $V \cap W$ a $V \vee W$ jsou lineární podprostory prostoru $\mathbb{R}^5$. Navíc, $V \cap W$ je lineární podprostor lineárního prostoru V (i lineárního prostoru W). Proto platí nerovnosti $0 \leq \dim(V \cap W) \leq 3$ a $0 \leq \dim(V \vee W) \leq 5$. Může tedy nastat jedna ze tří možností:

(1) $\dim(V \cap W) = 1$ a $\dim(V \vee W) = 5$.

(2) $\dim(V \cap W) = 2$ a $\dim(V \vee W) = 4$.

(3) $\dim(V \cap W) = 3$ a $\dim(V \vee W) = 3$.[3]

4.3 Problémy s návodem k řešení

4.3.1 Problém Ať L je lineární prostor konečné dimense nad $\mathbb{F}$. Ať V a W jsou lineární podprostory prostoru L, pro které platí nerovnost

$$\dim(V) + \dim(W) > \dim(L)$$

Ukažte, že potom V a W mají alespoň jednu společnou přímku (tj. společný podprostor dimense 1).[a]

[a]Promyslete si, co toto tvrzení znamená například v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Srovnejte s Problémem 4.2.4.

✱ **Řešení problému 4.3.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z nerovnosti $\dim(V) + \dim(W) > \dim(L)$ plyne, že V a W mají alespoň jednu společnou přímku.

✱ **Návod k řešení problému 4.3.1** Rovnost $\dim(V \vee W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$ platí podle věty o dimensi spojení a průniku. To znamená, že musí platit nerovnost $\dim(V \vee W) + \dim(V \cap W) > \dim(L)$. Z této nerovnosti odvoďte, že $\dim(V \cap W) > 0$. To znamená, že $V \cap W$ obsahuje alespoň jeden nenulový vektor $\vec{v}$.[4] Lineární prostor $\mathsf{span}(\vec{v})$ je pak hledaný lineární podprostor prostoru $V \cap W$ dimense 1.

4.3.2 Problém Označme jako $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ lineární prostor všech reálných posloupností. Jde o lineární prostor nad $\mathbb{R}$ s operacemi:

$$(a_n)_{n=0}^{+\infty} + (b_n)_{n=0}^{+\infty} = (a_n + b_n)_{n=0}^{+\infty} \qquad a \cdot (a_n)_{n=0}^{+\infty} = (a \cdot a_n)_{n=0}^{+\infty}$$

Ukažte, že prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nemá konečnou dimensi.

✱ **Řešení problému 4.3.2** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nemá konečnou dimensi.

✱ **Návod k řešení problému 4.3.2** Stačí nalézt jednu nekonečnou lineárně nezávislou množinu M v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Takovou množinou je například množina

$$M = \{(a_n^{(k)})_{n=0}^{+\infty} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

kde k-tá posloupnost $(a_n^{(k)})_{n=0}^{+\infty}$ je definována následovně:

$$a_n^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{pro } n = k \\ 0, & \text{pro } n \neq k \end{cases}$$

Ukažte, že M je lineárně nezávislá (tj., ukažte, že každá *konečná* podmnožina množiny M je lineárně nezávislá, viz přednášku 2B).

[3]V tomto případě musí platit rovnost $V = W$. To lze ukázat následnovně: $V \cap W$ je lineární podprostor prostorů V a W dimense 3. Z toho plyne, že $V \cap W = V$ a $V \cap W = W$.

[4]Připomeňte si Problém 3.2.2.

4.3.3 Problém Ať L je lineární prostor konečné dimense nad $\mathbb{F}$.

(1) Ať V a W jsou lineární podprostory prostoru L, pro které platí $V \subseteq W$. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(a) Platí rovnost $\dim(V) = \dim(W)$.

(b) Platí rovnost $V = W$.

(2) Ať V a W jsou lineární podprostory prostoru L. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(a) Platí rovnost $\dim(V \vee W) = \dim(W)$.

(b) Platí inkluse $V \subseteq W$.

(3) Ať $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_s$ a $\vec{b}$ jsou vektory v lineárním prostoru L. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:[a]

(a) $\vec{b} \in \mathsf{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s)$.

(b) $\dim(\mathsf{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s)) = \dim(\mathsf{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s, \vec{b}))$.

[a]Instance tohoto tvrzení v $\mathbb{F}^r$ je základem důkazu první části Frobeniovy věty pro řešení soustav lineárních rovnic, viz Přednášku 6A.

✱ Řešení problému 4.3.3

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (a) plyne (b) a toho, že z (b) plyne (a).

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (a) plyne (b) a toho, že z (b) plyne (a).

(3) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (a) plyne (b) a toho, že z (b) plyne (a).

✱ Návod k řešení problému 4.3.3

(1) To, že z (b) plyne (a) je triviální: pokud $V = W$, potom $\dim(V) = \dim(W)$.

Z (a) plyne (b). Předpokládejte, že $\dim(V) = \dim(W)$ a že $V \neq W$. Protože $V \subseteq W$, znamená to, že existuje $\vec{w}$ ve W, které není ve V. Zvolte nějakou bázi $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ prostoru V. To znamená, že platí $V = \mathsf{span}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})$ a $\vec{w} \notin \mathsf{span}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})$. Podle Přednášky 2B to znamená, že množina $\{\vec{w}\} \cup \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})$ je lineárně nezávislá množina, která má $k+1$ prvků. To znamená, že $\dim(W) > \dim(V)$, a to je spor.

(2) Z (a) plyne (b). Důkaz zahajte rovností $\dim(V \vee W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$ (to je věta o dimensi spojení a průniku). Z rovnosti $\dim(V \vee W) = \dim(W)$ tedy plyne $\dim(V \cap W) = \dim(V)$. Protože obecně platí $V \cap W \subseteq V$, a protože $V \cap W$ a V jsou lineární podprostory, musí díky rovnosti $\dim(V \cap W) = \dim(V)$ platit[5] rovnost $V \cap W = V$. Rovnost $V \cap W = V$ ale přesně znamená, že platí $V \subseteq W$.

Z (b) plyne (a). Ať platí $V \subseteq W$. Potom $V \cup W = W$. Podle definice $V \vee W$ tedy platí rovnost $V \vee W = V \cup W$.[6] Z toho plyne rovnost $\dim(V \vee W) = \dim(W)$.

(3) Označte $V = \mathsf{span}(\vec{b})$ a $W = \mathsf{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s)$. Nejprve dokažte, že platí rovnost

$$V \vee W = \mathsf{span}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s, \vec{b})$$

Dále dokažte, že inkluse $V \subseteq W$ platí právě tehdy, když platí $\vec{b} \in W$ (k tomu využijte uzávěrové vlastnosti span, viz Přednášku 2A). Inkluse $V \subseteq W$ platí právě tehdy, když $\dim(V \vee W) = \dim(W)$ podle části (2) tohoto problému. Tím je důkaz hotov.

[5]Viz část (1) tohoto problému.

[6]Pozor: rovnost $V \vee W = V \cup W$ pro obecné lineární podprostory V a W *neplatí*! Podstatným způsobem se zde využívá platnost inkluse $V \subseteq W$. Viz také Problém 3.4.6.

4.3.4 Problém Ať L je konečně generovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Ukažte, že lineární prostor $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$ všech lineárních zobrazení z prostoru L do $\mathbb{F}$ je také konečně generovaný.

✱ **Řešení problému 4.3.4** Řešením problému je správný důkaz toho, že lineární prostor $\mathsf{Lin}(L, \mathbb{F})$ všech lineárních zobrazení z prostoru L do $\mathbb{F}$ je také konečně generovaný.

✱ **Návod k řešení problému 4.3.4** Jsou (přinejmenším) dvě možnosti, jak postupovat:

(1) Elegantní způsob: ukažte, že L má konečnou dimensi a použijte Problém 4.2.3.

(2) Pracnější způsob: postupujte analogicky řešení Problému 4.2.3.

Téma 5

Matice jako lineární zobrazení

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: matice jako lineární zobrazení, algebra matic, geometrický význam matic.

5.1 Matice a operace s maticemi

5.1.1 Problém Ukažte, že pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$, $\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ a bázi $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ lineárního prostoru L_1 jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{g}(\vec{x})$, pro všechna $\vec{x}$ z L_1.

(2) $\mathbf{f}(\vec{b}_i) = \mathbf{g}(\vec{b}_i)$, pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

✱ **Řešení problému 5.1.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 5.1.1**

Důkaz toho, že z (1) plyne (2). Víme, že platí $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{g}(\vec{x})$, pro všechna $\vec{x}$ z L_1. Chceme dokázat, že $\mathbf{f}(\vec{b}_i) = \mathbf{g}(\vec{b}_i)$, pro všechna $i = 1, \ldots, n$. To je triviální: za $\vec{x}$ zvolme postupně $\vec{b}_1$, …, $\vec{b}_n$ a dostaneme tak požadované rovnosti $\mathbf{f}(\vec{b}_1) = \mathbf{g}(\vec{b}_1)$, …, $\mathbf{f}(\vec{b}_n) = \mathbf{g}(\vec{b}_n)$.

Důkaz toho, že ze (2) plyne (1). Víme, že platí $\mathbf{f}(\vec{b}_i) = \mathbf{g}(\vec{b}_i)$, pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Chceme dokázat, že $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{g}(\vec{x})$, pro všechna $\vec{x}$ z L_1. Zvolíme tedy libovolný vektor $\vec{x}$ z L_1 a dokážeme rovnost $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{g}(\vec{x})$.

Množina $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ je báze lineárního prostoru L_1. Proto pro vektor $\vec{x}$ existují jednoznačně určené skaláry x_1, …, x_n tak, že platí $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i$. Zobrazení $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ jsou lineární, a proto obě splňují princip superposice. Platí tedy rovnosti

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbf{f}(\vec{b}_i) \qquad \mathbf{g}(\vec{x}) = \mathbf{g}(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{b}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbf{g}(\vec{b}_i)$$

Protože platí $\mathbf{f}(\vec{b}_i) = \mathbf{g}(\vec{b}_i)$, pro všechna $i = 1, \ldots, n$, plyne z výše uvedených dvou rovností rovnost $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{g}(\vec{x})$.

5.1.2 Problém Lineární zobrazení $\mathbf{M} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ je určeno následujícími hodnotami

$$\mathbf{M} : \mathbf{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} : \mathbf{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} : \mathbf{e}_3 \mapsto \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Zapište $\mathbf{M}$ jako matici.

(2) Nalezněte funkční hodnotu $\mathbf{M}$ ve vektoru $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

✱ Řešení problému 5.1.2

(1) Hledaná matice je

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

✱ Řešení problému 5.1.2 Hledaná funkční hodnota je

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 2 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$$

✱ Komentář k problému 5.1.2

(1) Podle definice matice platí $\mathbf{M} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3)$. Proto platí

$$\mathbf{M} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Podle principu superposice platí rovnosti[1]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-3 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3) \\ &= -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

[1] Doporučuji podobné výpočty důkladně samostatně procvičit a zautomatisovat. Je třeba se dostat na takovou úroveň, že budete okamžitě psát $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-16) \\ (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 2 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$. Podobných příkladů si jistě vymyslíte sami veliké množství: kontrolu správnosti svých výpočtů proveďte pomocí libovolného dostupného online maticového kalkulátoru.

$$
\begin{aligned}
&= -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-16) \\ (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -21 \\ 2 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

5.1.3 Problém Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Z}_5$ spočtěte maticové součiny $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

✱ **Řešení problému 5.1.3** Hledané součiny jsou

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (4)$$

✱ **Komentář k problému 5.1.3** Protože

$$(\mathbb{Z}_5)^1 \xrightarrow{\mathbf{A}} (\mathbb{Z}_5)^3 \qquad (\mathbb{Z}_5)^3 \xrightarrow{\mathbf{B}} (\mathbb{Z}_5)^1$$

je

$$(\mathbb{Z}_5)^3 \xrightarrow{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} (\mathbb{Z}_5)^3 \qquad \text{a} \qquad (\mathbb{Z}_5)^1 \xrightarrow{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}} (\mathbb{Z}_5)^1$$

Výpočty provedeme standardním způsobem:[2]

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4) = (4)$$

5.1.4 Problém Ať $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované takto

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{kde } x,\, y \text{ jsou libovolná reálná čísla}$$

Ukažte, že $\mathbf{f}$ není lineární zobrazení.

✱ **Řešení problému 5.1.4** Řešením problému je jednoduchý a správný protipříklad toho, že $\mathbf{f}$ porušuje některou z podmínek linearity.

[2] Nezapomeňme, že počítáme v $\mathbb{Z}_5$.

✱ **Komentář k problému 5.1.4** Protože platí

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

nemůže $\mathbf{f}$ být lineární zobrazení.

Kdyby totiž $\mathbf{f}$ lineární zobrazení *bylo*, muselo by podle definice lineárního zobrazení platit

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = \mathbf{f}(0 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = 0 \cdot \mathbf{f}(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}) = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

a to je spor.

5.1.5 Problém Jsou zadány dvě matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ a $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \longrightarrow \mathbb{F}^r$. Ať $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p)$ je sloupcový zápis matice $\mathbf{B}$. Ukažte, že pro matici $\mathbf{X} : \mathbb{F}^p \longrightarrow \mathbb{F}^s$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, tj. diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^p \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[dr, "\mathbf{B}"'] & \mathbb{F}^s \arrow[d, "\mathbf{A}"] \\ & \mathbb{F}^r \end{tikzcd}$$

je komutativní.

(2) Jestliže $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p)$ je sloupcový zápis matice $\mathbf{X}$, pak platí současně rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$$

✱ **Řešení problému 5.1.5** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a správně vedený důkaz toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 5.1.5** Podle definice součinu matic platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p)$$

Rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ tedy platí právě tehdy, když platí rovnost $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p) = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p)$. Rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ tedy platí právě tehdy, když platí všechny rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$$

současně. To jsme chtěli dokázat.

5.1.6 Problém Ať α je libovolné reálné číslo. Ať lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je realisováno maticí[a]

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Protože $\mathbf{R}_\alpha$ je matice rotace, musí pro libovolná reálná čísla α, β platit rovnosti $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_{\alpha+\beta} = \mathbf{R}_\beta \cdot \mathbf{R}_\alpha$. Odvoďte z tohoto faktu součtové vzorce pro funkce sin a cos.

[a] Víme, že $\mathbf{R}_\alpha$ je matice rotace proti směru hodinových ručiček v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku o úhel α. Viz přednášku 4A.

✱ **Řešení problému 5.1.6** Pro libovolná reálná čísla α, β platí rovnosti

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

a

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

✱ **Komentář k problému 5.1.6** Pro libovolná reálná čísla α, β platí

$$\mathbf{R}_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Využijeme tedy rovnosti $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_{\alpha+\beta}$ a spočteme

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\beta &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta & \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Platí tedy rovnost

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta & -\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta & \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \end{pmatrix}$$

Tudíž pro libovolná reálná čísla α, β platí rovnosti

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

a

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

5.1.7 Problém Dejte geometrický význam reálné matici $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde a je nenulové reálné číslo.

✱ **Řešení problému 5.1.7** Matice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *zkosí* druhou souřadnicovou osu.

✱ **Komentář k problému 5.1.7** Geometrickou interpretaci získáme pozorováním toho, jak matice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zpracovává prvky kanonické báze. Následující obrázek je pro $a = 2$:

Matice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tedy *zkosí* druhou souřadnicovou osu. Proto se jí říká *matice zkosení* (anglicky: *shear matrix*).

5.1.8 Problém Pro libovolná reálná čísla a, b definujeme matici

$$\mathbf{M}_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(1) Ukažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti

$$\mathbf{M}_{a,b} + \mathbf{M}_{a',b'} = \mathbf{M}_{a+a',b+b'} = \mathbf{M}_{a',b'} + \mathbf{M}_{a,b}$$

(2) Ukažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti

$$\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{M}_{a',b'} = \mathbf{M}_{aa'-bb',a'b+ab'} = \mathbf{M}_{a',b'} \cdot \mathbf{M}_{a,b}$$

(3) Ukažte, že rovnosti

$$(\mathbf{M}_{a,b})^{-1} = \mathbf{M}_{\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot \mathbf{M}_{a,-b}$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, splňující $a^2 + b^2 \neq 0$.

(4) Vysvětlete, proč výše uvedené ukazuje, že počítání v tělese komplexních čísel lze realisovat počítáním s maticemi tvaru $\mathbf{M}_{a,b}$.[a]

[a]Této korespondence se velmi často využívá v počítačové grafice.

✱ Řešení problému 5.1.8

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti

$$\mathbf{M}_{a,b} + \mathbf{M}_{a',b'} = \mathbf{M}_{a+a',b+b'} = \mathbf{M}_{a',b'} + \mathbf{M}_{a,b}$$

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti

$$\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{M}_{a',b'} = \mathbf{M}_{aa'-bb',a'b+ab'} = \mathbf{M}_{a',b'} \cdot \mathbf{M}_{a,b}$$

(3) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že rovnosti

$$(\mathbf{M}_{a,b})^{-1} = \mathbf{M}_{\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot \mathbf{M}_{a,-b}$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, splňující $a^2 + b^2 \neq 0$.

(4) Řešením problému je správně nalezená korespondence matic tvaru $\mathbf{M}_{a,b}$ a komplexních čísel.

✱ Komentář k problému 5.1.8

(1) Ať a, b, a', b' jsou libovolná reálná čísla. Potom platí

$$\mathbf{M}_{a,b} + \mathbf{M}_{a',b'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & -b-b' \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{a+a',b+b'}$$

Protože sčítání matic je komutativní, platí i rovnost $\mathbf{M}_{a',b'} + \mathbf{M}_{a,b} = \mathbf{M}_{a+a',b+b'}$.

(2) Ať a, b, a', b' jsou libovolná reálná čísla. Potom platí

$$\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{M}_{a',b'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -ab'-a'b \\ a'b+ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{aa'-bb',a'b+ab'}$$

a

$$\mathbf{M}_{a',b'} \cdot \mathbf{M}_{a,b} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -ab'-a'b \\ a'b+ab' & -bb'+aa' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{aa'-bb',a'b+ab'}$$

(3) Ať a, b, a', b' jsou libovolná reálná čísla. Abychom ukázali rovnost

$$(\mathbf{M}_{a,b})^{-1} = \mathbf{M}_{\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}}$$

je nutné a stačí ověřit rovnosti

$$\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{M}_{\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}} = \mathbf{E}_2 \qquad \mathbf{M}_{\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}} \cdot \mathbf{M}_{a,b} = \mathbf{E}_2$$

(a) Platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{M}_{\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} & \dfrac{ab-ba}{a^2+b^2} \\ \dfrac{ab-ba}{a^2+b^2} & \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{E}_2
\end{aligned}$$

(b) Platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}} \cdot \mathbf{M}_{a,b} &= \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ -\dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} & \dfrac{ab-ba}{a^2+b^2} \\ \dfrac{ab-ba}{a^2+b^2} & \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{E}_2
\end{aligned}$$

(4) Uvažujme o korespondenci

$$\mathbf{M}_{a,b} \leftrightsquigarrow (a+bi)$$

To jest, každou matici $\mathbf{M}_{a,b}$ chápejme jako „zakódování“ komplexního čísla $a + bi$. Podle bodů (1)–(3) toto „zakódování“ respektuje všechny potřebné operace, tj. jestliže

$$\mathbf{M}_{a,b} \leftrightsquigarrow (a+bi) \quad \text{a} \quad \mathbf{M}_{a',b'} \leftrightsquigarrow (a'+b'i)$$

potom platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{a,b} + \mathbf{M}_{a',b'} &\leftrightsquigarrow (a+bi) + (a'+b'i) \\
\mathbf{M}_{a,b} \cdot \mathbf{M}_{a',b'} &\leftrightsquigarrow (a+bi) \cdot (a'+b'i) \\
(\mathbf{M}_{a,b})^{-1} &\leftrightsquigarrow (a+bi)^{-1} \quad \text{pro } a, b \text{ splňující } a^2+b^2 \neq 0
\end{aligned}$$

kde pro poslední korespondenci využíváme toho, že v $\mathbb{C}$ platí

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

pro všechna reálná čísla a, b splňující $a^2 + b^2 \neq 0$.

5.2 Problémy s návodem k řešení

5.2.1 Problém Ukažte, že pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ z rovnosti $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_2$ *neplyne nutně* ani $\mathbf{A} = \mathbf{E}_2$, ani $\mathbf{A} = -\mathbf{E}_2$.[a]

[a]Porovnejte to se známým faktem: je-li a reálné číslo, pro které platí $a^2 = 1$, potom $a = 1$ nebo $a = -1$.

✱ **Řešení problému 5.2.1** Řešením problému je nalezení matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, která splňuje $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_2$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}_2$, $\mathbf{A} \neq -\mathbf{E}_2$. Například[3] $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

✱ **Návod k řešení problému 5.2.1** Označte $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Pokud platí $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$, pak musí platit

$$a^2 + bc = 1 \qquad b(a+d) = 0 \qquad c(a+d) = 0 \qquad d^2 + bc = 1$$

Ukažte, že tyto rovnosti jsou splněny například pro

$$a = 1 \qquad b = 0 \qquad c = 0 \qquad d = -1$$

5.2.2 Problém Pro libovolné reálné číslo t definujeme

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad \text{(takzvaný } \textit{hyperbolický sinus} \text{ čísla } t)$$

a

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{(takzvaný } \textit{hyperbolický cosinus} \text{ čísla } t)$$

Dále pro libovolné reálné číslo t definujeme matici

$$\mathbf{H}_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

(1) Ukažte, že jakýkoli bod v $\mathbb{R}^2$ tvaru $\begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ leží na kladné větvi jednotkové hyperboly. To jest: bod v $\mathbb{R}^2$ tvaru $\begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ leží na křivce s rovnicí $x^2 - y^2 = 1$, kde $x > 0$.

(2) Ukažte, že pro libovolná reálná čísla t, u platí rovnosti

$$\mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_u = \mathbf{H}_{t+u} = \mathbf{H}_u \cdot \mathbf{H}_t$$

✱ **Řešení problému 5.2.2**

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz nerovnosti $\cosh t > 0$ pro libovolné reálné číslo t a správně vedený důkaz rovnosti $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ pro libovolné reálné číslo t.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz rovností

$$\sinh(t+u) = \sinh t \cdot \cosh u + \cosh t \cdot \sinh u$$

a

$$\cosh(t+u) = \cosh t \cdot \cosh u + \sinh t \cdot \sinh u$$

pro libovolná reálná čísla t, u a jejich využití pro důkaz rovností $\mathbf{H}_t \cdot \mathbf{H}_u = \mathbf{H}_{t+u}$ a $\mathbf{H}_u \cdot \mathbf{H}_t = \mathbf{H}_{t+u}$.

✱ **Návod k řešení problému 5.2.2**

[3]Uvědomte si geometrickou interpretaci matice $\mathbf{A}$ — jde o matici reflexe podle osy x a rovnost $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}_2$ lze interpretovat jako evidentní tvrzení: *složení dvou reflexí podle osy x je identické zobrazení.*

(1) Ukažte, že pro libovolné reálné číslo t platí nerovnost $\cosh t > 0$. K tomu je třeba jen znát nerovnost $e^t > 0$ pro libovolné reálné číslo t a znát vlastnosti sčítání kladných reálných čísel.
Ukažte, že pro libovolné reálné číslo t, platí rovnost $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. K tomu je třeba jen umět umocnit dvojčlen na druhou, umět sečíst zlomky a znát rovnosti $e^0 = 1$, $(e^t)^2 = e^{2t}$ pro libovolné reálné číslo t.

(2) K důkazu rovností

$$\sinh(t + u) = \sinh t \cdot \cosh u + \cosh t \cdot \sinh u$$

a

$$\cosh(t + u) = \cosh t \cdot \cosh u + \sinh t \cdot \sinh u$$

je třeba jen umět násobit dvojčleny a znát rovnost $e^{t+u} = e^t \cdot e^u$ pro libovolná reálná čísla t a u.

5.2.3 Problém Pro libovolná reálná čísla a, b definujeme matici[a]

$$\mathbf{N}_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

(1) Ukažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti

$$\mathbf{N}_{a,b} + \mathbf{N}_{a',b'} = \mathbf{N}_{a+a',b+b'} = \mathbf{N}_{a',b'} + \mathbf{N}_{a,b}$$

(2) Ukažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti[b]

$$\mathbf{N}_{a,b} \cdot \mathbf{N}_{a',b'} = \mathbf{N}_{aa',a'b+ab'} = \mathbf{N}_{a',b'} \cdot \mathbf{N}_{a,b}$$

(3) Ukažte, že rovnosti

$$(\mathbf{N}_{a,b})^{-1} = \mathbf{N}_{\frac{1}{a},\frac{-b}{a^2}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{-b}{a^2} \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \cdot \mathbf{N}_{a,-b}$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, kde $a \neq 0$.

[a] Podobně jako v Problému 5.1.8 lze mluvit o korespondenci matic tvaru $\mathbf{N}_{a,b}$ s jistými „zobecněnými komplexními čísly“. Těmto číslům se často říká *dual scalars* a využívají se například v robotice. Úplně přesně jsou *dual scalars* faktorový okruh $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ všech zbytků po dělení polynomem x^2. To je ovšem *nepovinná* znalost.

[b] Speciálně: pro libovolné reálné číslo b platí rovnost $(\mathbf{N}_{0,b})^2 = \mathbf{O}_{2,2}$. Získáváme tedy příklady *nenulových* matic, jejichž druhá mocnina je *nulová* matice. Provnejte tento fakt se známým tvrzením z reálných čísel: jestliže a je nenulové reálné číslo, potom a^2 je nenulové reálné číslo.

✱ Řešení problému 5.2.3

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti

$$\mathbf{N}_{a,b} + \mathbf{N}_{a',b'} = \mathbf{N}_{a+a',b+b'} = \mathbf{N}_{a',b'} + \mathbf{N}_{a,b}$$

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro libovolná reálná čísla a, b, a', b' platí rovnosti

$$\mathbf{N}_{a,b} \cdot \mathbf{N}_{a',b'} = \mathbf{N}_{aa',a'b+ab'} = \mathbf{N}_{a',b'} \cdot \mathbf{N}_{a,b}$$

(3) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že rovnosti

$$(\mathbf{N}_{a,b})^{-1} = \mathbf{N}_{\frac{1}{a},\frac{-b}{a^2}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & \dfrac{-b}{a^2} \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \cdot \mathbf{N}_{a,-b}$$

platí pro všechna reálná čísla a, b, kde $a \neq 0$.

✱ Návod k řešení problému 5.2.3 Postupujte analogicky Problému 5.1.8.

5.2.4 Problém Ať $\mathbb{F}$ je libovolné těleso. Ať $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice nad $\mathbb{F}$ stejných rozměrů. Dokažte, že pokud $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, potom pro libovolné přirozené číslo n platí rovnost

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \mathbf{A}^{n-k} \cdot \mathbf{B}^k$$

kde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

✱ **Řešení problému 5.2.4** Řešením problému je správně vedený důkaz platnosti rovnosti

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \mathbf{A}^{n-k} \cdot \mathbf{B}^k$$

pro libovolné přirozené číslo n a libovolné čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ nad $\mathbb{F}$, pro které platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

✱ **Návod k řešení problému 5.2.4** Jde o zobecnění *binomické věty*, viz Problém 1.1.10.[4] Rovnost pro matice dokažte analogicky (tj., matematickou indukcí).

[4]Pochopitelně: v případě reálných čísel a, b rovnost $ab = ba$ *platí*.

Téma 6

Chování lineárních zobrazení

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: Výpočty s maticemi. Monomorfismus, epimorfismus, isomorfismus. Jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení.

6.1 Maticové výpočty

6.1.1 Problém Popište maticí lineární zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, pro které platí

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Spočtěte hodnotu $\mathbf{A}\mathbf{x}$ pro vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 6.1.1** Hledaná matice je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 11 \\ -3 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a hledaná hodnota je

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

✱ **Komentář k problému 6.1.1** Podle definice je sloupcový zápis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ lineárního zobrazení $\mathbf{A}$ dán hodnotami $(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3, \mathbf{A}\mathbf{e}_4)$. Proto je

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3, \mathbf{A}\mathbf{e}_4) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 11 \\ -3 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Protože $\mathbf{A}$ je lineírní zobrazení, splňuje princip superposice. To znamená, že pro

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 2 \cdot \mathbf{e}_3 + 0 \cdot \mathbf{e}_4$$

je

$$\mathbf{Ax} = 1 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2 + 2 \cdot \mathbf{a}_3 + 0 \cdot \mathbf{a}_4 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.1.2 Problém Pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ v $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_5)^2)$ spočtěte lineární kombinaci $2\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 6.1.2** Hledaná lineární kombinace je

$$2\mathbf{A} + 4\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

✱ **Komentář k problému 6.1.2** Množina $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_5)^3, (\mathbb{Z}_5)^2)$ je lineární prostor všech matic, které mají 3 sloupce, 2 řádky, a jejichž položky jsou skaláry ze $\mathbb{Z}_5$. Tento lineární prostor je nad tělesem $\mathbb{Z}_5$: příslušné operace jsou sčítání matic a násobení matice skalárem ze $\mathbb{Z}_5$. Proto má hledaná lineární kombinace smysl a výsledkem je matice

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A} + 4\mathbf{B} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 4 \\ 4 \cdot 4 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+4 & 1+2 & 0+1 \\ 2+1 & 3+2 & 4+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ve výše uvedeném se samozřejmě počítá v $\mathbb{Z}_5$.

6.1.3 Problém Rozhodněte, zda matice

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 6.1.3** Ano, matice $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_6$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Komentář k problému 6.1.3** Množina $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ je lineární prostor všech matic, které mají 2 sloupce, 3 řádky, a jejichž položky jsou skaláry z $\mathbb{R}$. Tento lineární prostor je nad tělesem $\mathbb{R}$: příslušné operace jsou sčítání matic a násobení matice skalárem z $\mathbb{R}$.

Ukážeme, že $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_6$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ nad $\mathbb{R}$.

(1) Protože pro každou matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

z $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ platí rovnost

$$\mathbf{M} = a \cdot \mathbf{B}_1 + b \cdot \mathbf{B}_2 + c \cdot \mathbf{B}_3 + d \cdot \mathbf{B}_4 + e \cdot \mathbf{B}_5 + f \cdot \mathbf{B}_6$$

platí také rovnost $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) = \mathsf{span}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_6)$. To znamená, že množina $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_6\}$ tvoří množinu generátorů lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

(2) Ukážeme, že množina $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_6\}$ je lineárně nezávislá množina v lineárním prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Ať tedy pro reálná čísla $a_1, \dots a_6$ platí rovnost

$$a_1 \cdot \mathbf{B}_1 + a_2 \cdot \mathbf{B}_2 + a_3 \cdot \mathbf{B}_3 + a_4 \cdot \mathbf{B}_4 + a_5 \cdot \mathbf{B}_5 + a_6 \cdot \mathbf{B}_6 = \mathbf{O}_{2,3}$$

kde

$$\mathbf{O}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nulový vektor v lineárním prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
Protože

$$a_1 \cdot \mathbf{B}_1 + a_2 \cdot \mathbf{B}_2 + a_3 \cdot \mathbf{B}_3 + a_4 \cdot \mathbf{B}_4 + a_5 \cdot \mathbf{B}_5 + a_6 \cdot \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix}$$

musí tedy platit rovnost

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_2 & a_5 \\ a_3 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proto platí $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$ a $a_6 = 0$.
Ukázali jsme, že $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_6\}$ je lineárně nezávislá množina v lineárním prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Předchozí dva body ukazují, že $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_6\}$ je lineárně nezávislá množina generátorů lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. To znamená, že $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_6\}$ je báze lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

6.1.4 Problém Rozhodněte, zda lze spočíst $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou matice nad $\mathbb{R}$.
Pokud to lze, matici $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ spočtěte.

✱ **Řešení problému 6.1.4** Ano, matici $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ lze spočíst a platí

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 16 \\ -18 & -3 & -12 \\ 6 & 20 & 23 \end{pmatrix}$$

✱ **Komentář k problému 6.1.4** Platí

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbb{R}^2$$

a proto

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \mathbb{R}^2 \quad \text{a} \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})} \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{B}+\mathbf{C}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbb{R}^3$$

Tudíž je matice $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ definována a má 3 sloupce a 3 řádky.

(1) Výpočet matice $\mathbf{B}+\mathbf{C}$:

$$\mathbf{B}+\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Výpočet matice $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ 23 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 10 & 16 \\ -18 & -3 & -12 \\ 6 & 20 & 23 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6.2 Jádro a obraz lineárního zobrazení

6.2.1 Problém V tomto problému značí $\mathbb{R}[x]$ lineární prostor všech reálných polynomů v neurčité x, tento lineární prostor je nad tělesem $\mathbb{R}$.[a]

(1) Ukažte, že zobrazení $\mathbf{n} : p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}[x]$ do $\mathbb{R}[x]$. Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\mathbf{n}$. Z výpočtů odvoďte, že zobrazení $\mathbf{n}$ je monomorfismus, ale není epimorfismus.

(2) Ukažte, že zobrazení $\mathbf{e} : \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \mapsto \sum_{j=1}^{k} a_j x^{j-1}$, je lineární zobrazení z $\mathbb{R}[x]$ do $\mathbb{R}[x]$. Nalezněte jádro a obraz zobrazení $\mathbf{e}$. Z výpočtů odvoďte, že zobrazení $\mathbf{e}$ je epimorfismus, ale není monomorfismus.

[a] Důležité: možnost najít zobrazení s vlastnostmi (1) a (2) je způsobena tím, že $\mathbb{R}[x]$ *nemá* konečnou dimensi. Viz Přednášku 3A.

✱ Řešení problému 6.2.1

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $\mathbf{n}$ je lineární zobrazení. Dále:

$$\ker(\mathbf{n}) = \{0\} \qquad \operatorname{im}(\mathbf{n}) = \{0\} \cup \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{absolutní člen polynomu } p(x) \text{ je } 0\}$$

Protože $\ker(\mathbf{n}) = \{0\}$, je $\mathbf{n}$ monomorfismus. Protože $\operatorname{im}(\mathbf{n}) \neq \mathbb{R}[x]$, zobrazení $\mathbf{n}$ není epimorfismus.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $\mathbf{e}$ je lineární zobrazení. Dále:

$$\ker(\mathbf{e}) = \{a \mid a \in \mathbb{R}\} \qquad \operatorname{im}(\mathbf{e}) = \mathbb{R}[x]$$

Protože $\operatorname{im}(\mathbf{e}) = \mathbb{R}[x]$, je $\mathbf{e}$ epimorfismus. Protože $\ker(\mathbf{e}) \neq \{0\}$, zobrazení $\mathbf{e}$ není monomorfismus.

✱ Komentář k problému 6.2.1

(1) (a) Linearita zobrazení $\mathbf{n}$. Stačí použít princip superposice: pro jakákoli reálná čísla a, b, a jakékoli polynomy $p(x)$, $q(x)$ z $\mathbb{R}[x]$ platí:

$$\mathbf{n}(a \cdot p(x) + b \cdot q(x)) = x \cdot (a \cdot p(x) + b \cdot q(x)) = a \cdot x \cdot p(x) + b \cdot x \cdot q(x) = a \cdot \mathbf{n}(p(x)) + b \cdot \mathbf{n}(q(x))$$

Ukázali jsme, že zobrazení $\mathbf{n}$ je lineární.

(b) Výpočet $\ker(\mathbf{n})$. Hledáme popis množiny $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid x \cdot p(x) = 0\}$. Existuje jediný polynom $p(x)$ v $\mathbb{R}[x]$, pro který platí $x \cdot p(x) = 0$; sice $p(x) = 0$. Proto $\ker(\mathbf{n}) = \{0\}$.

(c) Výpočet $\mathrm{im}(\mathbf{n})$. Hledáme popis množiny $\{x \cdot p(x) \mid p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Je-li $p(x) = 0$, pak $x \cdot p(x) = 0$. Je-li $p(x) \neq 0$, pak absolutní člen polynomu $x \cdot p(x)$ je 0. Proto

$$\mathrm{im}(\mathbf{n}) = \{0\} \cup \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{absolutní člen polynomu } p(x) \text{ je } 0\}$$

(d) Protože $\ker(\mathbf{n}) = \{0\}$, je $\mathbf{n}$ monomorfismus. Protože $\mathrm{im}(\mathbf{n}) \neq \mathbb{R}[x]$, zobrazení $\mathbf{n}$ není epimorfismus.

(2) (a) Linearita zobrazení $\mathbf{e}$. Stačí použít princip superposice: ukážeme, že pro jakákoli reálná čísla a, b, a jakékoli polynomy $p(x)$, $q(x)$ z $\mathbb{R}[x]$ platí rovnost

$$\mathbf{e}(a \cdot p(x) + b \cdot q(x)) = a \cdot \mathbf{e}(p(x)) + b \cdot \mathbf{e}(q(x))$$

Označme

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$$

a dodefinujme koeficienty v $p(x)$, $q(x)$ tak, abychom mohli předpokládat, že $l = k$.[1] Potom

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(a \cdot p(x) + b \cdot q(x)) &= \mathbf{e}(a \cdot \sum_{j=0}^{k} a_j x^j + b \cdot \sum_{j=0}^{k} b_j x^j) \\
&= \mathbf{e}(\sum_{j=0}^{k} (a \cdot a_j + b \cdot b_j) x^j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (a \cdot a_j + b \cdot b_j) x^{j-1} \\
&= a \cdot \sum_{j=1}^{k} a_j x^{j-1} + b \cdot \sum_{j=1}^{k} b_j x^{j-1} \\
&= a \cdot \mathbf{e}(p(x)) + b \cdot \mathbf{e}(q(x))
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že zobrazení $\mathbf{e}$ je lineární.

(b) Výpočet $\ker(\mathbf{e})$. Ať $p(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j x^j$ Polynom tvaru $\mathbf{e}(p(x)) = \sum_{j=1}^{k} a_j x^{j-1}$ je nulový právě tehdy, když platí $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $\ldots$, $a_k = 0$. To znamená, že $p(x) = a_0$. Ukázali jsme, že platí rovnost $\ker(\mathbf{e}) = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(c) Výpočet $\mathrm{im}(\mathbf{e})$. Pro výraz tvaru $p(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ platí $\mathbf{e}(0 + \sum_{j=0}^{k} a_j x^{j+1}) = p(x)$. Ukázali jsme, že platí rovnost $\mathrm{im}(\mathbf{e}) = \mathbb{R}[x]$.

(d) Protože $\mathrm{im}(\mathbf{e}) = \mathbb{R}[x]$, je $\mathbf{e}$ epimorfismus. Protože $\ker(\mathbf{e}) \neq \{0\}$, zobrazení $\mathbf{e}$ není monomorfismus.

6.2.2 Problém V tomto problému pracujeme s lineárním prostorem $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ všech matic, které mají 2 sloupce, 2 řádky, a jejichž položky jsou skaláry z $\mathbb{R}$.

Ať $\mathbf{A}$ je pevně zadaná matice v $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a definujte zobrazení

$$\mathbf{f} : \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

předpisem $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$.

(1) Rozhodněte, zda $\mathbf{f}$ je lineární zobrazení.

(2) Ukažte, že $\mathbf{f}$ je monomorfismus, když $\mathbf{A}$ je regulární matice.

(3) Ukažte, že $\mathbf{f}$ je epimorfismus, když $\mathbf{A}$ je regulární matice.

[1] To jest, například pro $p(x) = 2x$ a $q(x) = 3x^2 - 4$ pišme $p(x) = 0x^2 + 2x + 0$ a $q(x) = 3x^2 + 0x - 4$.

✱ Řešení problému 6.2.2

(1) Ano, zobrazení $\mathbf{f}$ je lineární.

(2) Řešením tohoto problému je správně zapsaný důkaz.

(3) Řešením tohoto problému je správně zapsaný důkaz.

✱ Komentář k problému 6.2.2

(1) Musíme rozhodnout, zda platí následující dvě podmínky

(a) Pro libovolné dvě matice $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ z $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ platí rovnost $\mathbf{f}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{X}_2)$.

(b) Pro libovolnou matici $\mathbf{X}$ z $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a libovolné reálné číslo a platí rovnost $\mathbf{f}(a \cdot \mathbf{X}) = a \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X})$.

z definice lineárního zobrazení.

Postupujeme takto:

(a) Zvolme libovolné dvě matice $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ z $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Potom platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{A} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{X}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A}$$

a my tedy máme ukázat, že platí rovnost

$$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A}$$

Označme jako $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ sloupcový zápis matice $\mathbf{A}$. Potom platí

$$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{A} = ((\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{a}_1, (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{a}_2) = (\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{a}_2)$$

a

$$\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{a}_2) + (\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{a}_2) = (\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{a}_2)$$

Rovnost

$$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{A}$$

tedy platí.

(b) Zvolme libovolnou matici $\mathbf{X}$ z $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a libovolné reálné číslo a. Potom platí

$$\mathbf{f}(a \cdot \mathbf{X}) = (a \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{A} \qquad a \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}) = a \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A})$$

a my tedy máme ukázat, že platí rovnost

$$(a \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{A} = a \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A})$$

Označme jako $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ sloupcový zápis matice $\mathbf{A}$. Potom platí

$$(a \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{A} = (a \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_1, a \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_2) = a \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_1, \mathbf{X} \cdot \mathbf{a}_2) = a \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A})$$

Rovnost

$$(a \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{A} = a \cdot (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A})$$

tedy platí.

Ukázali jsme, že zobrazení $\mathbf{f}$ je lineární.

(2) Ať $\mathbf{A}$ je regulární matice. Potřebujeme dokázat, že potom platí

$$\ker(\mathbf{f}) = \{\mathbf{O}_{2,2}\}$$

Protože $\{\mathbf{O}_{2,2}\} \subseteq \ker(\mathbf{f})$ platí vždy, stačí ukázat, že platí $\ker(\mathbf{f}) \subseteq \{\mathbf{O}_{2,2}\}$.

Předpokládejme, že $\mathbf{X}$ je v $\ker(\mathbf{f})$. To znamená: předpokládejme, že platí $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{O}_{2,2}$. To znamená: předpokládejme, že platí $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}_{2,2}$. Protože $\mathbf{A}$ je regulární, existuje $\mathbf{A}^{-1}$. Takže platí rovnost $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{O}_{2,2} \cdot \mathbf{A}^{-1}$, neboli $\mathbf{X} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{O}_{2,2} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Takže $\mathbf{X} = \mathbf{O}_{2,2}$. To jsme chtěli dokázat.

(3) Protože podle bodu (2) víme, že pro regulární $\mathbf{A}$ je $\mathbf{f}$ je monomorfismus, je pro regulární $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathbf{f}$ epimorfismus. (Věta z přednášky: jestliže L má konečnou dimensi a jestliže $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$ je monomorfismus, pak je $\mathbf{f}$ epimorfismus.)

6.2.3 Problém Pro libovolné reálné α je zadáno lineární zobrazení

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{R}_\alpha} \mathbb{R}^2 \qquad \text{kde } \mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(1) Ukažte, že pro každé reálné α platí rovnosti $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_{-\alpha} = \mathbf{E}_2 = \mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{R}_\alpha$.

(2) Nalezněte jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení $\mathbf{R}_\alpha$.

✱ Řešení problému 6.2.3

(1) Řešením tohoto problému jsou dva výpočty: $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_{-\alpha} = \mathbf{E}_2$ a $\mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{E}_2$.

(2) Platí $\ker(\mathbf{R}_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\operatorname{im}(\mathbf{R}_\alpha) = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{def}(\mathbf{R}_\alpha) = 0$, $\operatorname{rank}(\mathbf{R}_\alpha) = 2$.

✱ Komentář k problému 6.2.3

(1) Použijeme definici násobení matic:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_{-\alpha} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili faktu, že cos je sudá funkce a sin je lichá funkce, a v poslední rovnosti jsme využili rovnosti $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pro všechna α.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{R}_\alpha &= \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili faktu, že cos je sudá funkce a sin je lichá funkce, a v poslední rovnosti jsme využili rovnosti $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pro všechna α.

(2) Lineární zobrazení $\mathbf{R}_\alpha$ je evidentně epimorfismus, protože pro jakýkoli vektor $\mathbf{y}$ existuje vektor $\mathbf{x}$ tak, že $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Vektor $\mathbf{x}$ nalezneme takto $\mathbf{x} = \mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{y}$. Potom

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{R}_\alpha \cdot (\mathbf{R}_{-\alpha} \cdot \mathbf{y}) = \underbrace{(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{R}_{-\alpha})}_{=\mathbf{E}_2} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}$$

To znamená, že $\operatorname{im}(\mathbf{R}_\alpha) = \mathbb{R}^2$ a tudíž $\operatorname{rank}(\mathbf{R}_\alpha) = 2$. Podle věty o dimensi jádra a obrazu platí $\operatorname{def}(\mathbf{R}_\alpha) = 0$. Proto platí $\ker(\mathbf{R}_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

6.2.4 Problém V tomto problému pracujeme s lineárním prostorem $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ všech matic, které mají 2 sloupce, 2 řádky, a jejichž položky jsou skaláry z $\mathbb{R}$.

Pro matici
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
a lineární zobrazení[a]
$$\mathbf{f} : \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \qquad \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$$
popište $\ker(\mathbf{f})$ jako lineární podprostor prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

[a] Podle Problému 6.2.2 víme, že $\mathbf{f}$ je lineární zobrazení.

✱ **Řešení problému 6.2.4** Platí
$$\ker(\mathbf{f}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix})$$

✱ **Komentář k problému 6.2.4** Označme
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

Potom
$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 2x_4 & x_2 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

Proto
$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{O}_{2,2} \quad \text{iff} \quad \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 2x_4 & x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proto pro matici $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$ platí $\mathbf{X} \in \ker(\mathbf{f})$ právě tehdy, když $x_1 + 2x_3 = 0$ a $x_2 + 2x_4 = 0$.

To znamená, že matice $\mathbf{X}$ musí mít tvar
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2r & r \\ -2s & s \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{kde } r,\ s \text{ jsou z } \mathbb{R}$$

Jinými slovy
$$\ker(\mathbf{f}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix})$$
což je (pochopitelně) lineární podprostor prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

6.2.5 Problém Pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nalezněte $\ker(\mathbf{A})$, když víte, že platí
$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 6.2.5** Platí $\ker(\mathbf{A}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$.

✱ **Komentář k problému 6.2.5** Podle zadání jsou *lineárně nezávislé* vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v $\mathrm{im}(\mathbf{A})$. To znamená, že platí
$$\mathbb{R}^2 = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathrm{im}(\mathbf{A})$$
a tudíž $\mathrm{im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^2$. Podle věty o dimensi jádra a obrazu platí rovnost $\dim(\mathbb{R}^3) = \mathrm{def}(\mathbf{A}) + \mathrm{rank}(\mathbf{A})$. Proto platí $\mathrm{def}(\mathbf{A}) = 1$.

Stačí tedy nalézt jeden nenulový vektor $\mathbf{v}$ v $\mathbb{R}^3$, pro který platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{o}$. Potom totiž musí platit $\ker(\mathbf{A}) = \mathsf{span}(\mathbf{v})$. Protože platí rovnost[2]

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

potom, podle definice zobrazení $\mathbf{A}$, platí

$$1 \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože $\mathbf{A}$ je lineární zobrazení, platí rovnost

$$\mathbf{A} \cdot \left(1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

neboli

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Můžeme tedy zvolit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a platí $\ker(\mathbf{A}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$.

6.2.6 Problém Ukažte, že pro libovolnou regulární matici $\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^r$ a libovolnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ platí $\operatorname{def}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{def}(\mathbf{A})$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$.

✱ **Řešení problému 6.2.6** Řešením tohoto problému je správně zapsaný důkaz.

✱ **Komentář k problému 6.2.6** Nejprve ukážeme, že platí $\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$.

(1) Inkluse $\ker(\mathbf{A}) \subseteq \ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$.
Zvolme $\mathbf{x}$ v $\ker(\mathbf{A})$. To znamená, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$. Potom $\mathbf{M} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$, tedy $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$. Ukázali jsme, že $\mathbf{x}$ je v $\ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$.

(2) Inkluse $\ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) \subseteq \ker(\mathbf{A})$.
Zvolme $\mathbf{x}$ v $\ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$. To znamená, že $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$, tedy, že $\mathbf{M} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{o}$. Protože $\mathbf{M}$ je regulární, platí $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{o}$. Takže $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$. Ukázali jsme, že $\mathbf{x}$ je v $\ker(\mathbf{A})$.

Protože $\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$, platí podle definice defektu $\operatorname{def}(\mathbf{A}) = \operatorname{def}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$. Podle věty o dimensi jádra a obrazu pak platí $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$.

6.3 Problémy s návodem k řešení

6.3.1 Problém Pokud to jde, spočtěte $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ pro reálné matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[2] Měli jsme „štěstí“: úloha je zadána jednoduše. Později budeme umět vyřešit soustavu rovnic $x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 6.3.1**

(1) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) Součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ není definován.

✱ **Návod k řešení problému 6.3.1** Postupujte podle definice násobení matic jako skládání lineárních zobrazení.

6.3.2 Problém Ukažte, že pro každé přirozené číslo n platí rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde, pro jakoukoli matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definujeme

$$\mathbf{M}^n = \begin{cases} \mathbf{E}_2 & \text{pro } n = 0 \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{n-1} & \text{pro } n > 0 \end{cases}$$

✱ **Řešení problému 6.3.2** Řešením problému je správně zapsaný důkaz matematickou indukcí.

✱ **Návod k řešení problému 6.3.2** Použijte správně princip matematické indukce:

(1) Základní krok: pro $n = 0$ dokažte danou rovnost. (To je triviální.)

(2) Zvolte pevně (ale libovolně) přirozené číslo n.

(a) Indukční předpoklad: předpokládejte, že rovnost platí pro pevné přirozené číslo n.

(b) Indukční krok: dokažte, že rovnost platí pro přirozené číslo $n + 1$ a využijte při tom indukční předpoklad.

6.3.3 Problém Ať a je pevné reálné číslo. Rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ 1 \end{pmatrix}$$

interpretujte jako *posunutí* bodu $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ do bodu $\begin{pmatrix} x + a \\ 1 \end{pmatrix}$, tedy jako posun po přímce s rovnicí $y = 1$. (Nakreslete si obrázek.)

Vymyslete matici, která realisuje *posunutí* bodu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ do bodu $\begin{pmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 6.3.3** Hledaná matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✱ **Návod k řešení problému 6.3.3** Použijte definici násobení matice sloupcovým vektorem.

6.3.4 Problém Ukažte, že pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Pro jakoukoli matici $\mathbf{B} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ má maticová rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ jediné řešení.

(2) Maticová rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_n$ má jediné řešení.

(3) Matice $\mathbf{A}$ je regulární.

✱ **Řešení problému 6.3.4** Řešením tohoto problému je správně zapsaný důkaz.

✱ **Návod k řešení problému 6.3.4** Jde o zobecnění následujícího tvrzení pro reálná čísla:

> Ať a je pevné reálné číslo. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:
>
> (1) Pro libovolné reálné číslo b má rovnice $ax = b$ jediné řešení.
>
> (2) Rovnice $ax = 1$ má jediné řešení.
>
> (3) Existuje a^{-1}.

Strategie důkazu tvrzení pro matice je dokázat (1) $\longrightarrow\!\triangleright$ (2) a (3) $\longrightarrow\!\triangleright$ (1) (obojí je velmi jednoduché). Zbývá ukázat (2) $\longrightarrow\!\triangleright$ (3), *kde nelze použít komutativitu násobení*. Ukažte, že ze (2) plyne, že matice $\mathbf{A}$ je monomorfismus, tudíž isomorfismus.

6.3.5 Problém Jsou dány lineární prostory L_1, L_2, L_3 nad $\mathbb{F}$ a lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$, $\mathbf{g} : L_2 \longrightarrow L_3$. O následujících tvrzeních rozhodněte, zda platí nebo nikoli:

(1) Jestliže $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ je monomorfismus, potom $\mathbf{f}$ je monomorfismus.

(2) Jestliže $\mathbf{f}$ je monomorfismus, potom $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}$ je monomorfismus.

✱ **Řešení problému 6.3.5**

(1) Toto tvrzení platí. Řešením tohoto problému je správně zapsaný důkaz.

(2) Toto tvrzení neplatí. Řešením tohoto problému je správně zapsaný protipříklad.

✱ **Návod k řešení problému 6.3.5**

(1) K řešení problému využijte definici monomorfismu.

(2) Postupujte elegantně: zvolte jako $\mathbf{f}$ identické lineární zobrazení (například) na lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$. Potom pro konstrukci protipříkladu zvolte vhodné lineární zobrazení $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a využijte toho, že (v dané situaci) musí platit $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g}$.

6.3.6 Problém Ať L je *libovolný* lineární prostor nad *libovolným* tělesem $\mathbb{F}$. Ať V a W jsou dva lineární podprostory prostoru L a ať libovolný vektor $\vec{x}$ z L lze *jednoznačně* zapsat jako součet

$$\vec{x} = \vec{x}_V + \vec{x}_W$$

kde $\vec{x}_V$ je ve V a $\vec{x}_W$ je ve W.[a] Definujte zobrazení

$$\mathbf{p}_V : L \longrightarrow L, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}_V$$

a dokažte:

(1) Zobrazení $\mathbf{p}_V$ je lineární.

(2) Platí $\ker(\mathbf{p}_V) = W$ a $\operatorname{im}(\mathbf{p}_V) = V$.

(3) Platí $\mathbf{p}_V \cdot \mathbf{p}_V = \mathbf{p}_V$.

Zobrazení $\mathbf{p}_V$ říkáme *projekce* na V ve směru W.

Upozornění: L je prostor nad *libovolným* tělesem $\mathbb{F}$, nikde nemluvíme o *ortogonální* projekci. Porovnejte s Problémem 13.1.5.

[a] Tato situace se značí $L = V \oplus W$, tj. L je direktním součtem V a W, viz AKLA, Definici 1.6.13.

✱ **Řešení problému 6.3.6** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že platí (1)–(3).

✱ **Návod k řešení problému 6.3.6** Využívejte toho, že rozklad $\vec{x} = \vec{x}_V + \vec{x}_W$ kde $\vec{x}_V$ je ve V a $\vec{x}_W$ je ve W, je pro každý vektor $\vec{x}$ z L jednoznačně určen.

6.3.7 Problém Ať L je *libovolný* lineární prostor nad *libovolným* tělesem $\mathbb{F}$, ve kterém platí $-1 \neq 1$.[a] Ať V a W jsou dva lineární podprostory prostoru L a ať libovolný vektor $\vec{x}$ z L lze *jednoznačně* zapsat jako součet

$$\vec{x} = \vec{x}_V + \vec{x}_W$$

kde $\vec{x}_V$ je ve V a $\vec{x}_W$ je ve W.[b] Definujte zobrazení

$$\mathbf{r}_V : L \longrightarrow L, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}_V - \vec{x}_W$$

a dokažte:

(1) Zobrazení $\mathbf{r}_V$ je lineární.

(2) Platí: $\mathbf{r}_V(\vec{x}) = \vec{x}$ právě tehdy, když $\vec{x}$ je ve V.

(3) Platí $\mathbf{r}_V \cdot \mathbf{r}_V = \mathbf{id}_L$.

Zobrazení $\mathbf{r}_V$ říkáme *reflexe* podle V ve směru W.

[a] To jest, těleso $\mathbb{F}$ *nemá* charakteristiku 2, viz AKLA, Definici 11.5.3.

[b] Tato situace se značí $L = V \oplus W$, tj. L je direktním součtem V a W, viz AKLA, Definici 1.6.13.

✱ **Řešení problému 6.3.7** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že platí (1)–(3).

✱ **Návod k řešení problému 6.3.7** Využívejte toho, že rozklad $\vec{x} = \vec{x}_V + \vec{x}_W$ kde $\vec{x}_V$ je ve V a $\vec{x}_W$ je ve W, je pro každý vektor $\vec{x}$ z L jednoznačně určen.

6.3.8 Problém Nalezněte nějaký isomorfismus $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tak, aby $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}_3$.

✱ **Řešení problému 6.3.8** Řešením tohoto problému je příklad lineárního zobrazení $\mathbf{A}$ a důkaz toho, že $\mathbf{A}$ je isomorfismus, pro který platí $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}_3$.

✱ **Návod k řešení problému 6.3.8** Označte jako $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ sloupcový zápis hledané matice $\mathbf{A}$. Podle věty o dimensi jádra a obrazu je $\mathbf{A}$ isomorfismus právě tehdy, když $\mathsf{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \mathbb{R}^3$. Nerovnost $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}_3$ platí právě tehdy, když $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \neq (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

6.3.9 Problém Je zadáno zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ předpisem

$$\mathbf{f}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$$

(1) Dokažte, že $\mathbf{f}$ je lineární zobrazení.

(2) Nalezněte $\ker(\mathbf{f})$, $\operatorname{im}(\mathbf{f})$, $\operatorname{def}(\mathbf{f})$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{f})$.

✱ **Řešení problému 6.3.9**

(1) Řešením problému je ověření podmínek z definice lineárního zobrazení.

(2) Platí

$$\ker(\mathbf{f}) = \mathsf{span}(1) \qquad \operatorname{def}(\mathbf{f}) = 1 \qquad \operatorname{im}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \qquad \operatorname{rank}(\mathbf{f}) = 3$$

✱ **Návod k řešení problému 6.3.9**

(1) Použijte definici linearity a ověřte, že $\mathbf{f}$ respektuje sčítání a násobení skalárem.

(2) Nejprve nalezněte $\ker(\mathbf{f})$. Použijte větu o dimensi jádra a obrazu. Poté nalezněte $\operatorname{im}(\mathbf{f})$.

6.3.10 Problém Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Ať matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^r$ je regulární a ať matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ je libovolná. Potom platí rovnost $\operatorname{im}(\mathbf{A}) = \operatorname{im}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$.

✱ **Řešení problému 6.3.10** Tvrzení neplatí.[3] Řešením tohoto problému je správně zapsaný (pokud možno jednoduchý) protipříklad: regulární matice $\mathbf{M}$ a matice $\mathbf{A}$ a důkaz toho, že pro tyto matice platí $\mathrm{im}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{im}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$.

✱ **Návod k řešení problému 6.3.10** Pracujte v prostorech malé dimense a využijte své geometrické představivosti. Protipříklad lze zkonstruovat pro $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Co když $\mathbf{M}$ je matice rotace?

[3] Porovnejte s Problémem 6.2.6, kde jsme ukázali, že v této situaci platí rovnost $\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{M} \cdot \mathbf{A})$.

Téma 7

Matice lineárních zobrazení

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) **A8B01LAG**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: matice lineárního zobrazení, matice transformace souřadnic.

Důležité poznámky. Výpočty jsou založeny na následujících dvou teoretických výsledcích:

(1) Lineární zobrazení je jednoznačně určeno svými hodnotami na bázi. To znamená, že pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$, $\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ a bázi $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ lineárního prostoru L_1 jsou následující podmínky ekvivalentní:

(a) $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{g}(\vec{x})$, pro všechna $\vec{x}$ z L_1.

(b) $\mathbf{f}(\vec{b}_i) = \mathbf{g}(\vec{b}_i)$, pro všechna $i = 1, \dots, n$.

Viz přednášku 4A nebo Problém 5.1.1.

(2) Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$ s uspořádanou bází $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$. Potom pro lineární zobrazení $\mathbf{coord}_B : L \longrightarrow \mathbb{F}^n$ platí rovnosti

$$\mathbf{coord}_B(\vec{b}_1) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{coord}_B(\vec{b}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{coord}_B(\vec{b}_n) = \mathbf{e}_n$$

To plyne okamžitě z definice vektoru souřadnic vzhledem k uspořádané bázi (viz přednášku 3B).

Speciálně, protože platí

$$\mathbf{coord}_{K_n}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{coord}_{K_n}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{coord}_{K_n}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n$$

platí podle bodu (1) rovnost $\mathbf{coord}_{K_n} = \mathbf{id}$.

7.1 Matice lineárního zobrazení

7.1.1 Problém V $\mathbb{R}^2$ jsou zadány vektory $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a vektory $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(1) Ukažte, že seznam $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ tvoří uspořádanou bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

(2) Ukažte, že existuje jediné lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, pro které platí $\mathbf{f}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{v}_1$ a $\mathbf{f}(\mathbf{b}_2) = \mathbf{v}_2$.

(3) Nalezněte matici $\mathbf{F}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a K_2.

(4) Nalezněte matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi K_2 (tj. nalezněte matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím K_2 a K_2).

✱ Řešení problému 7.1.1

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ tvoří uspořádanou bázi lineárného prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že rovnosti $\mathbf{f}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{v}_1$ a $\mathbf{f}(\mathbf{b}_2) = \mathbf{v}_2$ jednoznačně určují lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

(3) Matice $\mathbf{F}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a K_2 je

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Matice $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi K_2 je

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

✱ Komentář k problému 7.1.1

(1) Protože vektory $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ jsou lineárně nezávislé a protože $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, tvoří seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ uspořádanou bázi lineárného prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Podle Problému 5.1.1 je každé lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ určeno jednoznačne svými hodnotami na bázi. Podle části (1) tvoří seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ uspořádanou bázi lineárného prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$. Proto definice $\mathbf{f}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{v}_1$ a $\mathbf{f}(\mathbf{v}_2)$ určuje jednoznačně lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

(3) Matice $\mathbf{F}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a K_2 je jednoznačně určená matice $\mathbf{F}$, pro kterou je diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{F}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"'] \end{tikzcd}$$

komutativní. To znamená, že musí platit

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{v}_1 \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{e}_2 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{v}_2 \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Proto platí

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Matice $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi K_2 je jednoznačně určená matice $\mathbf{M}$, pro kterou je diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"'] \end{tikzcd}$$

komutativní. Protože platí

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"'] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{T}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{F}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{B}"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"'] \end{tikzcd}$$

musí platit rovnost $\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{T}$ je matice, která čínní diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{T}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{B}"'] \end{tikzcd}$$

komutativním. Matici $\mathbf{T}$ nalezneme obvyklým způsobem: musí platit

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{T}\mathbf{e}_1 \arrow[r, equal] & \mathbf{coord}_B(\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{e}_1 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{e}_1 \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{e}_2 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{T}\mathbf{e}_2 \arrow[r, equal] & \mathbf{coord}_B(\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}_2 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{e}_2 \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Zbývá tedy nalézt $\mathbf{coord}_B(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a $\mathbf{coord}_B(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. To znamená, že máme vyřešit *dvě* soustavy rovnic:

$$a \cdot \mathbf{b}_1 + b \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_1 \qquad c \cdot \mathbf{b}_1 + d \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2$$

Tyto dvě soustavy rovnic lze *sesadit do jediné rovnice*

$$(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2) \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

neboli

$$(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}_2$$

To znamená, že musí platit

$$\mathbf{T} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

Dostáváme tedy rovnost[1]

$$\mathbf{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{F}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}}_{=\mathbf{T}}$$

[1] V příštích tématech již budeme schopni matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ spočítat.

7.1.2 Problém V tomto příkladu budeme pracovat s lineárním prostorem $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ nad $\mathbb{R}$ všech lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Vektory v $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ jsou reálné matice se dvěma řádky a dvěma sloupci.

Označme jako $B = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4)$ uspořádanou bázi[a] prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, kde

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále je zadána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$. Pro lineární zobrazení[b]

$$\mathbf{f} : \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$$

nalezněte matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi B (tj. vzhledem k bázím B a B).

[a] To, že B je skutečně báze lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, se ukáže analogicky jako v Problému 6.1.3.

[b] To, že $\mathbf{f}$ je skutečně lineární zobrazení, je dokázáno v Problému 6.2.2.

✱ **Řešení problému 7.1.2** Hledaná matice je $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 7.1.2** Hledáme matici $\mathbf{M}$ v komutativním diagramu

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^4 \\ \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

a tu nalezneme shodou na jednotlivých prvcích báze B.

(1) Shoda na prvku $\mathbf{B}_1$ báze B:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_1 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

protože platí

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot \mathbf{B}_1 + 0 \cdot \mathbf{B}_2 + 3 \cdot \mathbf{B}_3 + 0 \cdot \mathbf{B}_4$$

a tudíž $\mathbf{coord}_B(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Shoda na prvku $\mathbf{B}_2$ báze B:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_2 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_2 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix}0\\7\\0\\3\end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_2 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{B}_2\cdot\mathbf{A} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

protože platí

$$\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\8 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\7 & 3\end{pmatrix} = 0\cdot\mathbf{B}_1 + 7\cdot\mathbf{B}_2 + 0\cdot\mathbf{B}_3 + 3\cdot\mathbf{B}_4$$

a tudíž $\mathbf{coord}_B(\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{A}) = \begin{pmatrix}0\\7\\0\\3\end{pmatrix}$.

(3) Shoda na prvku $\mathbf{B}_3$ báze B:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_3 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_3 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix}8\\0\\4\\0\end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_3 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{B}_3\cdot\mathbf{A} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

protože platí

$$\mathbf{B}_3\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\8 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 4\\0 & 0\end{pmatrix} = 8\cdot\mathbf{B}_1 + 0\cdot\mathbf{B}_2 + 4\cdot\mathbf{B}_3 + 0\cdot\mathbf{B}_4$$

a tudíž $\mathbf{coord}_B(\mathbf{B}_3\cdot\mathbf{A}) = \begin{pmatrix}8\\0\\4\\0\end{pmatrix}$.

(4) Shoda na prvku $\mathbf{B}_4$ báze B:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_4 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_4 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix}0\\8\\0\\4\end{pmatrix} \\
\mathbf{B}_4 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{B}_4\cdot\mathbf{A} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

protože platí

$$\mathbf{B}_4\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\8 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\8 & 4\end{pmatrix} = 0\cdot\mathbf{B}_1 + 8\cdot\mathbf{B}_2 + 0\cdot\mathbf{B}_3 + 4\cdot\mathbf{B}_4$$

a tudíž $\mathbf{coord}_B(\mathbf{B}_4\cdot\mathbf{A}) = \begin{pmatrix}0\\8\\0\\4\end{pmatrix}$.

Protože $\mathbf{M} = (\mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_1, \mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_2, \mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_3, \mathbf{M}\cdot\mathbf{e}_4)$, platí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7.1.3 Problém V tomto příkladu pracujeme s lineárním prostorem $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$ nad $\mathbb{Z}_5$ všech polynomů maximálně třetího stupně s koeficienty v $\mathbb{Z}_5$ a s neurčitou x.

(1) Ukažte, že seznam $C = ((x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.

(2) Pro uspořádanou bázi $B = (1, x, x^2, x^3)$ lineárního prostoru $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$ a uspořádanou bázi C z bodu (1) nalezněte matici $\mathbf{T}_{C\mapsto B}$ transofrmace souřadnic z báze C do báze B.

✱ Řešení problému 7.1.3

(1) Řešením tohoto problému je správně vedený důkaz toho, že $\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\}$ je lineárně nezávislá množina v lineárním prostoru $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$, která generuje prostor $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.[2]

(2) Hledaná matice je $\mathbf{T}_{C\mapsto B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

✱ Komentář k problému 7.1.3

(1) Ukážeme, že $\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\}$ je lineárně nezávislá množina v lineárním prostoru $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$, která generuje prostor $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.

(a) Lineární nezávislost množiny $\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\}$.
Zvolme jakékoli skaláry a, b, c, d ze $\mathbb{Z}_5$, pro které platí rovnost

$$a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d = 0$$

Chceme ukázat, že $a = b = c = d = 0$.
Upravme výraz $a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$ v $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$:

$$\begin{aligned} a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d &= a\underbrace{(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)}_{=x^3+3} + b(x^2 + 4x + 4) + c(x+2) + d \\ &= ax^3 + bx^2 + (4b + c)x + (3a + 4b + 2c + d) \end{aligned}$$

Musí tedy platit rovnost $ax^3 + bx^2 + (4b+c)x + (3a + 4b + 2c + d) = 0$. Protože jde o rovnost dvou *výrazů*, musí platit $a = 0$, $b = 0$, $4b + c = 0$ a $3a + 4b + 2c + d = 0$. To znamená, že $a = b = c = d = 0$.
Ukázali jsme, že množina $\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\}$ je lineárně nezávislá.

(b) Ukážeme, že $\mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\}) = \mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$. Stačí pochopitelně ukázat pouze inklusi $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x] \subseteq \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$.
Protože $\mathsf{span}(\{1, x, x^2, x^3\}) = \mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$, budeme dokazovat inklusi

$$\mathsf{span}(\{1, x, x^2, x^3\}) \subseteq \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$$

a k tomu (podle vlastností lineárního obalu) stačí ukázat inklusi

$$\{1, x, x^2, x^3\} \subseteq \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$$

neboli: stačí ukázat následující čtyři podmínky

[2] Pokud budeme předpokládat, že *známe* platnost rovnosti $\dim(\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]) = 4$, stačí ukázat, že $\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\}$ je lineárně nezávislá množina. V lineárním prostoru L dimense 4 je totiž každá lineárně nezávislá množina se čtyřmi prvky automaticky bází prostoru L.

(b1) $1 \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$.

(b2) $x \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$.

(b3) $x^2 \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$.

(b4) $x^3 \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$.

Ty dokážeme takto:

(b1) $1 \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$ platí triviálně.

(b2) $x \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$ platí, protože $x = 1 \cdot (x+2) - 2 \cdot 1$.

(b3) $x^2 \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$ platí, protože $x^2 = 1 \cdot (x+2)^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$. Využíváme toho, že $x \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$ platí podle bodu (b2).

(b4) $x^3 \in \mathsf{span}(\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\})$ platí, protože $x^3 = 1 \cdot (x+2)^3 + 2 \cdot 1$.

Dokázali jsme, že množina $\{(x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1\}$ generuje prostor $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.

(2) Transformační matice $\mathbf{T}_{C \mapsto B}$ je definována komutativním diagramem

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_5)^4 \arrow[r, "\mathbf{T}_{C\mapsto B}"] & (\mathbb{Z}_5)^4 \\
\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x] \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & \mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x] \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"']
\end{tikzcd}$$

Pro nalezení $\mathbf{T}_{C \mapsto B}$ tedy je tedy nutné a stačí, aby výše uvedený čtverec komutoval na všech prvcích uspořádané báze $C = ((x+2)^3, (x+2)^2, x+2, 1)$. Matici $\mathbf{T}_{C \mapsto B}$ tedy lze nalézt pomocí následujících výpočtů:

(a) Shoda na prvním prvku $(x+2)^3$ uspořádané báze C:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{T}_{C\mapsto B} \cdot \mathbf{e}_1 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
(x+2)^3 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & (x+2)^3 \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

kde $\mathbf{coord}_B((x+2)^3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, protože $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + x^2 + 2x + 3$ v $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.

(b) Shoda na druhém prvku $(x+2)^2$ uspořádané báze C:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_2 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{T}_{C\mapsto B} \cdot \mathbf{e}_2 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(x+2)^2 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & (x+2)^2 \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

kde $\mathbf{coord}_B((x+2)^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, protože $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ v $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.

(c) Shoda na třetím prvku $x+2$ uspořádané báze C:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_3 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{T}_{C\mapsto B}\cdot\mathbf{e}_3 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} \\ x+2 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & x+2 \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

kde $\mathbf{coord}_B(x+2) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, protože $x+2 = 1\cdot x + 2\cdot 1$ v $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.

(d) Shoda na čtvrtém prvku 1 uspořádané báze C:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_4 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{T}_{C\mapsto B}\cdot\mathbf{e}_4 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ 1 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & 1 \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

kde $\mathbf{coord}_B(1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, protože $1 = 1\cdot 1$ v $\mathbb{Z}_5^{\leq 3}[x]$.

Protože $\mathbf{T}_{C\mapsto B} = (\mathbf{T}_{C\mapsto B}\cdot\mathbf{e}_1, \mathbf{T}_{C\mapsto B}\cdot\mathbf{e}_2, \mathbf{T}_{C\mapsto B}\cdot\mathbf{e}_3, \mathbf{T}_{C\mapsto B}\cdot\mathbf{e}_4)$, platí

$$\mathbf{T}_{C\mapsto B} = \begin{pmatrix}3&4&2&1\\2&4&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

7.1.4 Problém Vyjádřete matici $\mathbf{M}$ rotace v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ kolem počátku o úhel α proti směru hodinových ručiček v uspořádané bázi $B = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, kde

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 7.1.4** Hledaná matice[3] je $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 7.1.4** Víme, že diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{R}_\alpha"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"'] \end{tikzcd}$$

[3] Až budeme umět počítat inversi matice, budeme příklad umět dopočítat do konce. To už je ale rutina na úrovni kalkulátoru.

je komutativní. To plyne z definice matice: matice je *definována* vzhledem ke kanonické bázi.

My hledáme matici $\mathbf{M}$ v komutativním diagramu

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{R}_\alpha"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

Protože platí rovnost

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{R}_\alpha"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "T_{B\mapsto K_2}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "T_{K_2\mapsto B}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{R}_\alpha"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"'] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

stačí nalézt matice $\mathbf{T}_{B\mapsto K_2}$ a $\mathbf{T}_{K_2\mapsto B}$, a to právě uděláme.

Trik: kanonická báze K_2 je „typu easy“ (viz přednášku 5B). To znamená, že jsme schopni velmi rychle nalézt matici $\mathbf{T}_{B\mapsto K_2}$. Skutečně:

$$\mathbf{T}_{B\mapsto K_2} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

a proto

$$\mathbf{T}_{K_2\mapsto B} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

To znamená, že

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

7.1.5 Problém Ať $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ jsou dva lineárně nezávislé vektory v lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$. Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ platí $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$. Vyjádřete matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi K_2 (tj. vzhledem k bázím K_2 a K_2).

✱ **Řešení problému 7.1.5** Hledaná matice[4] je $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}^{-1}$.

✱ **Komentář k problému 7.1.5** Všimněme si, že diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"'] \end{tikzcd}$$

[4] Až budeme umět počítat inversi matice, budeme příklad umět dopočítat do konce. To už je ale rutina na úrovni kalkulátoru.

je komutativní, kde B je uspořádaná báze $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Opravdu, platí totiž

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_1 \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{a} \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

a

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_2 \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\mathbf{b} \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

My hledáme matici $\mathbf{M}$ v komutativním diagramu

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"']
\end{tikzcd}
$$

Protože platí rovnost

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "T_{K_2 \mapsto B}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}"] & \mathbb{R}^2 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{B}"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"']
\end{tikzcd}
$$

stačí nalézt matici $\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}$, a to právě uděláme.

Trik: kanonická báze K_2 je „typu easy“ (viz přednášku 5B). To znamená, že jsme schopni velmi rychle nalézt matici $\mathbf{T}_{B \mapsto K_2}$. Skutečně:

$$\mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

a proto

$$\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Celkově tedy platí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

7.2 Operace s lineárními zobrazeními vs. operace s jejich maticemi

7.2.1 Problém Ať $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení s maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

vzhledem k uspořádaným bázím $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ a $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$. Nalezněte matici $\mathbf{M}$ vzhledem k bázím B a C zobrazení $4\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

✱ **Řešení problému 7.2.1** Matice $\mathbf{M}$ vzhledem k bázím B a C zobrazení $4\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ je

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & 12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

✱ **Komentář k problému 7.2.1** Podle zadání platí

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}"] & \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \end{tikzcd}$$

To znamená, že

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_1 \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{f}(\mathbf{b}_1) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{e}_2 \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{f}(\mathbf{b}_2) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Pro matici $\mathbf{M}$ musí platit

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1 \arrow[r, equal] & 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_1 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & 4 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{b}_1) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{e}_2 \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_2 \arrow[r, equal] & 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_2 \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & 4 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{b}_2) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

To znamená, že

$$\mathbf{M} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & 12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

7.2.2 Problém Jsou dána lineární zobrazení $\mathbf{f}_1 : L_1 \longrightarrow L_2$, $\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ nad $\mathbb{Z}_5$. Dále jsou zadány: uspořádaná báze $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ prostoru L_1 a uspořádaná báze $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ prostoru L_2. Víte, že matice zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a C je

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} : (\mathbb{Z}_5)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_5)^2$$

a že matice zobrazení $\mathbf{g}$ vzhledem k bázím B a C je

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} : (\mathbb{Z}_5)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_5)^2$$

Nalezněte matici lineárního zobrazení $2\mathbf{f} + 3\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ vzhledem k bázím B a C.

✱ **Řešení problému 7.2.2** Matice lineárního zobrazení $2\mathbf{f} + 3\mathbf{g} : L_1 \longrightarrow L_2$ vzhledem k bázím B a C je

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} : (\mathbb{Z}_5)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_5)^2$$

✱ **Komentář k problému 7.2.2** Podle zadání platí

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_5)^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}"] & (\mathbb{Z}_5)^2 \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}_5)^3 \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}"] & (\mathbb{Z}_5)^2 \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{g}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"']
\end{tikzcd}$$

Platí tedy rovnosti

$$\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_2)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_2)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_3)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To znamená, že platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{coord}_C((2\mathbf{f} + 3\mathbf{g})(\vec{b}_1)) &= 2\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_1)) + 3\mathbf{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_1)) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{coord}_C((2\mathbf{f} + 3\mathbf{g})(\vec{b}_2)) &= 2\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_2)) + 3\mathbf{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_2)) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{coord}_C((2\mathbf{f} + 3\mathbf{g})(\vec{b}_3)) &= 2\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_3)) + 3\mathbf{coord}_C(\mathbf{g}(\vec{b}_3)) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Celkově tedy platí, že matice zobrazení $2\mathbf{f} + 3\mathbf{g}$ vzhledem k bázím B a C je

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Výpočty probíhají samozřejmě v $\mathbb{Z}_5$.

7.2.3 Problém Ať $\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ je lineární zobrazení, kde $\dim(L_1) = s$ a $\dim(L_2) = r$. Ať $\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^s$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a C. Zvolte pevný skalár $a \in \mathbb{F}$. Ukažte, že matice $a\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^s$ je matice lineárního zobrazení $a\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ vzhledem k bázím B a C.[a]

[a] Jedná se o zobecnění Problému 7.2.1.

✱ **Řešení problému 7.2.3** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že matice $a\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^s$ je matice lineárního zobrazení $a\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ vzhledem k bázím B a C.

✱ **Komentář k problému 7.2.3** Matice $\mathbf{M}$ je podle definice jediná matice, pro kterou je diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{F}^r \\ L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \end{tikzcd}$$

komutativní. Pro každé $j \in \{1, \ldots, s\}$ tedy platí

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}_j \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M}\mathbf{e}_j \arrow[r, equal] & \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j)) \\ \vec{b}_j \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{f}(\vec{b}_j) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

kde $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ je uspořádaná báze prostoru L_1.

Protože pro každé $j \in \{1, \ldots, s\}$ platí rovnost

$$(a\mathbf{f})(\vec{b}_j) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{b}_j)$$

platí i rovnost

$$\mathbf{coord}_C((a\mathbf{f})(\vec{b}_j)) = \mathbf{coord}_C(a \cdot \mathbf{f}(\vec{b}_j)) = a \cdot \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j))$$

a to znamená, že diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^s \arrow[r, "a\mathbf{M}"] & \mathbb{F}^r \\ L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "a\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \end{tikzcd}$$

je komutativní.

Dokázali jsme, že matice $a\mathbf{M} : \mathbb{F}^r \longrightarrow \mathbb{F}^s$ je matice lineárního zobrazení $a\mathbf{f} : L_1 \longrightarrow L_2$ vzhledem k bázím B a C.

7.2.4 Problém Ať $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ je uspořádaná báze prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$. Je zadáno lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s maticí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

vzhledem k uspořádané bázi B.

(1) Dokažte, že lineární zobrazení $\mathbf{f}$ je isomorfismus.

(2) Dokažte, že matice lineárního zobrazení $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je matice $\mathbf{M}^{-1}$.

✱ **Řešení problému 7.2.4**

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že lineární zobrazení $\mathbf{f}$ je isomorfismus.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že matice lineárního zobrazení $\mathbf{f}^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ je matice $\mathbf{M}^{-1}$.

✱ **Komentář k problému 7.2.4**

(1) Protože sloupce matice $\mathbf{M}$ jsou lineárně nezávislé, je matice $\mathbf{M}$ isomorfismus. Ukážeme, že lineární zobrazení $\mathbf{f}$ je isomorfismus. Stačí ukázat, že $\mathbf{f}$ je epimorfismus.

Zvolme tedy vektor $\mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^2$. Ukážeme, že existuje vektor $\mathbf{x}$ v $\mathbf{R}^2$ tak, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Označme

$$\mathbf{coord}_B(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = c \cdot \mathbf{b}_1 + d \cdot \mathbf{b}_2$$

Tvrdíme, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. K tomu stačí ukázat rovnost

$$\mathbf{coord}_B(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{coord}_B(\mathbf{y})$$

Protože diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

je komutativní, platí

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \arrow[r, equal] & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \arrow[u, mapsto] \arrow[rr, mapsto] & & \mathbf{f}(\mathbf{x}) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Ukázali jsme, že lineární zobrazení $\mathbf{f}$ je epimorfismus. Tudíž lineární zobrazení $\mathbf{f}$ je isomorfismus.

(2) Podle bodu (1) existuje lineární zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$. Označme jako $\mathbf{X}$ matici lineárního zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$. Potom diagram

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}^{-1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

ukazuje, že matice $\mathbf{X} \cdot \mathbf{M}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{f}$ vzhledem k bázi B. Protože $\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{id}$ a protože matice identického zobrazení $\mathbf{id}$ vzhledem k bázi B je jednotková matice $\mathbf{E}_2$, musí platit

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{E}_2$$

Rovnost $\mathbf{M} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E}_2$ plyne analogicky analýzou diagramu

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{M}"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}^{-1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

Ukázali jsme, že $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}$.

7.3 Problémy s návodem k řešení

7.3.1 Problém V tomto příkladu budeme pracovat s lineárním prostorem $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_7)^2, (\mathbb{Z}_7)^2)$ nad $\mathbb{Z}_7$ všech lineárních zobrazení ze $(\mathbb{Z}_7)^2$ do $(\mathbb{Z}_7)^2$. Vektory v $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_7)^2, (\mathbb{Z}_7)^2)$ jsou matice se dvěma sloupci a dvěma řádky s položkami ze $\mathbb{Z}_7$.

Označme jako B seznam $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4)$, kde

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále jsou zadány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Z}_7$.

Dále definujme zobrazení $\mathbf{f} : \mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_7)^2, (\mathbb{Z}_7)^2) \longrightarrow \mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_7)^2, (\mathbb{Z}_7)^2)$ předpisem

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + 4 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$$

(1) Ukažte, že seznam B je uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_7)^2, (\mathbb{Z}_7)^2)$.

(2) Ukažte, že $\mathbf{f}$ je lineární zobrazení.

(3) Nalezněte matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi B (tj. vzhledem k B a B).

✱ Řešení problému 7.3.1

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že B je uspořádaná báze lineárního prostoru $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_7)^2, (\mathbb{Z}_7)^2)$.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz linearity zobrazení $\mathbf{f}$.

(3) Hledaná matice je $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

✱ Návod k řešení problému 7.3.1 Části (1) a (2) se řeší standardním způsobem. Pro část (3) postupujte podobně jako v Problému 7.1.2.

7.3.2 Problém V lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ je zadána podmnožina

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$$

(1) Ukažte, že W je lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$. Načrtněte obrázek množiny W.

(2) Označte jako

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ukažte, že

(a) $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = W$.

(b) Vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ jsou lineárně nezávislé.

(3) Dejte geometrický význam lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, pro které platí $\mathbf{f}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{f}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{f}(\mathbf{v}_3) = \mathbf{o}$.

(4) Napište matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ z bodu (3) vzhledem k uspořádané bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ (tj. vzhledem k uspořádaným bázím $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$).

(5) Napište matici $\mathbf{A}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ z bodu (3) vzhledem ke kanonické bázi K_3 (tj. vzhledem k uspořádaným bázím K_3 a K_3).

✱ Řešení problému 7.3.2

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že W je lineární podprostor lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále je třeba uvést náčrtek množiny W.

(2) (a) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = W$.
(b) Řešením je správně vedený důkaz lineární nezávislosti množiny $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(3) Zobrazení $\mathbf{f}$ je projekce na rovinu W ve směru $\mathbf{v}_3$.

(4) Hledaná matice je $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) Hledaná matice[5] je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

✱ Návod k řešení problému 7.3.2

(1) Důkaz toho, že W je lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^3$ je standardní (například: ukažte uzavřenost W na tři speciální typy lineárních kombinací, viz přednášku 2A). K náčrtku množiny W využijte některé tři body prostoru W, které zaručeně v množině W leží.

(2) (a) Dokažte, že $\mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \subseteq W$ a současně $W \subseteq \mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
(b) Lze postupovat například takto: ukažte, že vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ jsou lineárně nezávislé. Poté ukažte, že $\mathbf{v}_3 \notin \mathsf{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. A nakonec použijte Problém 3.4.5.

(3) Načrtněte obrázek.

(4) Postupujte podobně jako v Problému 7.1.2.

(5) Postupujte podobně jako v Problému 7.1.4.

7.3.3 Problém Ať $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$ je lineární zobrazení, kde $\dim(L) = n$. Ať $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi B. Ukažte, že platí

(1) Matice $\mathbf{M}$ je isomorfismus právě tehdy, když $\mathbf{f}$ je isomorfismus.

(2) Pokud je $\mathbf{f}$ isomorfismus, potom $\mathbf{M}^{-1}$ je matice lineárního zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$ vzhledem k bázi B.

✱ Řešení problému 7.3.3

✱ Návod k řešení problému 7.3.3 Postupujte podobně jako při řešení Problému 7.2.4.

[5] Až budeme umět počítat inversi matice, budeme příklad umět dopočítat do konce. To už je ale rutina na úrovni kalkulátoru.

Téma 8

GEM a soustavy lineárních rovnic

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) **A8B01LAG**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: GEM, soustavy lineárních rovnic, maticové rovnice.

Důležité: většina příkladů je mechanických, tj. na „úrovni kalkulátoru“. Řadu dalších příkladů si tedy jste jistě schopni vymyslet sami (a správnost řešení ověřit pomocí dostupných online kalkulátorů). Lze také využít dostupných doporučených sbírek.

8.1 Řešení soustav lineárních rovnic

8.1.1 Problém Následující matice převeďte na horní blokový tvar. Dále určete hodnost příslušných matic.

(1) Matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$.

(2) Matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Z}_7$.

✱ **Řešení problému 8.1.1** Horní blokový tvar: řešením obou problémů je správné použití GEM (tj., správné použití elementárních řádkových úprav). Hodnost matice: řešením obou problémů je využití horního blokového tvaru pro určení hodnosti matice.

(1) Horní blokový tvar matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ je (například) matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Platí $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}) = 3$.

(2) Horní blokový tvar matice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$ je (například) matice

✱ **Komentář k problému 8.1.1** V obou případech postupujeme podle GEM a *vyznačujeme* jednotlivé řádkové úpravy podle konvence z přednášky a skript (viz přednášku 6A a AKLA, Příklad 6.3.12ff):[1]

(1)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & -8 & 1 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ 2R_2 + 3R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ 2R_4 - 3R_1 \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 22 & -194 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ 19R_3 + 8R_2 \\ 19R_4 - 3R_2 \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 2R_3 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

GEM skončila: matice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je v horním blokovém tvaru.

Podle GEM platí rovnost $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$. Hodnost matice v horním blokovém tvaru je počet jejích pivotů. Proto platí $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 19 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 11 & -97 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 3$.

Ukázali jsme, že $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}) = 3$.

[1]**Důležité:** jednotlivé řádkové úpravy vyznačujte; získáte tím kontrolu nad tím, zda jste udělali/neudělali numerickou chybu. Numerické chyby budou do velké míry v zápočtových testech a u zkoušky tolerovány, *nebudou* tolerovány chyby faktické, tj., špatné použití GEM. Nevymýšlejte, prosím, svá vlastní značení; používejte značení z přednášky.

(2) Upozornění: počítáme v $\mathbb{Z}_7$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ 2R_3 - 5R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_2 \\ R_4 - 2R_2 \end{array}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_3 \end{array}$$

GEM skončila: matice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je v horním blokovém tvaru.

Podle GEM platí rovnost $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$. Hodnost matice v horním blokovém tvaru je počet jejích pivotů. Proto platí $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 3$. Ukázali jsme, že $\operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}) = 3$.

8.1.2 Problém Nad $\mathbb{R}$ je zadána soustava rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & & & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & & & - & x_5 & = & 8 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \end{array}$$

(1) Zapište zadanou soustavu její rozšířenou maticí. Zapište matici soustavy a vektor pravých stran.

(2) Vyřešte zadanou soustavu.

✱ Řešení problému 8.1.2

(1) (a) Rozšířená matice soustavy je $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{R}$.

(b) Matice zadané soustavy je $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

(c) Vektor pravých stran zadané soustavy je $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Řešení zadané soustavy je množina, zapsaná (například) jako

$$\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

✱ Komentář k problému 8.1.2

(1) Rozšířenou matici soustavy zapíšeme přepisem koeficientů u jednotlivých neznámých soustavy a pravých stran do položek matice (viz přednášku 6A). Rozšířená matice zadané soustavy tedy je

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{array} \right) \qquad \text{nad } \mathbb{R}$$

Matice soustavy je zadána koeficienty u jednotlivých neznámých soustavy do položek matice. Matice zadané soustavy tedy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{nad } \mathbb{R}$$

Vektor pravých stran je určen zápisem pravých stran zadané soustavy do jednotlivých položek vektoru. Vektor pravých stran zadané soustavy tedy je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{nad } \mathbb{R}$$

(2) K řešení zadané soustavy použijeme Frobeniovu větu (viz přednášku 6A). Nejprve tedy rozšířenou matici soustavy převedeme pomocí GEM na horní blokový tvar (počítáme nad $\mathbb{R}$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - 2R_1 \\ R_5 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - R_3 \\ R_5 + 2R_3 \end{array}$$

GEM skončila. Protože hodnost původní matice je totožná s hodností jejího horního blokového tvaru, víme, že platí rovnosti

$$\operatorname{rank}\left(\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right)\right) = \operatorname{rank}\left(\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\right) = 3$$

a

$$\operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3$$

Podle první části Frobeniovy věty má zadaná soustava

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

řešení. Navíc, podle GEM, vyřešit zadanou soustavu je *totéž* jako vyřešit soustavu v jejím horním blokovém tvaru. Nalezneme tedy řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hledané řešení má tvar[2]

$$\text{partikulární řešení} + \text{jádro matice soustavy}$$

a my postup rozdělíme na dvě části:

(a) Hledání partikulárního řešení. Partiklární řešení je *jakýkoli* vektor tvaru $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix}$, který řeší soustavu

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podle přednášky 6A můžeme libovolně zvolit položky, na jejichž posicích *nejsou* pivoty, a zbytek dopočteme. Pivoty leží na první, druhé a třetí posici, pivoty neleží na čtvrté a páté posici. Zvolíme tedy položky na čtvrté a páté posici. Nejpohodlnější je zvolit $p_4 = 0$ a $p_5 = 0$. Získáme tím vektor $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a položky p_3, p_2 a p_1 dopočteme (v tomto pořadí).

[2] Připomeňme, že značení $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$ je označení pro množinu $\{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \ker(\mathbf{A})\}$, neboli pro množinu $\{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$. Viz přednášku 6A.

(a1) Výpočet položky p_3 provedeme ze třetí rovnice. To je rovnice, která má pivot na třetí posici. Třetí rovnice má tvar

$$-2p_3 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 2$$

a platí tedy $p_3 = -1$.

(a2) Výpočet položky p_2 provedeme ze druhé rovnice. To je rovnice, která má pivot na druhé posici. Druhá rovnice má tvar

$$-2p_2 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 1$$

a platí tedy $p_2 = 1/2$.

(a3) Výpočet položky p_1 provedeme z první rovnice. To je rovnice, která má pivot na první posici. První rovnice má tvar

$$p_1 + 1 \cdot (1/2) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3$$

a platí tedy $p_1 = 7/2$.

Partikulární řešení je vektor $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Hledání jádra matice soustavy. Protože hodnost matice soustavy je 3, je podle věty o dimensi jádra a obrazu defekt matice soustavy roven $5 - 3 = 2$. To znamená, že jádro matice soustavy lze nalézt ve tvaru

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix})$$

kde vektory $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé a oba vektory řeší soustavu[3]

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pro nalezení obou vektorů budeme postupovat analogicky předchozímu postupu: položky vektorů, na jejichž posicích *nejsou* pivoty, můžeme zvolit libovolně, ostatní položky dopočteme ze soustavy.

(b1) Zajistíme nejprve lineární nezávislost vektorů $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$ tím, že na jejich poslední dvě položky (to jsou posice, na kterých pivoty nejsou) „rozprostřeme jednotkovou matici“. To znamená, že budeme pracovat s vektory tvaru

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zbylé položky dopočteme z rovnic, na kterých pivoty jsou.

[3]Připomenutí: pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ je $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^s \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$. Viz přednášku 5A.

(b11) Dopočtení vektoru $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Třetí rovnice má tvar

$$-2 \cdot u_3 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0$$

Tedy $u_3 = -1$.
Druhá rovnice má tvar

$$-2 \cdot u_2 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Tedy $u_2 = 1/2$.
První rovnice má tvar

$$1 \cdot u_1 + 1 \cdot (1/2) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Tedy $u_1 = -1/2$.
To znamená, že

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b12) Dopočtení vektoru $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Třetí rovnice má tvar

$$-2 \cdot v_3 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 0$$

Tedy $v_3 = -1/2$.
Druhá rovnice má tvar

$$-2 \cdot v_2 - 2 \cdot (-1/2) - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Tedy $v_2 = 1/2$.
První rovnice má tvar

$$1 \cdot v_1 + 1 \cdot (1/2) + 1 \cdot (-1/2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Tedy $v_1 = 0$.
To znamená, že

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jádro matice soustavy lze tedy zapsat jako

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Užitečný trik: lze využít obecného tvrzení: pokud vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé, potom i vektory $a\mathbf{u}$, $b\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé, kde a, b jsou *nenulové* skaláry.[4] Toho lze využít k odstranění „nepříjemných" zlomků. To znamená, že platí

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\\0\\1\end{pmatrix}) = \mathsf{span}(2\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},2\cdot\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\\0\\1\end{pmatrix}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\2\end{pmatrix})$$

Celkové řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 8\\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

je tedy množina[5]

$$\begin{pmatrix}7/2\\1/2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1/2\\-1/2\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}7/2\\1/2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\2\end{pmatrix})$$

8.2 Řešení maticových rovnic

8.2.1 Problém Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^T = \mathbf{X}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}$ nad $\mathbb{R}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 8.2.1** Množina všech matic $\mathbf{X}$, pro které platí rovnost $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^T = \mathbf{X}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}$ má tvar

$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix})$$

✱ **Komentář k problému 8.2.1** Rozměrová zkouška nám dává, že matice $\mathbf{X}$ musí mít dva sloupce a dva řádky. Použijeme *universální* postup: označíme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x_1 & x_3\\ x_2 & x_4\end{pmatrix}$$

najdeme jednotlivé položky jako řešení soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$ a na závěr matici $\mathbf{X}$ získáme „rozříznutím".

(1) Sestavení soustavy lineárních rovnic.
Spočteme

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & x_3\\ x_2 & x_4\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1+2x_3 & 2x_2+2x_4\\ x_1+3x_3 & x_2+3x_4\end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix}x_1 & x_3\\ x_2 & x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1+x_3 & 2x_1+3x_3\\ 2x_2+x_4 & 2x_2+3x_4\end{pmatrix}$$

[4] Máte plně k disposici techniku, která Vám umožní dokázat následující tvrzení: *Ať množina* $\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ *je lineárně nezávislá množina vektorů v lineárním prostoru* L *nad* $\mathbb{F}$. *Ať* a_1, …, a_n *jsou nenulové skaláry z* $\mathbb{F}$. *Potom množina* $\{a_1\cdot\vec{b}_1,\dots,a_n\cdot\vec{b}_n\}$ *je lineárně nezávislá.* Dokažte toto tvrzení.

[5] **Důležité:** odstranit „nepříjemné" zlomky z partikulárního řešení *nelze*.

Na závěr upravíme rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}$ na ekvivalentní rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Nejprve spočteme

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 & 2x_2 + 2x_4 \\ x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_1 + 3x_3 \\ 2x_2 + x_4 & 2x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_3 & -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 & -x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Musí tedy platit rovnost

$$\begin{pmatrix} x_3 & -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 & -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Poslední rovnost platí právě tehdy, když odpovídající položky obou matic jsou stejné. To znamená, že musí být splněna soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & & & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & - & x_2 & & & & & = & 3 \end{array}$$

kterou zapíšeme rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

(2) Soustavu $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ vyřešíme pomocí GEM a Frobeniovy věty, stejně jako v Problému 8.1.2. Nejprve GEM:

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \\ R_4 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 + 2R_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 2R_2 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 3R_3 \end{array}\end{aligned}$$

GEM skončila. Platí

$$3 = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \operatorname{rank}(\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)) = 3$$

Podle Frobeniovy věty soustava

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

řešení má, a toto řešení je ve tvaru

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Položky jednotlivých vektorů spočteme postupem, známým z Problému 8.1.2. Dostaneme řešení ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(3) Zpětné sestavení matice $\mathbf{X}$.
Označili jsme

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

a právě jsme dokázali, že platí rovnost

$$\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}\} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

To znamená, že množina všech matic $\mathbf{X}$, pro které platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}$ má tvar[6]

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

8.2.2 Problém Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

jsou matice nad $\mathbb{Z}_5$.

✱ **Řešení problému 8.2.2** Celkové řešení rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ je[7]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

[6] Povšimněme si, jak jsme postupovali: zápis $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ jsme „rozřízli“ mezi druhou a třetí položkou a tím jsme získali popis matic $\mathbf{X}$. Rozříznutí $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ \hline -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ dává finální zápis $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

[7] Řešením je afinní podprostor dimense 2 v lineárním prostoru $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_5)^2, (\mathbb{Z}_5))^3$.

✱ Komentář k problému 8.2.2 Nejprve provedeme rozměrovou zkoušku: jsou zadána lineární zobrazení

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Z}_5)^2 \arrow[dr, "\mathbf{B}"'] & (\mathbb{Z}_5)^3 \arrow[d, "\mathbf{A}"] \\ & (\mathbb{Z}_5)^2 \end{tikzcd}$$

a my hledáme lineární zobrazení $\mathbf{X}$ tak, aby trojúhelník

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Z}_5)^2 \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[dr, "\mathbf{B}"'] & (\mathbb{Z}_5)^3 \arrow[d, "\mathbf{A}"] \\ & (\mathbb{Z}_5)^2 \end{tikzcd}$$

byl komutativní. To znamená, že matice $\mathbf{X}$ musí mít dva sloupce a tři řádky. Pro sloupcový zápis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ matice $\mathbf{X}$ tedy musí platit rovnost

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2) = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$$

kde $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ je sloupcový zápis matice $\mathbf{B}$.

Potřebujeme tedy *simultánně* vyřešit soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_1)$ a $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}_2)$, neboli: musíme simultánně vyřešit soustavu s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$. Budeme postupovat standardně:

(1) Pomocí GEM zjistíme, zda simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{Z}_5$ má řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ 2R_2 - 3R_1 \end{array}$$

Podle první části Frobeniovy věty, má *každá* ze soustav

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

řešení, protože platí rovnosti

$$\operatorname{rank}(\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}) \quad \text{a} \quad \operatorname{rank}(\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)) = \operatorname{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix})$$

(2) Soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

vyřešíme stejným postupem[8] jako v Problému 8.1.2.

(a) Řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

je

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

[8] V tomto textu nebudeme vypisovat všechny detaily řešení jednotlivých soustav. Proveďte odpovídající výpočty sami: jde skutečně o *stejný* postup jako v Problému 8.1.2. Pouze nesmíme zapomenout, že počítáme v $\mathbb{Z}_5$.

(b) Řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

je

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Celkové řešení rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ získáme „sesazením“ řešení jednotlivých soustav. To znamená, že celkové řešení rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ je[9]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

8.2.3 Problém Je zadána matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$.

(1) Pomocí GEM zjistěte, zda $\mathbf{M}^{-1}$ existuje.

(2) Pokud $\mathbf{M}^{-1}$ existuje, nalezněte inversní matici $\mathbf{M}^{-1}$ pro matici K výpočtu použijte (mírně zobecněnou) GEM.[a]

[a]Tomuto mírnému zobecnění GEM se říká *Gaussova-Jordanova eliminace*. Tento termín není třeba znát.

✱ Řešení problému 8.2.3

(1) Ano, matice $\mathbf{M}^{-1}$ existuje.

(2) Platí

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

✱ Komentář k problému 8.2.3

(1) Využijeme faktu, že $\mathbf{M}^{-1}$ existuje právě tehdy, když $\mathrm{rank}(\mathbf{M}) = 3$. Hodnost matice $\mathbf{M}$ zjistíme pomocí GEM, stejně jako v Problému 8.1.1.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ 2R_3 + R_1 \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array} \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že $\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}) = 3$. To znamená, že $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ existuje.

[9]**Důležité:** „sesazení“ je *jiný* proces než „rozříznutí“, které jsme použili při řešení Problému 8.2.2. Další příklad „sesazení“ naleznete v Problému 8.4.4.

(2) K nalezení $\mathbf{M}^{-1}$ stačí vyřešit maticovou rovnici $\mathbf{M}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{E}_3$. Viz Problém 2.4 pro 6. týden. Tuto maticovou rovnici vyřešíme analogickým způsobem jako v Problému 8.2.2. Jediným rozdílem je, že použijeme mírně zobecněnou GEM:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ 2R_3 + R_1 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & 0 & 10 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 + 3R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_3 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & 0 & 10 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \\ R_3 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 + 6R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} -1/2\cdot R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
$$

Ukázali jsme, že

$$
\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}
$$

Důležitá poznámka: v praxi je rozumné body (1) a (2) „provádět naráz“. To znamená, že rovnou spustíme výpočet $\mathbf{M}^{-1}$ a upozorníme na to, kdy jsme se dozvěděli, že $\mathbf{M}^{-1}$ existuje:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ 2R_3 + R_1 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 2R_2 \end{array}
$$

Ukázali jsme $\mathrm{rank}(\mathbf{M}) = 3$, tedy $\mathbf{M}^{-1}$ existuje. Pokračujeme ve výpočtu.

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & 0 & 10 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 + 3R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_3 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & 0 & 10 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \\ R_3 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} R_1 + 6R_2 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
$$
$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} -1/2\cdot R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}
$$

8.3 Sestavení soustavy, která má zadané řešení

8.3.1 Problém Nalezněte jakoukoli soustavu rovnic $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, která má jako řešení afinní prodprostor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

dimense 2 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 8.3.1** Afinní prodprostor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

dimense 2 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$ je řešením (například) soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

ned $\mathbb{R}$.

✱ **Komentář k problému 8.3.1** Předvedeme dva způsoby řešení: první způsob je řešení podle přednášky, druhý způsob je „elegantnější“ uchopení postupu z přednášky.[10]

(1) Postup podle přednášky.
Afinní podprostor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

dimense 2 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$ je řešením soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, kde $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 3$. Matici $\mathbf{A}$ lze vybrat tak, aby $\mathbf{A}$ bylo epimorfismem, tj., vybereme $\mathbf{A} : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
Výpočet rozdělíme na dvě části:

(a) Nalezení matice $\mathbf{A}$.
Musí platit rovnost

$$\ker(\mathbf{A}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

To znamená, že musí platit rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[10] Oba postupy jsou ekvivalentní. Vyberte si ten, který Vám více vyhovuje.

Jinými slovy: podle definice součinu matic platí maticová rovnost

$$\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&0\\1&1\\0&3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Protože pro jakékoli matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ (pro které je součin $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ definován) platí rovnost[11] $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})^T=\mathbf{Y}^T\cdot\mathbf{X}^T$, musí platit maticová rovnost

$$\begin{pmatrix}2&0&1&0&0\\0&0&1&3&1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Máme tedy nalézt *jedno* řešení maticové rovnice

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathbf{A}^T"] \arrow[dr, "\mathbf{O}_{3,2}"'] & \mathbb{R}^5 \arrow[d, "\begin{pmatrix}2&0&1&0&0\\0&0&1&3&1\end{pmatrix}"] \\
& \mathbb{R}^2_2
\end{tikzcd}$$

A to provedeme způsobem, analogickým řešení Problému 8.2.2. Máme nalézt *jedno* řešení maticové rovnice

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc}2&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&3&1&0&0&0\end{array}\right)$$

které má *lineárně* nezávislé soupce. To znamená, že máme nalézt *tři* lineárně nezávislá řešení *jedné* soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&0&1&0&0&0\\0&0&1&3&1&0\end{array}\right)$$

a to uděláme způsobem, analogickým řešení Problému 8.1.2: rozprostřeme jednotkovou matici na druhou, čtvrtou a pátou položku (to jsou posice, na které nejsou pivoty), položku první a třetí vždy dopočteme (to jsou posice, na kterých jsou pivoty). Tři lineárně nezávislá řešení této soustavy jsou tedy například vektory

$$\begin{pmatrix}u_1\\1\\u_3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}v_1\\0\\v_3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}w_1\\0\\w_3\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Pochopitelně: lze odstranit nepříjemné zlomky a pracovat místo toho s vektory

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3\\0\\-6\\2\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Tyto vektory jsou sloupce matice $\mathbf{A}^T$. To znamená, že

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\3&0&-6&2&0\\1&0&-2&0&2\end{pmatrix}$$

[11] Dokažte toto tvrzení; máte k disposici veškerou techniku, která je potřeba.

(b) Nalezení vektoru **b** pravých stran.

Protože vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ musí být partikulárním řešením soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, musí platit rovnost

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

To znamená, že výpočtem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

nalezneme

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Afinní prodprostor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

dimense 2 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$ je řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$.

(2) Elegantnější postup.

Elegance spočívá v tom, že soustavu budeme hledat ve tvaru[12] $(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{b})$, kde $\operatorname{rank}(\mathbf{N}^T) = 3$ a $\mathbf{N}^T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Až na toto označení postupujeme stejně jako v bodu (1).

(a) Nalezení matice $\mathbf{N}^T$.
Musí platit maticová rovnost

$$\mathbf{N}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[12]Geometrický význam tohoto značení odhalíme v Problémech 8.4.6 a 8.4.7.

neboli: trojúhelník

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^5 \arrow[l, "\mathbf{N}^T"'] \\ & \mathbb{R}^2 \arrow[ul, "\mathbf{O}_{2,3}"] \arrow[u, "\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] \end{tikzcd}$$

musí být komutativní.
Po transposici musí platit maticová rovnost

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

neboli: trojúhelník

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathbf{N}"] \arrow[dr, "\mathbf{O}_{3,2}"'] & \mathbb{R}^5 \arrow[d, "\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

musí být komutativní.
Tudíž (například)

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Nalezení vektoru **b** probíhá stejně jako v části (1). Tudíž

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Afinní prodprostor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

dimense 2 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$ je řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$.

8.3.2 Problém Nalezněte jakoukoli soustavu rovnic $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, která má jako řešení afinní prodprostor[a]

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

dimense 0 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

[a] Často budeme tento afinní podprostor $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ psát *nepřesně* jako $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 8.3.2** Afinní prodprostor

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

dimense 0 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ je řešením (například) soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

✱ **Komentář k problému 8.3.2** Předvedeme dva způsoby řešení: „informovaný odhad“ a postup podle přednášky.

(1) Informovaný odhad. Soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

má jediné řešení

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

protože matice soustavy je jednotková.

(2) Postup podle přednášky. Protože platí rovnost

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

hledáme soustavu ve tvaru $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, kde

$$\ker(\mathbf{A}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad \text{a} \quad \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

Budeme postupovat stejně jako v části (1) Problému 8.3.1.

(a) Nalezení matice $\mathbf{A}$. Řádky matice $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislá řešení soustavy rovnic $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Protože tato soustava má řešení $\mathsf{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, platí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Nalezení vektoru **b**. Platí

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ukázali jsme, že

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

je jediným řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

8.3.3 Problém Nalezněte jakoukoli soustavu rovnic $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, která má jako řešení afinní prodprostor

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

dimense 1 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 8.3.3** Hledaná soustava je (například)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

✱ **Komentář k problému 8.3.3** Budeme postupovat stejně jako v části (1) Problému 8.3.1.

(1) Nalezení matice **A**. Řádky matice **A** jsou lineárně nezávislá řešení soustavy $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Množina řešení této soustavy je

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

To znamená, že platí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Nalezení vektoru **b**. Protože

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

pro vektor **b** platí

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hledaná soustava je (například)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

8.4 Problémy s návodem k řešení

8.4.1 Problém

(1) Nalezněte hodnost matice
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$
nad $\mathbb{Z}_7$.

(2) Nalezněte hodnost matice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ 4 & -5 & -1 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$
nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 8.4.1**

(1) Platí
$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}) = 4$$

(2) Platí
$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ 4 & -5 & -1 & -10 & -10 \end{pmatrix}) = 2$$

✱ **Návod k řešení problému 8.4.1** Jedná se o standardní použití GEM. V obou případech postupujte analogicky Problému 8.1.1.

8.4.2 Problém Vyřešte soustavu zadanou rozšířenou maticí
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$
nad $\mathbb{Z}_5$.

✱ **Řešení problému 8.4.2** Řešením soustavy $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ nad $\mathbb{Z}_5$ je množina
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

✱ **Návod k řešení problému 8.4.2** Jedná se o standardní výpočet: postupujte jako při řešení Problému 8.1.2.

8.4.3 Problém Obecná *lineární maticová rovnice* nad $\mathbb{F}$ má tvar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{M}$$

kde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ jsou matice nad $\mathbb{F}$ a kde matice $\mathbf{M}$ nad $\mathbb{F}$ má s sloupců a r řádků.

(1) Nalezněte rozměry matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ a $\mathbf{X}$ tak, aby rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{M}$ měla smysl.

(2) Popište *universální* metodu, jak maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{M}$ vyřešit.

✱ Řešení problému 8.4.3

(1) Musí platit $s = r$ a všechny matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{X}$ musí mít s sloupců a s řádků.

(2) Universální metoda řešení maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{M}$ je analogická řešení Problému 8.2.1.

✱ Návod k řešení problému 8.4.3

(1) Všechny matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T$ a $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D}$ musí mít s sloupců a r řádků. Musí tedy platit

$$\mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}} \mathbb{F}^r \;=\; \mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{X}} \mathbb{F}^p \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbb{F}^r$$

což znamená, že matice $\mathbf{X}$ musí mít s sloupců a p řádků, a matice $\mathbf{A}$ musí mít p sloupců a r řádků, pro nějaké p.

Dále musí platit

$$\mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}} \mathbb{F}^r \;=\; \mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{X}} \mathbb{F}^p$$

To znamená, že musí platit $p = r$. To znamená, že $\mathbf{X}$ musí mít s sloupců a r řádků. Dále matice $\mathbf{B}$ musí být čtvercová o s sloupcích a a s řádcích.

Dále musí platit

$$\mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{C}\cdot\mathbf{X}^T} \mathbb{F}^r \;=\; \mathbb{F}^r \xrightarrow{\mathbf{X}^T} \mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbb{F}^r$$

To znamená, že musí platit $s = r$. Jinými slovy, všechny matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}$ jsou čtvercové o s sloupcích a s řádcích.

Nakonec musí platit

$$\mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{D}} \mathbb{F}^s \;=\; \mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{D}} \mathbb{F}^s \xrightarrow{\mathbf{X}^T} \mathbb{F}^s$$

a to znamená, že i matice $\mathbf{D}$ musí mít s sloupců a s řádků.

Závěr: musí platit $s = r$ a všechny matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{X}$ musí mít s sloupců a s řádků.

(2) Označte

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{ss} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss} \end{pmatrix}$$

a spočtěte položky matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D}$. Z rovnosti

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{M}$$

sestavte soustavu s^2 rovnic o s^2 neznámých, analogicky Problému 8.2.1. Tuto soustavu vyřešte analogicky Problému 8.1.2. Na závěr řešení soustavy s^2 rovnic o s^2 neznámých „rozřežte" analogicky řešení Problému 8.2.1. Tím dostanete popis všech matic $\mathbf{X}$, pro které platí rovnost

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^T + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{D} = \mathbf{M}$$

8.4.4 Problém Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

jsou matice nad $\mathbb{Z}_7$.

✱ **Řešení problému 8.4.4** Řešením maticové rovnice

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc} 2 & 3 & 3 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

je množina[13]

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

✱ **Návod k řešení problému 8.4.4** Zapište simultánní soustavu

$$\left(\begin{array}{cccccc|cc} 2 & 3 & 3 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

a tu vyřešte způsobem, analogickým řešení Problému 8.2.2. Nezapomeňte počítat nad $\mathbb{Z}_7$.

8.4.5 Problém Pokud existuje, nalezněte inversi k součinu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matic nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 8.4.5** Platí

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

✱ **Návod k řešení problému 8.4.5** Lze postupovat dvěma způspby: standardně nebo elegantně.

(1) Standardní postup.
Spočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a poté nalezněte

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

způsobem, analogickým řešení Problému 8.2.3.

[13] Řešením zadané maticové rovnice je tedy afinní podprostor dimense 8 v lineárním prostoru $\mathsf{Lin}((\mathbb{Z}_7)^2, (\mathbb{Z}_7)^6)$.

(2) Elegantní postup.
Uvědomte si, že pro čtvercové matice $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$ stejných rozměrů platí následující tvrzení:[14]

Matice $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{P})^{-1}$ existuje právě tehdy, když existují $\mathbf{P}^{-1}$ a $\mathbf{B}^{-1}$. V tomto případě platí $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{B}^{-1}$.

Pro jednotlivé matice je snadné nalézt jejich inverse

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-4&1\end{pmatrix}$$

Platí tedy

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a poslední maticový součin už je snadné spočítat.

8.4.6 Problém Nalezněte soustavu rovnic tvaru $(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{b})$, která má jako řešení afinní podprostor

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})$$

dimense 2 v $\mathbb{R}^3$. Dejte svým výpočtům geometrickou interpretaci.

✱ Řešení problému 8.4.6

(1) Afinní podprostor

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})$$

dimense 2 v $\mathbb{R}^3$ je zadán (například) soustavou rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-2\end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$. To znamená, že

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{b} = (-2)$$

Těžkopádnější způsob zápisu nalezené soustavy je rovnice

$$x - 2y + z = -2$$

nad $\mathbb{R}$.

(2) Geometrická interpretace:

(a) Afinní podprostor

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})$$

dimense 2 v $\mathbb{R}^3$ je parametrický zápis roviny, která prochází bodem $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ a která má směr zadaný seznamem $(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})$.

[14] Viz Problém 1.3.5.

(b) Sloupec $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ matice $\mathbf{N}$ je *normála* roviny

$$x - 2y + z = -2$$

nad $\mathbb{R}$.

✱ Návod k řešení problému 8.4.6

(1) Postupujte stejným způsobem jako při řešení Problému 8.3.1.

(2) Geometrická interpretace:

(a) Zápis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

je elegantní zkratkou za těžkopádný zápis množiny

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \text{kde } r \text{ a } s \text{ jsou z } \mathbb{R}\}$$

což je parametrický zápis roviny v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a která má směr zadaný seznamem $(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.[15]

(b) Sloupec matice $\mathbf{N}$ je *normála* roviny

$$x - 2y + z = -2$$

nad $\mathbb{R}$.

8.4.7 Problém Nalezněte soustavu rovnic tvaru $(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{b})$, která má jako řešení afinní podprostor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

dimense 1 v $\mathbb{R}^3$. Dejte svým výpočtům geometrickou interpretaci.

✱ Řešení problému 8.4.7

(1) Afinní podprostor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

[15] Občas se objevuje zápis ještě těžkopádnější: tuto množinu můžeme zapsat i ve tvaru $\{\begin{pmatrix} 2+2s \\ 1+r+s \\ -2+2r \end{pmatrix} \mid \text{kde } r \text{ a } s \text{ jsou z } \mathbb{R}\}$, nebo dokonce ve tvaru $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 2+2s,\ y = 1+r+s,\ z = -2+2r, \text{ kde } r \text{ a } s \text{ jsou z } \mathbb{R}\}$. Je zjevné, že zápisy jsou čím dál, tím více nepřehlednější. Používejte proto čistý a jasný zápis $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. Poučení: *použití (a označení) parametrů je zlo, kterému se lze vyhnout.*

dimense 1 v $\mathbb{R}^3$ je řešením (například) soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$. To znamená, že

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Těžkopádnější zápis nalezené soustavy rovnic je soustava[16]

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & & & = & 2 \\ -2x & & & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

nad $\mathbb{R}$.

(2) Geometrická interpretace:

(a) Zápis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

je elegantní způsob zápisu množiny

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \text{kde } r \text{ je z } \mathbb{R}\}$$

což je přímka v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a která má směr $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.[17]

(b) Sloupce $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ matice $\mathbf{N}$ jsou směry (lineárně nezávislých!) normál k zadané přímce.

✱ Návod k řešení problému 8.4.7

(1) Postupujte stejným způsobem jako při řešení Problému 8.3.1.

(2) Geometrická interpretace:

(a) Afinní podprostor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

dimense 1 v $\mathbb{R}^3$ je přímka v $\mathbb{R}^3$, která prochází bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a která má směr $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Sloupce $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ matice $\mathbf{N}$ jsou směry (lineárně nezávislých!) normál k zadané přímce.

---

[16] Této soustavě lze říkat *obecná rovnice* přímky $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ v $\mathbb{R}^3$.

[17] Občas se objevuje zápis ještě těžkopádnější: tuto množinu můžeme zapsat i ve tvaru $\{\begin{pmatrix} 1+3r \\ 1+r \\ 1+2r \end{pmatrix} \mid \text{kde } r \text{ je z } \mathbb{R}\}$. Existuje pochopitelně ještě těžkopádnější zápis $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 1+3r,\ y = 1+r,\ z = 1+2r, \text{ kde } r \text{ je z } \mathbb{R}\}$. Používejte čistý a jasný zápis ve tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$. Poučení: *použití (a označení) parametrů je zlo, kterému se lze vyhnout.*

Téma 9

Permutace a determinant matice

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) **A8B01LAG**	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: permutace, výpočty determinantu čvercové matice z definice a pomocí GEM, geometrický význam determinantu čvercové matice.

9.1 Výpočty s permutacemi a definice determinantu

9.1.1 Problém Ať n je přirozené číslo. Ukažte, že množina S_n má přesně $n!$ prvků, kde[a]

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{pokud } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{pokud } n \geq 1 \end{cases}$$

je faktoriál přirozeného čísla n.

[a] *Proč* definujeme $0! = 1$? Uvědomme si, že chceme, aby platilo $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. To znamená, že $0!$ musí být hodnota prázdného součinu $\prod_{k=1}^{0} k$, což je 1. Viz Problém 1.4.2.

✱ **Řešení problému 9.1.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že množina S_n má přesně $n!$ prvků.

✱ **Komentář k problému 9.1.1** Podle definice faktoriálu rozdělíme důkaz na dvě části.

(1) $n = 0$.
Podle konvence je množina $\{1, \ldots, 0\}$ prázdná. Množina S_0 je tedy množina všech permutací prázdné množiny. Podle definice funkce (viz přednášku 3B) existuje pouze jedna funkce z $\emptyset$ do $\emptyset$, sice $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$. Zbývá ukázat, že funkce $\emptyset$ je bijekce (tj., že $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ je injekce a surjekce).

(a) Funkce $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ je injekce.
Máme ukázat platnost implikace:

Pro všechna x, x' z $\emptyset$ platí: jestliže $\emptyset(x) = \emptyset(x')$, potom $x = x'$.

Toto tvrzení platí z následujícího důvodu: *jakékoli* tvrzení tvaru

Pro všechna $x \in \emptyset$ *platí* BLAHBLAH.

je pravdivé. Nelze totiž nalézt protipříklad, tj. *neexistuje* $x \in \emptyset$, pro které vlastnost BLAHBLAH neplatí.
Ukázali jsme, že $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ je injekce.

(b) Funkce $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ je surjekce.
Máme ukázat platnost tvrzení:

Pro všechna y *z* $\emptyset$ *existuje* x *z* $\emptyset$ *tak, že* $\emptyset(x) = y$.

Toto tvrzení platí ze stejného důvodu, který je uveden v části (a): *jakékoli* tvrzení tvaru

Pro všechna $x \in \emptyset$ *platí* BLAHBLAH.

je pravdivé.
Ukázali jsme, že $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ je surjekce.

Ukázali jsme, že $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ je injekce a surjekce. To znamená, že $\emptyset : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ je permutace prázdné množiny. To znamená, že S_0 má přesně 1 prvek. Protože $0! = 1$, je důkaz hotov.

(2) $n \geq 1$.
Podle definice $n!$ platí v tomto případě rovnost

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Každou permutaci $\pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ zakódujeme seznamem

$$(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$$

délky n. Protože permutace π je bijekce, musí tento seznam obsahovat všechna čísla z množiny $\{1, 2, \cdot, n\}$.
Obráceně: každý seznam

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

délky n, obsahující všechna čísla z množiny $\{1, 2, \cdot, n\}$, kóduje permutaci $\pi : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$, předpisem

$$\pi(1) = p_1, \quad \pi(2) = p_2, \quad \ldots, \quad \pi(n) = p_n$$

Toto kódování $\pi \leftrightsquigarrow (p_1, \ldots, p_n)$ je vzájemně jednoznačné. Abychom spočetli počet prvků množiny S_n, stačí tedy spočítat počet seznamů

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

délky n, obsahující všechna čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Při konstrukci takového seznamu smíme posici p_1 obsadit n různými symboly, posici p_2 už smíme obsadit pouze $(n-1)$ různými symboly, atd. Podle pravidla součinu elementární kombinatoriky tedy vytvoříme celkem

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

různých seznamů. Ukázali jsme, že množina S_n obsahuje $n!$ prvků.

9.1.2 Problém V množině S_n zvolte pevně permutaci π_0. Označte jako $L_{\pi_0} : S_n \longrightarrow S_n$ a $R_{\pi_0} : S_n \longrightarrow S_n$ zobrazení, zadané hodnotami[a]

$$L_{\pi_0}(\pi) = \pi_0 \cdot \pi \qquad R_{\pi_0}(\pi) = \pi \cdot \pi_0$$

(1) Ukažte, že obě zobrazení L_{π_0} a R_{π_0} jsou bijekce.

(2) Ukažte, že pro všechna $0 \leq n \leq 2$ a pro každou permutaci π_0 z S_n platí $L_{\pi_0} = R_{\pi_0}$.

(3) Ukažte, že pro všechna $n \geq 3$ lze v S_n zvolit π_0 tak, že $L_{\pi_0} \neq R_{\pi_0}$.

[a] Vznešeně (v teorii grup) se zobrazení L_{π_0} říká *levá translace o* π_0 a zobrazení R_{π_0} se říká *pravá translace o* π_0. Tato terminologie je *nepovinná* — není nutné ji znát.

✱ Řešení problému 9.1.2

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že obě zobrazení L_{π_0} a R_{π_0} jsou bijekce (tj., že obě zobrazení L_{π_0} a R_{π_0} jsou injekce a surjekce).

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro všechna $0 \leq n \leq 2$ a pro každou permutaci π_0 z S_n platí $L_{\pi_0} = R_{\pi_0}$.

(3) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro všechna $n \geq 3$ lze v S_n zvolit π_0 tak, že $L_{\pi_0} \neq R_{\pi_0}$.

✱ Komentář k problému 9.1.2

(1) Ukážeme, že obě L_{π_0} a R_{π_0} jsou bijekce (tj., že obě zobrazení L_{π_0} a R_{π_0} jsou injekce a surjekce). Předvedeme „klasický“ důkaz a důkaz pomocí strunových diagramů.

(a) Klasický důkaz.

(a1) Zobrazení L_{π_0} je bijekce.

(a11) Zobrazení L_{π_0} je injekce (tj., L_{π_0} je prosté zobrazení).
Podle definice injektivity chceme dokázat: jestliže $L_{\pi_0}(\pi) = L_{\pi_0}(\pi')$, potom $\pi = \pi'$.
Ať tedy platí $L_{\pi_0}(\pi) = L_{\pi_0}(\pi')$. To znamená, že $\pi_0 \cdot \pi = \pi_0 \cdot \pi'$. Protože $(\pi_0)^{-1}$ existuje, platí rovnost $(\pi_0)^{-1} \cdot (\pi_0 \cdot \pi) = (\pi_0)^{-1} \cdot (\pi_0 \cdot \pi')$. Protože násobení permutací je asociativní, platí $((\pi_0)^{-1} \cdot \pi_0) \cdot \pi = ((\pi_0)^{-1} \cdot \pi_0) \cdot \pi'$. Protože $(\pi_0)^{-1}$ je inverse k π_0, platí $\mathrm{id}_n \cdot \pi = \mathrm{id}_n \cdot \pi'$. Protože id_n je neutrální prvek vzhledem k násobení v S_n, platí rovnost $\pi = \pi'$.
Ukázali jsme, že ${}_{\pi_0}L$ je injekce.

(a12) Zobrazení L_{π_0} je surjekce (tj., L_{π_0} je zobrazení na).
Podle definice surjektivity chceme dokázat: pro každé π z S_n existuje π' tak, že $L_{\pi_0}(\pi') = \pi$.
Zvolme tedy π z S_n. Definujme $\pi' = (\pi_0)^{-1} \cdot \pi$. Potom platí

$$L_{\pi_0}(\pi') = \pi_0 \cdot ((\pi_0)^{-1} \cdot \pi) = (\pi_0 \cdot (\pi_0)^{-1}) \cdot \pi = \mathrm{id}_n \cdot \pi = \pi$$

Ukázali jsme, že L_{π_0} je surjekce.

Ukázali jsme, že L_{π_0} je bijekce.

(a2) Zobrazení R_{π_0} je bijekce.

(b11) Zobrazení R_{π_0} je injekce (tj., R_{π_0} je prosté zobrazení).
Podle definice injektivity chceme dokázat: jestliže $R_{\pi_0}(\pi) = R_{\pi_0}(\pi')$, potom $\pi = \pi'$.
Ať tedy platí $R_{\pi_0}(\pi) = R_{\pi_0}(\pi')$. To znamená, že $\pi \cdot \pi_0 = \pi' \cdot \pi_0$. Protože $(\pi_0)^{-1}$ existuje, platí rovnost $(\pi \cdot \pi_0) \cdot (\pi_0)^{-1} = (\pi' \cdot \pi_0) \cdot (\pi_0)^{-1}$. Protože násobení permutací je asociativní, platí $\pi \cdot (\pi_0 \cdot (\pi_0)^{-1}) = \pi' \cdot (\pi_0 \cdot (\pi_0)^{-1})$. Protože $(\pi_0)^{-1}$ je inverse k π_0, platí $\pi \cdot \mathrm{id}_n = \pi' \cdot \mathrm{id}_n$. Protože id_n je neutrální prvek vzhledem k násobení v S_n, platí rovnost $\pi = \pi'$.
Ukázali jsme, že R_{π_0} je injekce.

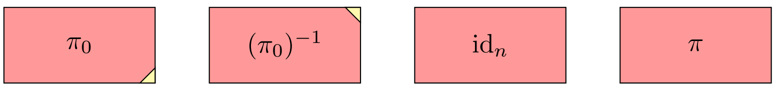
(b12) Zobrazení R_{π_0} je surjekce (tj., R_{π_0} je zobrazení na).
Podle definice surjektivity chceme dokázat: pro každé π z S_n existuje π' tak, že $R_{\pi_0}(\pi') = \pi$.
Zvolme tedy π z S_n. Definujme $\pi' = \pi \cdot (\pi_0)^{-1}$. Potom platí

$$R_{\pi_0}(\pi') = (\pi \cdot (\pi_0)^{-1}) \cdot \pi_0 = \pi \cdot ((\pi_0)^{-1} \cdot \pi_0) = \pi \cdot \mathrm{id}_n = \pi$$

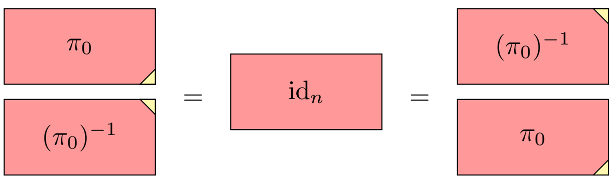
Ukázali jsme, že R_{π_0} je surjekce.

Ukázali jsme, že R_{π_0} je bijekce.

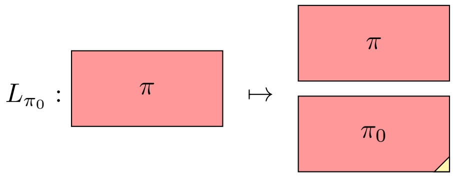
(b) Důkaz pomocí strunových diagramů.
Nejprve zaveďme značení



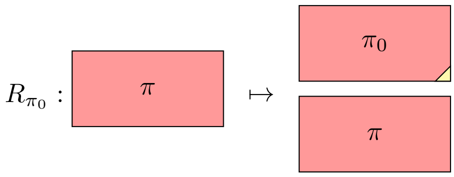
pro permutace π_0, $(\pi_0)^{-1}$, id_n a obecnou permutaci π. Dále si uvědomme, že platí rovnosti



a že zobrazení L_{π_0} a R_{π_0} jsou popsána takto:

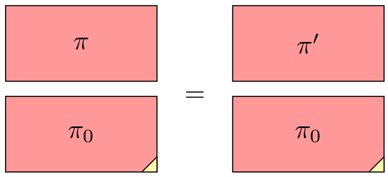


a

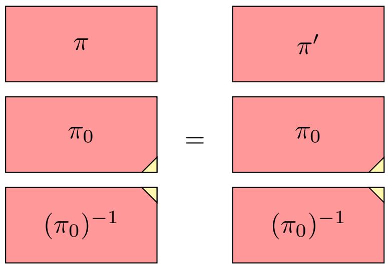


(b1) Zobrazení L_{π_0} je bijekce.

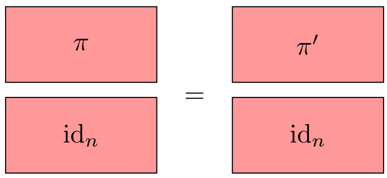
(b11) Zobrazení L_{π_0} je injekce.
Ať platí $L_{\pi_0}(\pi) = L_{\pi_0}(\pi')$. To znamená, že platí



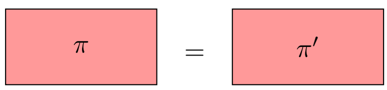
a tudíž



neboli

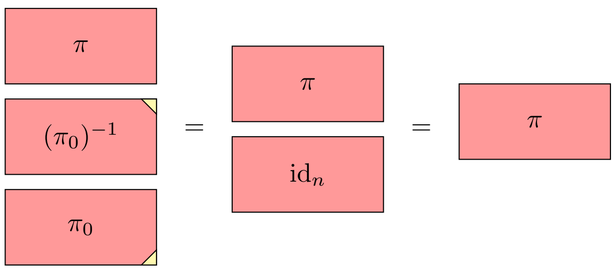


Ukázali jsme, že



neboli: ukázali jsme, že L_{π_0} je injekce.

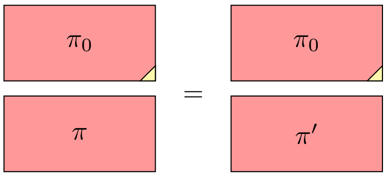
(b12) Zobrazení L_{π_0} je surjekce.
Zvolme libovolnou permutaci π. Protože platí



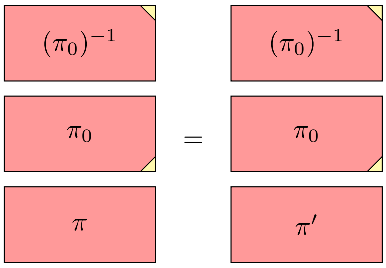
ukázali jsme, že $L_{\pi_0}((\pi_0)^{-1} \cdot \pi) = \pi$. Zobrazení L_{π_0} je surjekce.

(b2) Zobrazení R_{π_0} je bijekce.

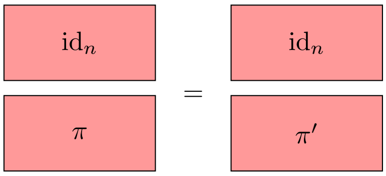
(b21) Zobrazení R_{π_0} je injekce.
Ať platí $R_{\pi_0}(\pi) = R_{\pi_0}(\pi')$. To znamená, že platí



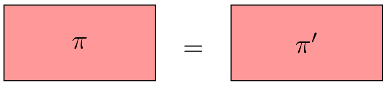
a tudíž



neboli

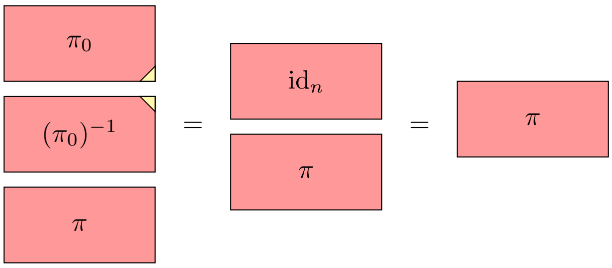


Ukázali jsme, že



neboli: ukázali jsme, že R_{π_0} je injekce.

(b22) Zobrazení R_{π_0} je surjekce.
Zvolme libovolnou permutaci π. Protože platí



ukázali jsme, že $R_{\pi_0}(\pi \cdot (\pi_0)^{-1}) = \pi$. Zobrazení R_{π_0} je surjekce.

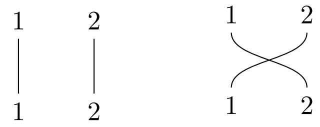
Poznámka: důkaz pomocí strunových diagramů je náročný na místo, podle mého soudu je však názorný a snadno zapamatovatelný. Samozřejmě: smíte použít *jakýkoli* korektní důkaz.

(2) Důkaz rozdělíme na tři části.

(a) $n = 0$.
Množina S_0 má jediný prvek $\emptyset$, viz Problém 9.1.1. Existuje tedy jediné zobrazení $f : S_0 \longrightarrow S_0$, sice $f(\emptyset) = \emptyset$. Proto $L_\emptyset = f$ a $R_\emptyset = f$, tedy $L_\emptyset = R_\emptyset$.

(b) $n = 1$.
Množina S_1 má jediný prvek id_1, viz Problém 9.1.1. Existuje tedy jediné zobrazení $f : S_1 \longrightarrow S_1$, sice $f(\mathrm{id}_1) = \mathrm{id}_1$. Proto $L_{\mathrm{id}_1} = f$ a $R_{\mathrm{id}_1} = f$, tedy $L_{\mathrm{id}_1} = R_{\mathrm{id}_1}$.

(c) $n = 2$.
Množina S_2 má dva prvky, které označíme následovně:



α $\qquad\qquad$ β

(c1) Případ $\pi_0 = \alpha$. Tabulky funkčních hodnot pro L_α a R_α vypadají následovně:

π	$L_\alpha(\pi)$
α	α
β	β

π	$R_\alpha(\pi)$
α	α
β	β

To znamená, že $L_\alpha = R_\alpha$.

(c2) Případ $\pi_0 = \beta$. Tabulky funkčních hodnot pro L_β a R_β vypadají následovně:

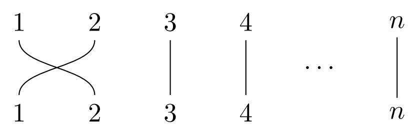
π	$L_\beta(\pi)$
α	β
β	α

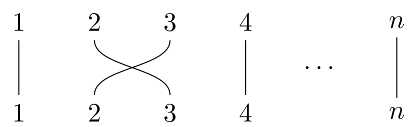
π	$R_\beta(\pi)$
α	β
β	α

To znamená, že $L_\beta = R_\beta$.

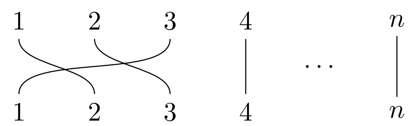
(3) Ať $n \geq 3$. Potřebujeme nalézt permutaci π_0 v S_n takovou, že $L_{\pi_0} \neq R_{\pi_0}$. K tomu potřebujeme nalézt permutaci π v S_n tak, že platí $L_{\pi_0}(\pi) \neq R_{\pi_0}(\pi)$. Celkově: potřebujeme nalézt permutace π_0 a π v S_n tak, že $\pi_0 \cdot \pi \neq \pi \cdot \pi_0$.

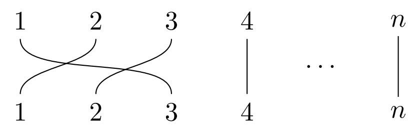
Definujeme

$\pi_0 =$


$\pi =$


Potom

$\pi_0 \cdot \pi =$


$\pi \cdot \pi_0 =$


To znamená, že $\pi_0 \cdot \pi \neq \pi \cdot \pi_0$.

9.1.3 Problém Výčtem hodnot je zadána permutace $\pi : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$ následovně:

$$1 \mapsto 4, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 5, \quad 4 \mapsto 1, \quad 5 \mapsto 2, \quad 6 \mapsto 6$$

(1) Zapište permutaci π strunovým diagramem.

(2) Určete $\mathrm{sign}(\pi)$.

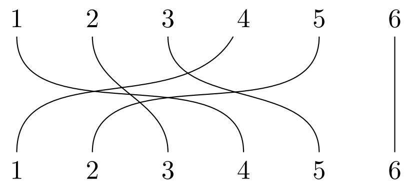
(3) Zapište sčítanec v determinantu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

který permutace π určuje.

✱ Řešení problému 9.1.3

(1) Strunový diagram permutace π je

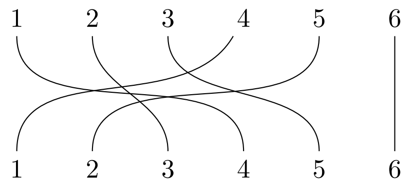


(2) Znaménko π je $\mathrm{sign}(\pi) = -1$.

(3) Sčítanec v definici determinantu matice $\mathbf{A}$, který je určen permutací π, je $-a_{41} \cdot a_{32} \cdot a_{53} \cdot a_{14} \cdot a_{25} \cdot a_{66}$.

✱ Komentář k problému 9.1.3

(1) Strunový diagram permutace π je

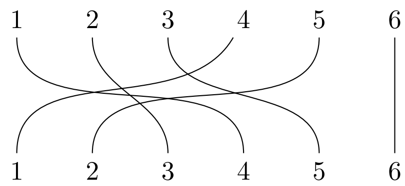


protože π je zadána hodnotami

$$1 \mapsto 4, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 5, \quad 4 \mapsto 1, \quad 5 \mapsto 2, \quad 6 \mapsto 6$$

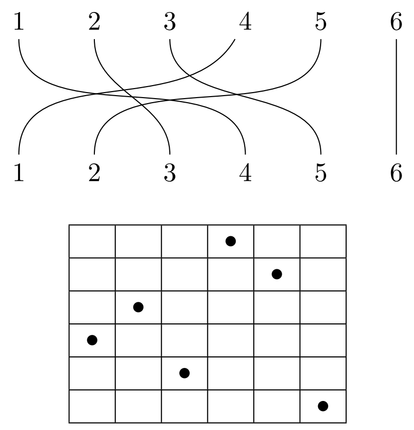
a strunový diagram čteme odshora dolů.

(2) Ve strunovém diagramu



permutace π je celkem 7 překřížení strun. Protože 7 je liché číslo, je π lichá permutace. Platí tedy rovnost $\mathrm{sign}(\pi) = -1$.

(3) Pod strunový diagram permutace π zapíšeme výběr posic v matici $\mathbf{A}$, které permutace π určuje:



Sčítanec v definici determinantu matice $\mathbf{A}$, který je určen permutací π, tedy je

$$\operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{41} \cdot a_{32} \cdot a_{53} \cdot a_{14} \cdot a_{25} \cdot a_{66} = -a_{41} \cdot a_{32} \cdot a_{53} \cdot a_{14} \cdot a_{25} \cdot a_{66}$$

9.2 Výpočet determinantu z definice nebo pomocí GEM

9.2.1 Problém Spočtěte z definice[a]

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$.

[a] Výpočtu determinantu matice rozměrů 3×3 se říká *Sarrusovo pravidlo*. Tento termín je *nepovinný*. Metodu výpočtu determinatu matic rozměrů 3×3 (a rozměrů 2×2) je však třeba zautomatisovat — v následujících partiích půjde o „malou násobilku“.

✱ **Řešení problému 9.2.1** Platí $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 101.$

✱ **Komentář k problému 9.2.1** Nejprve vypíšeme všechny permutace množiny $\{1, 2, 3\}$. Poté, pro každou permutaci $\pi \in S_3$ zapíšeme člen

$$\operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot a_{\pi(3),3}$$

a nakonec všechny tyto členy sečteme.[1]

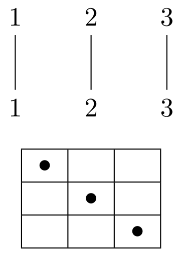
(1) Výpis všech permutací z množiny S_3.

Protože $3! = 6$, musíme zapsat 6 permutací. Každou permutaci zapíšeme strunovým diagramem. Nejprve zapíšeme všechny sudé permutace, poté všechny liché permutace. Pro každou permutaci zapíšeme také výběr prvků matice, který daná permutace určuje.

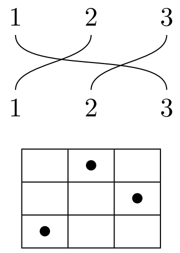
(a) Výpis sudých permutací, odpovídajících výběrů prvků matice a odpovídajících sčítanců z definice

[1] V praxi budete, samozřejmě, postupovat daleko rychleji.

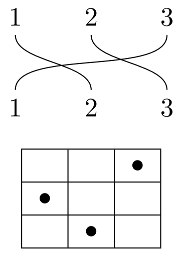
determinantu.



$\text{sign}(\pi) \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
$= (+1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$

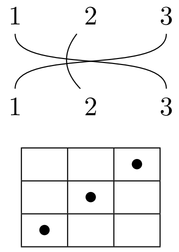


$\text{sign}(\pi) \cdot a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$
$= (+1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3)$

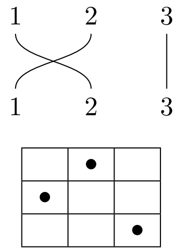


$\text{sign}(\pi) \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$
$= (+1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

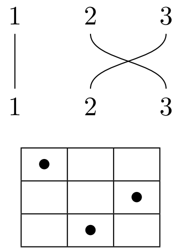
(b) Výpis lichých permutací, odpovídajících výběrů prvků matice a odpovídajících sčítanců z definice determinantu.



$\text{sign}(\pi) \cdot a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$
$= (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5$



$\text{sign}(\pi) \cdot a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$
$= (-1) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 2$



$\text{sign}(\pi) \cdot a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}$
$= (-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3)$

(2) Celkový výpočet determinantu z definice.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} &= (+1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 + (+1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + (+1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \\
&\quad +(-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot (-3) \\
&= 4 + 6 + 60 - 5 + 12 + 24 \\
&= 101
\end{aligned}
$$

9.2.2 Problém Spočítejte následující determinant[a]

$$
\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
$$

nad $\mathbb{Z}_5$ pomocí GEM.

[a] **Pozor:** naivní pokus o zobecnění Sarrusova pravidla na matice rozměrů 4×4 je *špatně*! Viz Problém 9.4.2.

✱ **Řešení problému 9.2.2** Platí $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ nad $\mathbb{Z}_5$.

✱ **Komentář k problému 9.2.2** Budeme postupovat (opatrným) použitím GEM (viz přednášku 7A):[2]

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
&= \underbrace{4^{-1}\cdot 4^{-1}\cdot 4^{-1}}_{=4\cdot 4\cdot 4=4}\cdot \left|\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} R_1 \\ 4R_2-3R_1 \\ 4R_3-2R_1 \\ 4R_4-R_1 \end{matrix} \\
&= 4\cdot \underbrace{3^{-1}}_{=2}\cdot \left|\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 3R_4-2R_2 \end{matrix} \\
&= 4\cdot 2\cdot \underbrace{2^{-1}}_{=3}\cdot \left|\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 2R_4-4R_3 \end{matrix} \\
&= 4\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=4\cdot 3\cdot 2\cdot 0} \\
&= 4\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

9.2.3 Problém Spočítejte (jakýmkoli) způsobem determinant matice

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$, kde α je reálný parametr.

✱ **Řešení problému 9.2.3** Pro každé reálné α platí $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

✱ **Komentář k problému 9.2.3** Předvedeme způsob výpočtu podle definice (tj., pomocí Sarrusova pravidla) a způsob s použitím GEM.

(1) Výpočet podle definice

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
&= \cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 1+\sin\alpha\cdot 0\cdot 0+0\cdot(-\sin\alpha)\cdot 0 \\
&\quad -0\cdot\cos\alpha\cdot 0-\cos\alpha\cdot 0\cdot 0-\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)\cdot 1 \\
&= \cos^2\alpha+\sin^2\alpha \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Závěr: pro každé $\alpha\in\mathbb{R}$ platí $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

(2) Výpočet pomocí GEM musíme rozdělit na dvě části:

[2] Příkladů tohoto typu si jistě vymyslíte spoustu sami. Nebo použijte jakoukoli doporučenou sbírku příkladů. K ověření správnosti svého výpočtu použijte online maticový kalkulátor.

(a) $\cos\alpha = 0$, tj., $\alpha \in \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)\cdot 1} \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{matrix} \\
&= \sin^2\alpha \\
&= \underbrace{(1-\cos^2\alpha)}_{=1-0^2=1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(b) $\cos\alpha \neq 0$, tj., $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{\cos\alpha}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha+\sin\alpha^2)\cdot 1=\cos\alpha} \begin{matrix} R_1 \\ \cos\alpha\cdot R_2 - \sin\alpha\cdot R_1 \\ R_3 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha \\
&= 1
\end{aligned}$$

Závěr: pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

9.2.4 Problém Je zadána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$. Vyřešte rovnici $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3) = 0$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 9.2.4** Rovnice $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3) = 0$ má kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.
✱ **Komentář k problému 9.2.4** Nejprve spočteme matici $\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3$:

$$\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x & -1 & -2 \\ 2 & 1-x & -2 \\ 1 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$$

Dále spočteme $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3)$:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3) &= \begin{vmatrix} 4-x & -1 & -2 \\ 2 & 1-x & -2 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} \\
&= (4-x)\cdot(1-x)\cdot(1-x) + 2\cdot(-1)\cdot(-2) + 1\cdot(-1)\cdot(-2) \\
&\quad -1\cdot(1-x)\cdot(-2) - 2\cdot(-1)\cdot(1-x) - (-1)\cdot(-2)\cdot(4-x) \\
&= -x^3 + 6x^2 - 11x + 6
\end{aligned}$$

Máme-li vyřešit rovnici $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3) = 0$, znamená to vyřešit kubickou rovnici

$$-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0$$

Tato rovnice má určitě $x_1 = 1$ jako kořen.[3] Příslušné Hornerovo schema má tvar

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 6 & -11 & 6 \\ x=1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & -1 & 5 & -6 & 0 \end{array}$$

To znamená, že platí rovnost[4]

$$-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = (x-1)\cdot(-x^2 + 5x - 6)$$

Výše uvedenou rovnost lze nalézt i dělením polynomu $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6$ polynomem $x - 1$ se zbytkem:

$$\begin{array}{l} \big(-x^3 + 6x^2 - 11x + 6\big) : \big(x-1\big) = -x^2 + 5x - 6 \\ \underline{\ \ x^3 - x^2} \\ \qquad 5x^2 - 11x \\ \qquad \underline{-5x^2 + 5x} \\ \qquad\qquad -6x + 6 \\ \qquad\qquad \underline{\ \ 6x - 6} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

K nalezení všech řešení rovnice $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0$ tedy zbývá vyřešit kvadratickou rovnici

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

a to lze provést standardním způsobem. Dostaneme kořeny $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Závěr: rovnice $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}_3) = 0$ má kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

9.2.5 Problém Ať a_1, a_2, b_1, b_2 jsou reálná čísla. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(1) Vektory $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé.

(2) Platí $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

✱ **Řešení problému 9.2.5** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 9.2.5** Z (1) plyne (2). Tuto implikaci dokážeme *kontraposicí*, tj. použijeme *nepřímý* důkaz. Budeme předpokládat, že $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ a ukážeme, že pak vektory $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé.

Ať tedy platí $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. Podle geometrické interpretace determinantu je orientovaná plocha rovnoběžníku, určeného vektory $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, rovna 0. To ale znamená, že vektory $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně závislé (namalujte si obrázek).

Ze (2) plyne (1). Předpokládejme, že $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ a že máme reálná čísla a, b taková, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[3] Tento kořen lze nalézt „optimistickou“ metodou hledání celočíselných kořenů, viz AKLA, Lemma 10.2.20 a Příklady 10.2.21 a 10.2.22.

[4] O využití Hornerova schematu pro dělení polynomu polynomem se zbytkem se lze dočíst v AKLA, Příklad 10.2.22.

Předpokládejme, že $a \neq 0$. Potom platí rovnost

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -\frac{b}{a} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Tudíž

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{b}{a} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{=0} = 0$$

a to není pravda. Tudíž musí platit $a = 0$. A proto musí platit

$$b \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z poslední rovnice plyne $b = 0$ nebo $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. V případě, že $b = 0$, je důkaz hotov: ukázali jsme, že vektory $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé. Případ $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ale nemůže nastat, protože potom by platilo

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a to není pravda.

Ukázali jsme, že vektory $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé.

9.3 Využití determinantu v geometrii

9.3.1 Problém Ať $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou dva různé body v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$. Ukažte, že přímka v $\mathbb{R}^2$, procházející těmito dvěma body, má obecnou rovnici[a]

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[a] Pro ryze geometrické odvození tohoto vzorce se podívejte na Příklad 8.2.20, AKLA. Porovnejte geometrické odvození s ryze algebraickým odvozením, které ukazujeme v tomto textu.

✱ **Řešení problému 9.3.1** Řešením problému je správné odvození toho, že přímka v $\mathbb{R}^2$, procházející dvěma různými body $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, má obecnou rovnici $\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

✱ **Komentář k problému 9.3.1** Pro

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

platí (podle vlastností determinantu) rovnost

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dále, pomocí (například) Sarrusova pravidla, platí

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= x \cdot a_2 \cdot 1 + 1 \cdot a_1 \cdot b_2 + y \cdot 1 \cdot b_1 - 1 \cdot a_2 \cdot b_1 - x \cdot 1 \cdot b_2 - 1 \cdot y \cdot a_1 \\ &= x \cdot (a_2 - b_2) + y \cdot (b_1 - a_1) + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \end{aligned}$$

To znamená, že rovnost

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

platí právě tehdy, když platí rovnost

$$x \cdot (a_2 - b_2) + y \cdot (b_1 - a_1) = a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2$$

Poslední rovnost zapíšeme rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 & a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \end{array} \right)$$

Ukážeme (metodami GEM), že řešením této soustavy je přesně rovnice přímky, která prochází dvěma různými body $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Protože body $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ jsou různé, musí pro matici soustavy platit

$$\begin{pmatrix} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a proto

$$\mathrm{rank}(\begin{pmatrix} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 \end{pmatrix}) = 1 = \mathrm{rank}(\left(\begin{array}{cc|c} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 & a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \end{array} \right))$$

Podle Frobeniovy věty má soustava $\left(\begin{array}{cc|c} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 & a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \end{array} \right)$ řešení, které je afinní podprostor dimense 1, tzn., řešení, které je přímka.

(1) Jádro matice soustavy je

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix})$$

protože $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = 0$.

(2) Partikulární řešení soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 & a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2 \end{array} \right)$ je vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, protože platí

$$\begin{pmatrix} a_2 - b_2 & b_1 - a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot (a_2 - b_2) + a_2 \cdot (b_1 - a_1) = a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2$$

To znamená, že množina všech bodů $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, které splňují rovnost

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 \\ y & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

je přesně afinní prostor tvaru

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix})$$

To je ale přesně rovnice přímky procházející dvěma různými body $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

9.4 Problémy s návodem k řešení

9.4.1 Problém Spočtěte následující determinanty, buď postupem z definice nebo použitím GEM.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \\ -9 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_{11}$.

✱ Řešení problému 9.4.1

(1) Platí $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 6 & 3 & 4 \\ -9 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -729$ v $\mathbb{R}$.

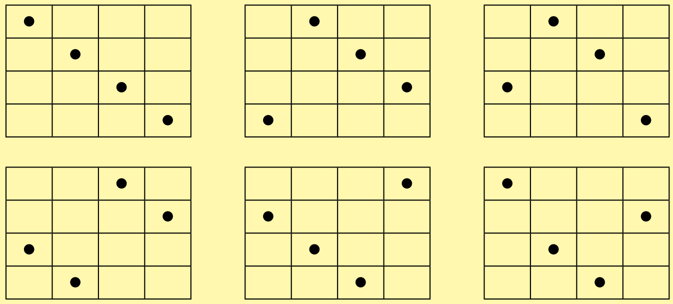
(2) Platí $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 48$ v $\mathbb{R}$.

(3) Platí $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 14$ v $\mathbb{R}$.

(4) Platí $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 4$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

✱ Návod k řešení problému 9.4.1 Definici používejte pouze pro matice rozměrů 2×2 a 3×3. Pro matice větších rozměrů používejte GEM (nebo větu o rozvoji podle řádku nebo sloupce, kterou budeme umět později).

9.4.2 Problém Uvažujte o následujících šesti rozmístěních na tabulce 4×4:



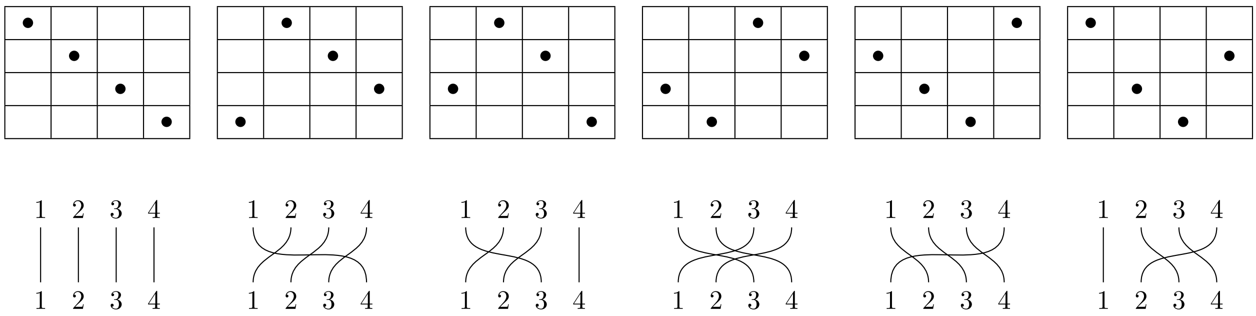
Uvědomte si, že jde o výpis některých rozmístění čtveřic „ve směru hlavní diagonály“.

(1) Pro každé rozmístění zakreslete příslušnou permutaci strunovým diagramem a zapište znaménka těchto permutací.

(2) Z výše uvedeného odvoďte, že naivní analogie Sarrusova pravidla pro matice rozměrů 4×4 *neplatí*.

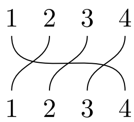
✱ Řešení problému 9.4.2

(1) Pod každé rozmístění nakreslíme strunový diagram příslušné permutace a pod každý strunový diagram zapíšeme její znaménko:

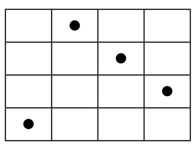


1	-1	1	1	-1	1

(2) Pokud by analogie Sarrusova pravidla pro matice rozměrů 4×4 platila, muselo by *každé* rozmístění čtveřic „ve směru hlavní diagonály“ být určeno *sudou* permutací. Permutace



která určuje rozmístění



je ale lichá.

✱ Návod k řešení problému 9.4.2

(1) Nalezení permutací, které zadávají daná rozmístění čtveřic, je standardní výpočet. Postupujte analogicky řešení Problému 9.1.3.

(2) Použijte následující pozorování: Sarrusovo pravidlo pro matice rozměrů 3×3 říká, že všechna rozmístění trojic „ve směru hlavní diagonály“ jsou určena sudými permutacemi. Naivní zobecnění Sarrusova pravidla pro matice rozměrů 4×4 by mělo říkat totéž.

9.4.3 Problém Určete neorientovanou plochu trojúhelníka v rovině, který je určen třemi body

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 9.4.3** Neorientovaná plocha trojúhelníka v rovině, který je určen třemi body

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

je rovna $5/2$.

✱ **Návod k řešení problému 9.4.3** Posuňte nejprve trojúhelník tak, aby jeden z jeho vrcholů ležel v počátku. Uvažujte tak například o trojúhelníku, určeném body

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

tj., třemi body

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Plocha tohoto trojúhelníka je rovna *polovině absolutní hodnoty* determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

Nakreslete si obrázek.

9.4.4 Problém Jsou zadány tři body

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(1) Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

 (a) Body **a**, **b**, **c** jednoznačně určují rovinu v $\mathbb{R}^3$.

 (b) Vektory $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ jsou lineárně nezávislé.

 (c) Vektory $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ jsou lineárně nezávislé.

 (d) Vektory $\mathbf{a} - \mathbf{c}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé.

(2) Ať vektory $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ jsou lineárně nezávislé. Ukažte, že rovnice roviny, která prochází body **a**, **b**, **c**, má tvar

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 & c_1 \\ y & a_2 & b_2 & c_2 \\ z & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

✱ **Řešení problému 9.4.4**

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že podmínky (a)–(d) jsou navzájem ekvivalentní.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že rovnice roviny, která prochází body **a**, **b**, **c**, má tvar $\begin{vmatrix} x & a_1 & b_1 & c_1 \\ y & a_2 & b_2 & c_2 \\ z & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

✱ Návod k řešení problému 9.4.4

(1) Nejprve ukažte, že podmínky (b)–(d) jsou navzájem ekvivalentní.

Návod k důkazu, že z (b) plyne (c): ať pro reálná a, b platí $a(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + b(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{o}$. Protože $a(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + b(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = (-a - b)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + b(\mathbf{c} - \mathbf{a})$, platí rovnost $(-a - b)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + b(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{o}$. Podle (b) musí platit $-a - b = 0$ a $b = 0$. Platí tedy $a = b = 0$; vektory $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ a $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ jsou lineárně nezávislé.

Důkazy toho, že z (c) plyne (d) a toho, že z (d) plyne (b), jsou vedeny analogicky.

Nakonec ukažte, že (a) je ekvivalentní (například) podmínce (b). Postupujte takto: uvažujte o geometrickém významu následujících afinních podprostorů

$$\mathbf{a} + \mathsf{span}(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) \qquad \mathbf{b} + \mathsf{span}(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b}) \qquad \mathbf{c} + \mathsf{span}(\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c})$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Dále odvoďte, že rovnosti

$$\mathbf{a} + \mathsf{span}(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} + \mathsf{span}(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c} + \mathsf{span}(\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c})$$

platí právě tehdy, když platí rovnosti

$$\mathsf{span}(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathsf{span}(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathsf{span}(\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c})$$

Poté je již snadné ekvivalenci podmínek (a) a (b) dokázat.

(2) Inspirujte se řešením Problému 9.3.1.

Téma 10

Determinanty a řešení soustav rovnic

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14

Co se procvičuje: výpočty determinantu čvercové matice pomocí rozvoje podle řádku/sloupce, adjungovaná matice, determinanty a řešení soustav se čtvercovou maticí.

Poznámka: Příklady na výpočet determinantu matice pomocí rozvoje podle řádku/sloupce jsou mechanické povahy. Dostatečný počet takových příkladů si jistě vymyslíte sami. O správnosti svého řešení se přesvědčete pomocí dostupných online kalkulátorů.

10.1 Výpočet determinantu rozvojem podle řádku nebo sloupce

10.1.1 Problém Rozvojem podle vhodného řádku/sloupce spočtete determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 10.1.1** Platí $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

✱ **Komentář k problému 10.1.1** Nabízí se použít rozvoj podle prvního sloupce nebo podle druhého sloupce (v každém z těchto sloupců je totiž „hodně“ nul). Předvedeme oba výpočty.

(1) Rozvoj podle prvního sloupce.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
&= 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad + 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

kde v poslední rovnosti jsme využili toho, že determinant matice s alespoň jedním nulovým sloupcem je nutně roven nule.[1]

(2) Rozvoj podle druhého sloupce.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
&= 0 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

kde v poslední rovnosti jsme využili toho, že determinant matice s alespoň jedním nulovým sloupcem je nutně roven nule.

Poznámka: samozřejmě, že k výpočtu je možné použít rozvoj determinantu podle *libovolného* řádku nebo sloupce. Například:

[1] Dokažte toto tvrzení. Viz Problém 10.3.1.

(3) Rozvoj podle třetího řádku:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
&= 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&\quad + 7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 7 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}_{=0} - 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

kde každý z determinantů spočteme buď Sarrusovým pravidlem nebo rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce.

10.1.2 Problém Rozvojem podle vhodně zvoleného řádku/sloupce spočtěte determinant

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
$$

nad $\mathbb{Z}_7$.

✱ **Řešení problému 10.1.2** Platí $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6$ v $\mathbb{Z}_7$.

✱ **Komentář k problému 10.1.2** Začneme výpočtem determinantu rozvojem podle prvního řádku (determinanty násobené nulou již nebudeme psát):

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}
$$

a každý z jednotlivých determinantů spočteme rozvojem podle vhodného řádku nebo sloupce:

(1) Rozvoj podle prvního sloupce (determinanty násobené nulou již nebudeme psát):

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}
&= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{=0} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{=6} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

kde jednotlivé determinanty lze spočítat pomocí (například) Sarrusova pravidla. Pozor: počítáme v $\mathbb{Z}_7$.

(2) Rozvoj podle prvního sloupce (determinanty násobené nulou již nebudeme psát):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{=0} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{=6} \\ &= 3\end{aligned}$$

kde jednotlivé determinanty lze spočítat pomocí (například) Sarrusova pravidla. Pozor: počítáme v $\mathbb{Z}_7$.

(3) Rozvoj podle prvního sloupce (determinanty násobené nulou již nebudeme psát):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{=6} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{=2} \\ &= 6\end{aligned}$$

kde jednotlivé determinanty lze spočítat pomocí (například) Sarrusova pravidla. Pozor: počítáme v $\mathbb{Z}_7$.

Celkem tedy dostáváme rovnost

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 3 + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 6 = 6$$

v $\mathbb{Z}_7$.

Poznámka. Je jasné, že „nejrozumnější“ je kombinovat GEM a rozvoj podle řádku/sloupce. Příklad lze tedy spočítat i takto:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 \\ R_5 \end{matrix} \quad \text{(dále: rozvoj podle prvního sloupce)} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 6^{-1}R_1 \\ R_3 \\ R_4 - 6^{-1}R_1 \end{matrix} \quad \text{(dále: rozvoj podle prvního sloupce)} \\ &= 6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - 6^{-1}R_1 \\ R_3 - 3 \cdot 6^{-1}R_1 \end{matrix} \quad \text{(dále: rozvoj podle prvního sloupce)} \\ &= 6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 6 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 6 \\ &= 6\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $6^{-1} = 6$ v $\mathbb{Z}_7$.

10.2 Adjungovaná matice a Cramerova věta

10.2.1 Problém Nalezněte $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 10.2.1** Platí $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -20 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & -8 & 20 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 10.2.1** Protože $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$ je *transponovaná* matice algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$, spočteme nejprve algebraické doplňky jednotlivých posic v matici $\mathbf{A}$, vytvoříme z nich matici $\mathbf{D}$ a na závěr spočteme $\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{D}^T$.

(1) Sestavení matice $\mathbf{D}$ algebraických doplňků posic v matici $\mathbf{A}$.

(a) Algebraický doplněk posice $(1, 1)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Algebraický doplněk posice $(2, 1)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

(c) Algebraický doplněk posice $(3, 1)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

(d) Algebraický doplněk posice $(1, 2)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

(e) Algebraický doplněk posice $(2, 2)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

(f) Algebraický doplněk posice $(3, 2)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

(g) Algebraický doplněk posice $(1, 3)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

(h) Algebraický doplněk posice $(2, 3)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

(i) Algebraický doplněk posice $(3, 3)$ v matici $\mathbf{A}$ je

$$(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

Tudíž

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 10 & -1 & -8 \\ -20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

(2) Výpočet adjungované matice $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$. Platí

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 10 & -1 & -8 \\ -20 & 5 & 20 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -20 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & -8 & 20 \end{pmatrix}$$

10.2.2 Problém Pomocí adjungované matice nalezněte inversi (pokud existuje) k matici

$$\mathbf{L}_t = \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0 & 0 \\ -\sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr.

✱ **Řešení problému 10.2.2** Pro každé $t \in \mathbb{R}$ matice $(\mathbf{L}_t)^{-1}$ existuje a platí

$$(\mathbf{L}_t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což lze díky rovnostem $\cosh t = \cosh(-t)$ a $\sinh t = -\sinh(-t)$ zapsat i jako $(\mathbf{L}_t)^{-1} = \mathbf{L}_{-t}$.

✱ **Komentář k problému 10.2.2** Připomeňme, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

a proto pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\cosh t > 0 \quad \text{a} \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

(1) Spočteme $\det(\mathbf{L}_t)$ a tím rozhodneme, pro která $t \in \mathbb{R}$ existuje $(\mathbf{L}_t)^{-1}$. Pro výpočet determinantu je nejvhodnější použít GEM.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{L}_t) &= \begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0 & 0 \\ -\sinh t & \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\cosh t} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0 & 0 \\ -\cosh t \cdot \sinh t & \cosh^2 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ \cosh t \cdot R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{\cosh t} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 + \sinh t \cdot R_1 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{\cosh t} \cdot \cosh t \\
&= 1
\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že $\cosh t \neq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a toho, že determinant matice v horním blokovém tvaru je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Protože $\det(\mathbf{L}_t) = 1$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, matice $(\mathbf{L}_t)^{-1}$ existuje pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

(2) Spočteme $\operatorname{adj}(\mathbf{L}_t)$. Postupujeme stejně jako při řešení Problému 10.2.1: nejprve spočteme algebraické doplňky jednotlivých posic v matici $\mathbf{L}_t$ a matici takto získaných algebraických doplňků transponujeme.

(a) Výpočet algebraických doplňků.

$$\text{posice } (1,1): \quad (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cosh t$$

$$\text{posice } (2,1): \quad (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -\sinh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sinh t$$

$$\text{posice } (3,1): \quad (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -\sinh t & 0 & 0 \\ \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (4,1): \quad (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -\sinh t & 0 & 0 \\ \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (1,2): \quad (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -\sinh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sinh t$$

$$\text{posice } (2,2): \quad (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cosh t$$

$$\text{posice } (3,2): \quad (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & 0 & 0 \\ -\sinh t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (4,2): \quad (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & 0 & 0 \\ -\sinh t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (1,3): \quad (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -\sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (2,3): \quad (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (3,3): \quad (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0 \\ -\sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\text{posice } (4,3): \quad (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0 \\ -\sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (1,4):\quad (-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} -\sinh t & \cosh t & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (2,4):\quad (-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (3,4):\quad (-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0\\ -\sinh t & \cosh t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\text{posice } (4,4):\quad (-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix} \cosh t & -\sinh t & 0\\ -\sinh t & \cosh t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

Matice algebraických doplňků jednotlivých posic v matici $\mathbf{L}_t$ tedy je

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) Pro výpočet adjungované matice $\operatorname{adj}(\mathbf{L}_t)$ je třeba pouze transponovat matici algebraických doplňků jednotlivých posic v matici $\mathbf{L}_t$.

$$\operatorname{adj}(\mathbf{L}_t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) Využijeme Cramerovu větu pro výpočet $(\mathbf{L}_t)^{-1}$.

$$(\mathbf{L}_t)^{-1} = (\det(\mathbf{L}_t))^{-1}\cdot \operatorname{adj}(\mathbf{L}_t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Poznámka: protože platí rovnosti

$$\cosh(-t) = \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \cosh t \quad \text{a} \quad -\sinh(-t) = -\frac{e^{-t}-e^{t}}{2} = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} = \sinh t$$

můžeme psát

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 & 0\\ \sinh t & \cosh t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = L_{-t}$$

a proto lze psát $(\mathbf{L}_t)^{-1} = \mathbf{L}_{-t}$.[2]

10.2.3 Problém Vyřešte soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a^2+3a\\ 1 & a+1 & 1 & a^3+3a^2\\ 1 & 1 & a+1 & a^4+3a^3\end{array}\right)$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

[2] Porovnejte tuto rovnost s rovností $(\mathbf{R}_\alpha)^{-1} = \mathbf{R}_{-\alpha}$ pro matici rotace $\mathbf{R}_\alpha$ v rovině. Matici $\mathbf{L}_t$ se říká matice *hyperbolické rotace* (o hyperbolický úhel t) v $\mathbb{R}^4$. Hyperbolická rotace $\mathbf{L}_t$ se používá ve speciální teorii relativity.

✱ **Řešení problému 10.2.3** Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ má zadaná rovnice jediné řešení

$$\begin{pmatrix} 2-a^2 \\ 2a-1 \\ a^3+2a^2-a-1 \end{pmatrix}$$

Pro $a = -3$ má soustava jako řešení množinu $\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Pro $a = 0$ má soustava jako řešení množinu $\mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

✱ **Komentář k problému 10.2.3** Předvedeme *doporučenou* metodu řešení.

(1) Zadaná soustava má jediné řešení právě tehdy když platí

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Toto jediné řešení nalezneme pomocí Cramerovy věty.

(2) Nalezneme všechna $a \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 0$$

Pro každé takové a nalezneme řešení pomocí GEM.

V každém případě potřebujeme spočítat

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

Můžeme postupovat například Sarrusovým pravidlem

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 1 + 1 - (a+1) - (a+1) - (a+1) = a^3 + 3a^2 = a^2(a+3)$$

Rovnice $a^3 + 3a^2 = 0$ má tedy dvojnásobný kořen $a_{1,2} = 0$ a jednonásobný kořen $a_3 = -3$.

Proto platí

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad a = 0 \text{ nebo } a = -3$$

(1) Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ má zadaná rovnice jediné řešení

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

kde

$$
p_1 = \frac{\begin{vmatrix} a^2+3a & 1 & 1 \\ a^3+3a^2 & a+1 & 1 \\ a^4+3a^3 & 1 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{(a^2+3a)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 1 \\ a^2 & 1 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{a\cdot(a+3)\cdot(2a-a^3)}{a^2(a+3)} = 2-a^2
$$

$$
p_2 = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a^2+3a & 1 \\ 1 & a^3+3a^2 & 1 \\ 1 & a^4+3a^3 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{(a^2+3a)\cdot \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{a\cdot(a+3)\cdot(2a^2-a)}{a^2(a+3)} = 2a-1
$$

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a^2+3a \\ 1 & a+1 & a^3+3a^2 \\ 1 & 1 & a^4+3a^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{(a^2+3a)\cdot \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}} = \frac{a\cdot(a+3)\cdot(a^4+2a^3-a^2-a)}{a^2(a+3)} \\
&= a^3+2a^2-a-1
\end{aligned}
$$

Při výpočtu determinantů v čitatelích jsme použili toho, že determinant je v každém ze sloupců lineární zobrazení.

(2) Pro $a \in \{-3, 0\}$ použijeme GEM.

(a) Pro $a = -3$ máme řešit soustavu

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)
$$

Postupujeme standardně:

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ 2R_2+R_1 \\ 2R_3+R_1 \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3+R_2 \end{array}
\end{aligned}
$$

Řešením je množina

$$
\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})
$$

(b) Pro $a = 0$ máme řešit soustavu

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

Opět postupujeme standardně:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \end{array}
$$

Řešením je množina

$$\mathsf{span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

10.2.4 Problém Nalezněte podmínku pro reálná čísla a, b, c, A, B, C tak, aby se roviny

$$x+y+z=1 \quad ax+by+cz=1 \quad Ax+By+Cz=1$$

v $\mathbb{R}^3$ protínaly v jediném bodě. Tento jediný bod najděte.

✱ Řešení problému 10.2.4 Roviny

$$x+y+z=1 \quad ax+by+cz=1 \quad Ax+By+Cz=1$$

v $\mathbb{R}^3$ se protínají v jediném bodě právě tehdy, když platí

$$bC+aB+cA-bA-aC-cB\neq 0$$

Pokud $bC+aB+cA-bA-aC-cB\neq 0$ je bod

$$\begin{pmatrix}\dfrac{bC+B+c-C-cB}{bC+aB+cA-bA-aC-cB}\\ \dfrac{C+a+cA-A-aC-c}{bC+aB+cA-bA-aC-cB}\\ \dfrac{b+aB+A-bA-a-B}{bC+aB+cA-bA-aC-cB}\end{pmatrix}$$

jediným průsečíkem rovin

$$x+y+z=1 \quad ax+by+cz=1 \quad Ax+By+Cz=1$$

✱ Komentář k problému 10.2.4 Roviny

$$x+y+z=1 \quad ax+by+cz=1 \quad Ax+By+Cz=1$$

v $\mathbb{R}^3$ se protínají v jediném bodě právě tehdy, když soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\a&b&c&1\\A&B&C&1\end{array}\right)$$

má jediné řešení. To nastane právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\A&B&C\end{vmatrix}\neq 0$$

Spočteme tedy (například Sarrusovým pravidlem)

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\A&B&C\end{vmatrix}=bC+aB+cA-bA-aC-cB$$

Roviny

$$x+y+z=1 \quad ax+by+cz=1 \quad Ax+By+Cz=1$$

v $\mathbb{R}^3$ se protínají v jediném bodě právě tehdy, když platí

$$bC+aB+cA-bA-aC-cB\neq 0$$

V případě $bC + aB + cA - bA - aC - cB \neq 0$ nalezneme jediné řešení

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ A & B & C & 1 \end{array}\right)$$

Cramerovou větou:

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 1 & B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}} = \frac{bC + B + c - C - cB}{bC + aB + cA - bA - aC - cB}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & c \\ A & 1 & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}} = \frac{C + a + cA - A - aC - c}{bC + aB + cA - bA - aC - cB}$$

$$p_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ A & B & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}} = \frac{b + aB + A - bA - a - B}{bC + aB + cA - bA - aC - cB}$$

10.3 Problémy s návodem k řešení

10.3.1 Problém Ať $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ je sloupcový zápis čtvercové matice nad $\mathbb{F}$. Dokažte, že platí: pokud $\mathbf{a}_j = \mathbf{o}$ pro nějaké $j = 1, \ldots, n$, potom $\det(\mathbf{A}) = 0$.

✱ **Řešení problému 10.3.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pokud $\mathbf{a}_j = \mathbf{o}$ pro nějaké $j = 1, \ldots, n$, potom $\det(\mathbf{A}) = 0$.

✱ **Návod k řešení problému 10.3.1** Využijte jednu ze základních vlastností determinantu (v obou případech jde o využití rozvoje deteminantu podle j-tého sloupce).

(1) Funkce

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, -, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$$

s hodnotami

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, -, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) : \mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

je lineární. Proto platí

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, -, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n) : \mathbf{o} \mapsto 0$$

(2) Podle věty o rozvoji podle j-tého řádku platí

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{o},\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_n) &= \det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{j-1},\sum_{i=1}^{n}0\cdot\mathbf{e}_i,\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}0\cdot\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{j-1},\mathbf{e}_i,\mathbf{a}_{j+1},\dots,\mathbf{a}_n)\\ &= 0\end{aligned}$$

10.3.2 Problém Ať $\mathbf{A}$ je čtvercová matice rozměrů $n\times n$ nad $\mathbb{F}$, kde $n\geq 2$. Nalezněte vzorec pro výpočet $\det(\mathrm{adj}(A))$.

✱ **Řešení problému 10.3.2** Platí $\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))=(\det(\mathbf{A}))^{n-1}$.

✱ **Návod k řešení problému 10.3.2** Podle Cramerovy věty platí rovnost $\mathbf{A}\cdot\mathrm{adj}(\mathbf{A})=\det(\mathbf{A})\cdot\mathbf{E}_n$. Výpočet rozdělte na dvě části.

(1) Platí $\det(\mathbf{A})\neq 0$. Aplikujte det na obě strany rovnosti z Cramerovy věty. Platí tedy rovnost

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathrm{adj}(\mathbf{A}))=\det(\det(\mathbf{A})\cdot\mathbf{E}_n)$$

Využijte vlastnosti determinantu a přepište poslední rovnost do tvaru

$$\det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))=(\det(\mathbf{A}))^n$$

Tuto rovnost upravte na rovnost

$$\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))=(\det(\mathbf{A}))^{n-1}$$

s využitím faktu, že $\det(\mathbf{A})\neq 0$.

(2) Platí $\det(\mathbf{A})=0$. Upravte znění Cramerovy věty na rovnost $\mathbf{A}\cdot\mathrm{adj}(\mathbf{A})=\mathbf{O}_{n,n}$. Proto $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$ nemůže být isomorfismus. Tudíž platí $\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))=0$.

Ukázali jsme

$$\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))=\begin{cases}(\det(\mathbf{A}))^{n-1}, & \text{pokud } \det(\mathbf{A})\neq 0\\ 0, & \text{pokud } \det(\mathbf{A})=0\end{cases}$$

To lze zapsat jedinou rovností: $\det(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))=(\det(\mathbf{A}))^{n-1}$.

10.3.3 Problém Ať $\mathbf{A}$ je čtvercová matice rozměrů $n\times n$ nad $\mathbb{F}$. Dokažte následující tvrzení:

(1) Platí $\mathrm{adj}(\mathbf{A}^T)=(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))^T$.

(2) Jestliže $\mathbf{A}$ je regulární matice, potom i $\mathbf{A}^T$ je regulární a platí $(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$. Při důkazu použijte Cramerovu větu.[a]

[a] Rovnost $(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$ lze dokázat i *bez* použití Cramerovy věty. Ukažte nejprve, že z rovnosti $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{E}_n$ plyne rovnost $\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{A}^T=\mathbf{E}_n$. Poté ukažte, že $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$, a tudíž $\mathbf{X}^T=(\mathbf{A}^T)^{-1}$.

✱ **Řešení problému 10.3.3** Řešením problému jsou správně vedené důkazy toho, že (1) platí a toho, že (2) platí.

✱ **Návod k řešení problému 10.3.3**

(1) K důkazu rovnosti stačí ukázat, že pro každou posici (i,j) platí:

$$\text{algebraický doplněk posice } (i,j) \text{ v matici } \mathbf{A}^T = \text{algebraický doplněk posice } (j,i) \text{ v matici } \mathbf{A}$$

Označte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

To znamená, že platí

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Podle věty o výpočtu algebraických doplňků platí:

$$\text{algebraický doplněk posice } (i,j) \text{ v matici } \mathbf{A}^T = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{j-1,1} & a_{j+1,1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,i-1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j+1,i-1} & \dots & a_{n,i-1} \\ a_{1,i+1} & \dots & a_{j-1,i+1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{n,i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{j-1,n} & a_{j+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

a

$$\text{algebraický doplněk posice } (j,i) \text{ v matici } \mathbf{A} = (-1)^{j+i} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{j+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Protože determinant transponované matice je stejný jako determinant původní matice, platí rovnost

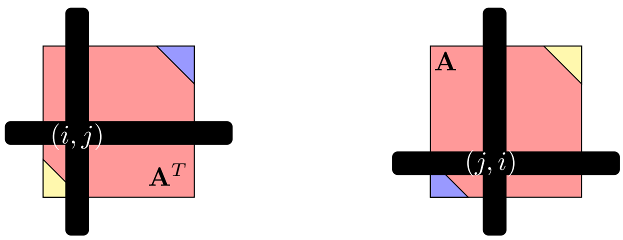
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{j-1,1} & a_{j+1,1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,i-1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j+1,i-1} & \dots & a_{n,i-1} \\ a_{1,i+1} & \dots & a_{j-1,i+1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{n,i+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{j-1,n} & a_{j+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{j+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Tudíž

$$\text{algebraický doplněk posice } (i,j) \text{ v matici } \mathbf{A}^T = \text{algebraický doplněk posice } (j,i) \text{ v matici } \mathbf{A}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka: výše uvedený výpočet je přesný zápis intuitivního pohledu daného obrázky



kde nalevo je determinant matice $\mathbf{A}^T$, ze které je vynechán i-tý řádek a j-tý sloupec, a napravo je determinant matice $\mathbf{A}$, ze které je vynechán j-tý řádek a i-tý sloupec. Oba determinanty jsou stejné. Samozřejmě: výše uvedené obrázky jsou vhodnou pomůckou, *netvoří ale důkaz*.

(2) Ať $\mathbf{A}$ je regulární. Potom platí $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Protože $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$, platí $\det(\mathbf{A}^T) \neq 0$. proto je $\mathbf{A}^T$ regulární matice.

Podle Cramerovy věty (aplikované na matici $\mathbf{A}^T$), vlastností determinantu a části (1) platí rovnosti

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\det(\mathbf{A}^T))^{-1} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}^T) = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}^T) = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot (\mathrm{adj}(\mathbf{A}))^T$$

Můžeme tedy psát

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot (\mathrm{adj}(\mathbf{A}))^T = \Big((\det(\mathbf{A}))^{-1} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})\Big)^T = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

a to jsme chtěli ukázat.

10.3.4 Problém Nalezněte řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

✱ **Řešení problému 10.3.4** Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ má soustava jediné řešení $\begin{pmatrix} \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \\ \frac{1}{a+3} \end{pmatrix}$. Pro $a = -3$ zadaná soustava nemá řešení. Pro $a = 1$ má množina řešení soustavy tvar $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

✱ **Návod k řešení problému 10.3.4** Nejprve spočtěte determinant matice soustavy:[3]

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

[3] Připomenutí: analogie Sarrusova pravidla pro matice rozměrů 4×4 *neexistuje*. Viz Problém 9.4.2.

Pro $a \neq 0$ lze postupovat takto:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}
&= \frac{1}{a^3} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & a & a \\ a & a & a^2 & a \\ a & a & a & a^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ aR_2 \\ aR_3 \\ aR_4 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{a^3} \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & a-1 & a^2-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \end{matrix} \quad \text{(poté: rozvoj podle prvního sloupce)} \\
&= \frac{1}{a^3} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & a-1 \\ a-1 & a^2-1 & a-1 \\ a-1 & a-1 & a^2-1 \end{vmatrix} \quad \text{(poté: determinant skalárního násobku matice)} \\
&= \frac{1}{a^2} \cdot (a-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \quad \text{(poté: Sarrusovo pravidlo)} \\
&= \frac{(a-1)^3}{a^2} \cdot \big((a+1)^3 + 2 - (a+1) - (a+1) - (a+1)\big) \\
&= \frac{(a-1)^3}{a^2} \cdot (a^3 + 3a^2) \\
&= (a-1)^3 \cdot (a+3)
\end{aligned}
$$

Pro $a = 0$ platí

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 \\ R_1 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_4 \end{matrix} \quad \text{(poté: rozvoj podle prvního sloupce)} \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{(poté: Sarrusovo pravidlo)} \\
&= -(1+1+1) \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Ukázali jsme, že

$$
\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{právě tehdy, když} \quad a = 1 \text{ nebo } a = -3
$$

Dále postupujte standardně:

(1) Pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ použijte Cramerovo pravidlo.

(2) Pro $a \in \{-3, 1\}$ použijte GEM.

10.3.5 Problém Nalezněte všechny hodnoty reálných čísel a, b, c, pro které má soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 2 \\ b+c & a+c & a+b & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

jediné řešení. Toto jediné řešení nalezněte.

✱ **Řešení problému 10.3.5** Zadaná soustava nemá jediné řešení pro žádná reálná čísla a, b, c.

✱ **Návod k řešení problému 10.3.5** Spočtěte

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+c) + b(a+b) + c(b+c) - c(a+c) - b(b+c) - a(a+b) = 0$$

a použijte Cramerovu větu.

Téma 11

Vlastní vektory a vlastní hodnoty, diagonalisace

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárního zobrazení, vlastní podprostor lineárního zobrazení, diagonalisace čtvercové matice.

11.1 Vlastní hodnoty, vlastní vektory a vlastní podprostory

11.1.1 Problém Ať $a \in \mathbb{R}$. Pro matici zkosení

$$\mathbf{S}_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

nalezněte vlastní hodnoty a vlastní vektory.

✱ **Řešení problému 11.1.1** Zobrazení $\mathbf{S}_a$ má dvojnásobnou vlastní hodnotu 1. Platí

$$\mathsf{eigen}(1, \mathbf{S}_a) = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{pro } a = 0 \\ \mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), & \text{pro } a \neq 0 \end{cases}$$

✱ **Komentář k problému 11.1.1** Jde o standardní příklad.

(1) Nalezení vlastních hodnot.

(a) Sestavíme charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{S}_a}(x)$:

$$\mathrm{char}_{\mathbf{S}_a}(x) = \det(\mathbf{S}_a - x\mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 1-x & a \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2$$

(b) Vyřešíme charakteristickou rovnici $\mathrm{char}_{\mathbf{S}_a}(x) = 0$.
Rovnice
$$(1-x)^2 = 0$$
má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 1$.

Zobrazení $\mathbf{S}_a$ má dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{1,2} = 1$.

(2) Nalezení vlastních podprostorů.
Potřebujeme nalézt $\mathsf{eigen}(1, \mathbf{S}_a) = \ker(\mathbf{S}_a - 1 \cdot \mathbf{E}_2)$. Protože
$$\mathbf{S}_a - 1 \cdot \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
musíme vyřešit soustavu
$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

(a) $a = 0$.
Soustava
$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
má jako řešení množinu
$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathbb{R}^2$$
Platí tedy
$$\mathsf{eigen}(1, \mathbf{S}_0) = \mathbb{R}^2$$

(b) $a \neq 0$.
Soustava
$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
má jako řešení množinu
$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$
Pro $a \neq 0$ tedy platí
$$\mathsf{eigen}(1, \mathbf{S}_a) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

11.1.2 Problém Pro matici
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
nad $\mathbb{R}$ nalezněte vlastní hodnoty a vlastní podprostory.

✱ **Řešení problému 11.1.2** Matice $\mathbf{M}$ má trojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{1,2,3} = 2$ a pro příslušný vlastní podprostor platí $\mathsf{eigen}(2, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

✱ **Komentář k problému 11.1.2** Spočteme nejprve charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ matice $\mathbf{M}$:
$$\begin{aligned} \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) &= \det(\mathbf{M} - x \cdot \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -4 & 4-x & 0 \\ -2 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = -x \cdot (4-x) \cdot (2-x) + 4 \cdot (2-x) \\ &= (2-x) \cdot (x^2 - 4x + 4) = (2-x) \cdot (x-2)^2 = -(x-2)^3 \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = 0$ má tedy trojnásobný kořen $\lambda_{1,2,3} = 2$. To znamená, že matice $\mathbf{M}$ má trojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{1,2,3} = 2$.

Protože $\mathsf{eigen}(2, \mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - 2 \cdot \mathbf{E}_3)$, máme vyřešit soustavu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tato soustava má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

To znamená, že

$$\mathsf{eigen}(2, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

11.1.3 Problém Pro lineární zobrazení $\mathbf{der} : \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \longrightarrow R^{\leq 3}[x]$ definované předpisem

$$\mathbf{der}(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3ax^2 + 2bx + c)$$

nalezněte vlastní hodnoty a vlastní podprostory.

✱ **Řešení problému 11.1.3** Zobrazení **der** má čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{1,2,3,4} = 0$ a pro příslušný vlastní podprostor platí $\mathsf{eigen}(0, \mathbf{der}) = \mathsf{span}(1)$.

✱ **Komentář k problému 11.1.3** Předvedeme *standardní* a *universální* postup řešení problému tohoto typu. Výpočet rozdělíme na několik kroků.

(1) Nalezneme matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení **der** vzhledem k (jakékoli) uspořádané bázi B lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$. Vlastní hodnoty zobrazení **der** jsou totožné s vlastními hodnotami matice $\mathbf{M}$.

(2) Nalezneme vlastní podprostory matice $\mathbf{M}$:

(3) Využijeme isomorfismus $\mathbf{coord}_B$ k nalezení vlastních podprostorů lineárního zobrazení **der**.

Nyní podrobněji:

(1) Jako uspořádanou bázi prostoru $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ zvolíme seznam $B = (x^3, x^2, x, 1)$. Protože diagram[1]

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4 \arrow[rr, "\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}"] & & \mathbb{R}^4 \\ \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[rr, "\mathbf{der}"'] & & \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

je komutativní, je matice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

maticí lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi B.

[1] Jde o standardní výpočet. Viz problémy z Tématu 7.1.

Nyní nalezneme vlastní hodnoty matice $\mathbf{M}$, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = 0$. Protože

$$\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = \det(\mathbf{M} - x \cdot \mathbf{E}_4) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = x^4$$

má matice $\mathbf{M}$ čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{1,2,3,4} = 0$.

(2) Nalezneme vlastní podprostor $\mathsf{eigen}(0, \mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - 0 \cdot \mathbf{E}_4)$. Máme tedy vyřešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešením této soustavy je množina

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Proto platí

$$\mathsf{eigen}(0, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(3) Platí

$$\mathbf{coord}_B(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a proto platí

$$\mathsf{eigen}(0, \mathbf{der}) = \mathsf{span}(1)$$

11.1.4 Problém V tomto příkladu pracujeme s lineárním prostorem $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ všech reálných matic rozměrů 2×2. Jde o lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Předpisem

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

je zadáno lineární zobrazení[a]

$$\mathbf{f} : \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

Nalezněte vlastní hodnoty a vlastní podprostory zobrazení $\mathbf{f}$.

[a] Zobrazení $\mathbf{f}$ je skutečně lineární. To se dokáže analogicky řešení Problému 6.2.2(1).

✱ **Řešení problému 11.1.4** Lineární zobrazení $\mathbf{f}$ má dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{1,2} = 0$ a dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{3,4} = 7$. Dále platí

$$\mathsf{eigen}(0, \mathbf{f}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \quad \text{a} \quad \mathsf{eigen}(7, \mathbf{f}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$$

✱ **Komentář k problému 11.1.4** Budeme postupovat stejně jako při řešení Problému 11.1.3. Výpočet rozdělíme na následující kroky:

(1) Nalezneme matici $\mathbf{M}$ lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k (jakékoli) uspořádané bázi B lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Potom vlastní hodnoty lineárního zobrazení jsou přesně kořeny charakteristické rovnice $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)=0$.

(2) Nalezneme vlastní podprostory matice $\mathbf{M}$ příslušné vlastním hodnotám matice $\mathbf{M}$.

(3) Využitím $\mathbf{coord}_B$ „přepočítáme" vlastní podprostory matice $\mathbf{M}$ na vlastní podprostory lineárního zobrazení $\mathbf{f}$.

Nyní podrobně:

(1) Zvolme jako B následující uspořádanou bázi[2] lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$:

$$B=(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})$$

Protože diagram[3]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^4 \arrow[rr, "\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&6&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&6\end{pmatrix}"] && \mathbb{R}^4 \\
\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[rr, "\mathbf{f}"'] && \mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"']
\end{tikzcd}$$

je komutativní, platí, že

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&6&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&6\end{pmatrix}$$

je matice lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi B.

(2) Nalezení $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$.
Spočteme[4]

$$\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)=\det(\mathbf{M}-x\cdot\mathbf{E}_4)=\begin{vmatrix}1-x&3&0&0\\2&6-x&0&0\\0&0&1-x&3\\0&0&2&6-x\end{vmatrix}=x^2\cdot(x-7)^2$$

(3) Rovnice $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)=0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2}=0$ a dvojnásobný kořen $\lambda_{3,4}=7$. To znamená, že lineární zobrazení $\mathbf{f}$ má dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{1,2}=0$ a dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_{3,4}=7$.

(4) Nalezneme vlastní podprostory matice $\mathbf{M}$.

(a) Protože $\mathsf{eigen}(0,\mathbf{M})=\ker(\mathbf{M}-0\cdot\mathbf{E}_4)$, máme vyřešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&0&0&0\\2&6&0&0&0\\0&0&1&3&0\\0&0&2&6&0\end{array}\right)$$

Množina řešení této soustavy je[5]

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix})$$

[2] Seznam B skutečně tvoří bázi lineárního prostoru $\mathsf{Lin}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. To se dokáže analogicky řešení Problému 6.1.3.
[3] Nalezení matice $\mathbf{M}$ zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k uspořádané bázi B se provede analogicky řešení Problému 7.1.2.
[4] Výpočet determinantu se provede analogicky řešením problémů Tématu 10.1.
[5] Jde o standardní použití GEM.

Ukázali jsme, že

$$\mathsf{eigen}(0, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(b) Protože $\mathsf{eigen}(7, \mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - 7 \cdot \mathbf{E}_4)$, máme vyřešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Množina řešení této soustavy je[6]

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

Ukázali jsme, že

$$\mathsf{eigen}(7, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

(5) Nalezneme vlastní podprostory lineárního zobrazení $\mathbf{f}$. Využijeme k tomu isomorfismus $\mathbf{coord}_B$.

(a) Platí

$$\mathbf{coord}_B(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{coord}_B(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proto platí

$$\mathsf{eigen}(0, \mathbf{f}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

(b) Platí

$$\mathbf{coord}_B(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{coord}_B(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Proto platí

$$\mathsf{eigen}(7, \mathbf{f}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$$

11.2 Diagonalisace matic

11.2.1 Problém Rozhodněte, zda lze diagonalisovat matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$. Pokud diagonalisovat lze, zapište diagonální matici jako podobnou matici $\mathbf{M}$.

[6] Jde o standardní použití GEM.

✱ **Řešení problému 11.2.1** Protože $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ lze v $\mathbb{R}[x]$ rozložit na lineární faktory a protože pro všechny vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{M}$ platí rovnost

$$\dim(\mathsf{eigen}(\lambda, \mathbf{M})) = \text{násobnost } \lambda \text{ jako kořene } \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$$

lze matici $\mathbf{M}$ diagonalisovat.

Platí rovnost

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

✱ **Komentář k problému 11.2.1** Nalezneme nejprve vlastní hodnoty matice $\mathbf{M}$:

$$\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = \det(\mathbf{M} - x \cdot \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & 2 \\ 6 & -4-x & 4 \\ 4 & -4 & 5-x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = -(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$$

Vlastní hodnoty jsou jednonásobné: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

Vlastní podprostory nalezneme řešením příslušných soustav:

(1) $\mathsf{eigen}(2, \mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - 2 \cdot \mathbf{E}_3)$. Soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -6 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Proto platí

$$\mathsf{eigen}(2, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

(2) $\mathsf{eigen}(1, \mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - 1 \cdot \mathbf{E}_3)$. Soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Proto platí

$$\mathsf{eigen}(1, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(3) $\mathsf{eigen}(3, \mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - 3 \cdot \mathbf{E}_3)$. Soustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$$

Proto platí

$$\mathsf{eigen}(3,\mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix})$$

Protože $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ lze v $\mathbb{R}[x]$ rozložit na lineární faktory a protože pro všechny vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{M}$ platí rovnost

$$\dim(\mathsf{eigen}(\lambda,\mathbf{M})) = \text{násobnost } \lambda \text{ jako kořene } \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$$

lze matici $\mathbf{M}$ diagonalisovat.

Dále platí

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

protože matici

$$\begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix}$$

vidíme v uspořádané bázi

$$(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix})$$

jako diagonální matici

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Poznámka: výsledný zápis podobnosti *závisí na pořadí*, ve kterém vypíšeme vlastní hodnoty a vlastní vektory matice $\mathbf{M}$. To znamená, že platí například i rovnosti

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}$$

atd.

11.2.2 Problém Využijte diagonalisaci k výpočtu $\mathbf{M}^{200}$ pro matici $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ nad $\mathbb{C}$.

✱ **Řešení problému 11.2.2** Platí $\mathbf{M}^{200} = \begin{pmatrix}2^{100}&0\\0&2^{100}\end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 11.2.2** Zkusíme matici $\mathbf{M}$ diagonalisovat. Postupujeme stejně jako v Problému 11.2.1.

(1) Vlastní hodnoty a vlastní podprostory $\mathbf{M}$.

$$\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = \det(\mathbf{M} - x\cdot\mathbf{E}_2)\begin{vmatrix}1-x&1\\-1&1-x\end{vmatrix} = (1-x)^2+1 = x^2-2x+2 = (x-(1+i))\cdot(x-(1-i))$$

Matice $\mathbf{M}$ má jednonásobné vlastní hodnoty v $\mathbb{C}$: $\lambda_1 = (1+i)$ a $\lambda_2 = (1-i)$. Příslušné vlastní podprostory dostaneme řešením soustav rovnic (v $\mathbb{C}$).

Pro $\lambda_1 = (1+i)$ máme řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix})$$

To znamená, že platí

$$\mathsf{eigen}(1+i, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix})$$

Pro $\lambda_1 = (1-i)$ máme řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix})$$

To znamená, že platí

$$\mathsf{eigen}(1-i, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix})$$

(2) Protože $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ lze v $\mathbb{C}[x]$ rozložit na lineární faktory a protože pro všechny vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{M}$ platí rovnost

$$\dim(\mathsf{eigen}(\lambda, \mathbf{M})) = \text{násobnost } \lambda \text{ jako kořene } \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$$

lze matici $\mathbf{M}$ diagonalisovat.
Platí

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

Proto platí rovnost

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{200} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

Dále platí

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} (1+i)^{200} & 0 \\ 0 & (1-i)^{200} \end{pmatrix}$$

Protože platí rovnosti

$$(1+i) = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \qquad (1-i) = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$$

platí i rovnosti

$$(1+i)^{200} = \left(\sqrt{2}\right)^{200} \cdot (\cos(200\frac{\pi}{4}) + i\sin(200\frac{\pi}{4})) = 2^{100} \cdot (\cos(50\pi) + i\sin(50\pi)) = 2^{100}$$

a

$$(1-i)^{200} = \left(\sqrt{2}\right)^{200} \cdot (\cos(200\frac{\pi}{4}) - i\sin(200\frac{\pi}{4})) = 2^{100} \cdot (\cos(50\pi) - i\sin(50\pi)) = 2^{100}$$

Tudíž platí rovnost

$$\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{200} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}$$

Protože[7]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

potřebujeme spočítat maticový součin

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{200} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100} \\ i2^{100} & -i2^{100} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{100} & 0 \\ 0 & 2 \cdot 2^{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11.2.3 Problém Posloupnost čísel a_n, kde $n \geq 0$, je zadána rekurentně následovně:

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = 6 \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4a_n, \quad \text{pro } n \geq 0$$

Využijte diagonalisaci matic k tomu, abyste nalezli explicitní vzorec pro členy posloupnosti a_n, kde $n \geq 0$.

✱ **Řešení problému 11.2.3** Pro všechna $n \geq 0$ platí $a_n = \dfrac{8 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n}{5}$.

✱ **Komentář k problému 11.2.3** Povšimněme si nejprve, že platí rovnosti

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Tyto rovnost jsme získali ze zadaného rekurentního vztahu: platí $a_2 = 3a_1 + 4a_0$ a $a_3 = 3a_2 + 4a_1$. Protože platí (z triviálních příčin) i rovnost

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

lze psát

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

To lze nyní snadno zobecnit: pro všechna $n \geq 0$ platí

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Označme[8]

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože potřebujeme počítat s mocninami matice $\mathbf{M}$, pokusíme se matici $\mathbf{M}$ digonalisovat. To provedeme stejným postupem jako v Problému 11.2.2.

[7] Nejrozumnější je použít Cramerovu větu. Viz problémy Tématu 10.2.

[8] Matici $\mathbf{M}$ říkáme *generující matice* zadané rekurentní posloupnosti. To je ovšem *nepovinná* znalost.

(1) Vlastní hodnoty matice $\mathbf{M}$. Rovnost $\det(\mathbf{M} - x\mathbf{E}_2) = 0$ je rovnost $(3-x)\cdot(-x) - 4 = 0$, neboli $x^2 - 3x - 4 = 0$. Kořeny této kvadratické rovnice jsou vlastní hodnoty matice $\mathbf{M}$: jedná se o čísla

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{a} \quad \lambda_2 = -1$$

(2) Vlastní vektory matice $\mathbf{M}$. Platí

$$\mathsf{eigen}(4,\mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} - 4\mathbf{E}_2) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \mathsf{eigen}(-1,\mathbf{M}) = \ker(\mathbf{M} + \mathbf{E}_2) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

což zjistíme vyřešením soustav rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(3) Díky (1) a (2) a větě o diagonalisovatelnosti matic platí rovnost

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Důsledkem bodu (3) jsou rovnosti

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Tudíž pro všechna $n \geq 0$ platí

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Protože víme, že $a_0 = 2$ a $a_1 = 6$ a protože[9]

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

můžeme pravou stranu výše uvedené rovnosti upravit:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 32 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n \\ 8 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

To znamená, že pro všechna $n \geq 0$ platí rovnosti

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 32 \cdot 4^n - 2 \cdot (-1)^n \\ 8 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n \end{pmatrix}$$

Speciálně: pro všechna $n \geq 0$ platí

$$a_n = \frac{8 \cdot 4^n + 2 \cdot (-1)^n}{5}$$

11.2.4 Problém Ať vektor $\vec{v}$ je vlastním vektorem lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$, příslušným vlastní hodnotě λ z $\mathbb{F}$. Ať a je libovolný nenulový skalár z $\mathbb{F}$. Rozhodněte, zda platí: vektor $a \cdot \vec{v}$ je vlastním vektorem lineárního zobrazení $\mathbf{f}$, příslušným vlastní hodnotě $a \cdot \lambda$.

[9] Pro výpočet inverse použijte Cramerovu větu, podobně jako v Problému 10.2.2.

✱ **Řešení problému 11.2.4** Tvrzení neplatí.[10] Protipříklad je identické zobrazení $\mathbf{E}_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s vlastním vektorem $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 1$, a skalár $a = 3$.

✱ **Komentář k problému 11.2.4** Ptáme se, zda platí následující dvě podmínky:

(1) Platí $a \cdot \vec{v} \neq \vec{o}$.

(2) Platí rovnost $\mathbf{f}(a \cdot \vec{v}) = (a \cdot \lambda) \cdot (a \cdot \vec{v})$.

Postupně:

(1) Protože $\vec{v}$ je vlastním vektorem lineárního zobrazení $\mathbf{f}$, platí $\vec{v} \neq \vec{o}$. Dále máme skalár a z $\mathbb{F}$, pro který platí $a \neq 0$. To znamená, že platí $a \cdot \vec{v} \neq \vec{o}$.

(2) Protože $\mathbf{f}$ je lineární zobrazení, platí

$$\mathbf{f}(a \cdot \vec{v}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{v}) = a \cdot (\lambda \cdot \vec{v})$$

kde v poslední rovnosti využíváme toho, že $\vec{v}$ je vlastní vektor lineárního zobrazení $\mathbf{f}$, příslušný vlastní hodnotě λ. Ptáme se tedy, zda platí rovnost

$$a \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) = (a \cdot \lambda) \cdot (a \cdot \vec{v})$$

nebo (po ekvivalentních úpravách), zda platí rovnost

$$(\lambda - \lambda \cdot a) \cdot \vec{v} = \vec{o}$$

Poslední rovnost je ale ekvivalentní rovnosti[11]

$$\lambda = \lambda \cdot a$$

protože $\vec{v} \neq \vec{o}$.
Rovnost $\lambda = \lambda \cdot a$ je ale v obecném tělese ekvivalentní rovnosti $(a-1) \cdot \lambda = 0$. Neboli musí platit $a = 1$ nebo $\lambda = 0$.
Máme pocit, že rovnost $\mathbf{f}(a \cdot \vec{v}) = (a \cdot \lambda) \cdot (a \cdot \vec{v})$ obecně *neplatí*. Zkonstruujeme tedy protipříklad. Protipříklad musí sestávat z následujících částí:

(a) Těleso $\mathbb{F}$ a lineární prostor L nad $\mathbb{F}$.

(b) Lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$.

(c) Vlastní vektor $\vec{v}$, příslušný vlastní hodnotě λ.

(d) Skalár a tak, že rovnost $\mathbf{f}(a \cdot \vec{v}) = (a \cdot \lambda) \cdot (a \cdot \vec{v})$ neplatí.

Protipříkladem je:

(a) L je lineární prostor $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

(b) Lineární zobrazení $\mathbf{f}$ je identické zobrazení $\mathbf{E}_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

(c) Vlastní vektor lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ je $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, příslušný vlastní hodnotě $\lambda = 1$.

(d) Skalár $a = 3$. Potom

$$\underbrace{\mathbf{f}(a \cdot \mathbf{v})}_{=\mathbf{E}_2 \cdot (3 \cdot \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}} \neq \underbrace{(a \cdot \lambda) \cdot (a \cdot \mathbf{v})}_{=(3 \cdot 1) \cdot 3 \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix}}$$

Poznámka: lze nalézt i jednodušší protipříklad, kde prostor L nad $\mathbb{F}$ má dimensi 1. Pokuste se o to.

[10] **Pozor!** Nepopleťte si to s tvrzením: *Ať vektor $\vec{v}$ je vlastním vektorem lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$, příslušným vlastní hodnotě λ z $\mathbb{F}$. Ať a je libovolný nenulový skalár z $\mathbb{F}$. Potom vektor $a \cdot \vec{v}$ je vlastním vektorem lineárního zobrazení $\mathbf{f}$, příslušným vlastní hodnotě λ.*, které platí. Důvodem je to, že $a \cdot \vec{v}$ je nenulový vektor v $\mathsf{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$, protože $\mathsf{eigen}(\lambda, \mathbf{f})$ je lineární podprostor prostoru L.

[11] Viz přednášku 1B.

11.3 Problémy s návodem k řešení

11.3.1 Problém Ať jednotlivé položky m_{ij} v matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

representují následující pravděpodobnosti:[a]

$$m_{ij} = \mathsf{Prob}(\text{je-li člověk v místě } A_j, \text{ pak přejde do místa } A_i)$$

Ukažte, že existuje nenulový vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, kde $v_1 \geq 0$, $v_2 \geq 0$, $v_1 + v_2 = 1$, a platí $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Dejte tomuto vektoru $\mathbf{v}$ pravděpodobnostní interpretaci.

[a] Představujte si například A_1 = bar Carbon a A_2 = místnost T2:D2-256.

✱ **Řešení problému 11.3.1** Platí

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Protože platí rovnost $\mathbf{Mv} = \mathbf{v}$, vektor $\mathbf{v}$ representuje *rovnovážný stav populace* dynamického systému popsaném maticí $\mathbf{M}$: $2/3$ populace jsou v místě A_1 a $1/3$ populace je v místě A_2.

✱ **Návod k řešení problému 11.3.1** Nejprve ukažte, že číslo 1 je vlastní hodnotou matice $\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) &= \det(\mathbf{M} - x \cdot \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 0.7 - x & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 - x \end{vmatrix} \\ &= (0.7 - x) \cdot (0.4 - x) - 0.3 \cdot 0.6 = x^2 - 1.1x + 0.1 = (x - 1) \cdot (x - 0.1) \end{aligned}$$

Dále nalezněte $\mathsf{eigen}(1, \mathbf{M})$: soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0 \end{array} \right)$$

má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Proto platí

$$\mathsf{eigen}(1, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

leží v $\mathsf{eigen}(1, \mathbf{M})$ a splňuje $v_1 \geq 0$, $v_2 \geq 0$, $v_1 + v_2 = 1$.

Poznámka: Tento problém je zobecněn v Problému 11.3.2.

11.3.2 Problém Dokažte následující tvrzení:

(1) Ať $\mathbf{M}$ je jakákoli čtvercová matice nad $\mathbb{F}$. Potom platí $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{M}^T}(x)$.

(2) Ať $\mathbf{M}$ je čtvercová sloupcově stochastická matice (tj. taková, že součet všech položek v každém sloupci matice $\mathbf{M}$ je roven 1) nad $\mathbb{R}$. Potom existuje nenulový vektor $\mathbf{v}$ tak, že $\mathbf{M} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$.[a]

[a] Toto tvrzení je základem algoritmu `PageRank`, viz AKLA, Dodatek F.

✱ **Řešení problému 11.3.2** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že platí (1) a toho, že platí (2).

✱ **Návod k řešení problému 11.3.2**

(1) Z vlastností determinantů plynou rovnosti

$$\begin{aligned}\mathrm{char}_{\mathbf{M}^T}(x) &= \det(\mathbf{M}^T - x\cdot\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{M}^T - x\cdot\mathbf{E}_n^T)\\ &= \det((\mathbf{M} - x\cdot\mathbf{E}_n)^T) = \det(\mathbf{M} - x\cdot\mathbf{E}_n)\\ &= \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)\end{aligned}$$

a to jsme chtěli dokázat.

(2) Předpokládejte, že $\mathbf{M}$ má rozměry $n\times n$. Označte jako $\mathbf{e}$ vektor v $\mathbb{R}^n$, který má ve všech položkách číslo 1. Využijte toho, že $\mathbf{M}$ je sloupcově stochastická k tomu, abyste ukázali, že platí $\mathbf{M}^T\cdot\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Z poslední rovnosti odvoďte, že $\mathrm{char}_{\mathbf{M}^T}(1) = 0$.

Podle části (1) platí $\mathrm{char}_{\mathbf{M}^T}(x) = \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$. To znamená, že platí $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(1) = 0$, neboli matice $\mathbf{M}$ má vlastní hodnotu 1. Pak pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{v}$ z $\mathsf{eigen}(1,\mathbf{M})$ platí rovnost $\mathbf{M}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

11.3.3 Problém Využijte diagonalisaci pro výpočet matice $\mathbf{M}^{57}$, kde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

je matice nad $\mathbb{R}$.

✱ **Řešení problému 11.3.3** Platí $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{57} = \begin{pmatrix}3^{57} & 4\cdot(3^{57}-2^{57})\\ 0 & 2^{57}\end{pmatrix}$.

✱ **Návod k řešení problému 11.3.3** Postupujte analogicky řešení Problému 11.2.2. Pro matici $\mathbf{M}$ nalezněte vlastní hodnoty a vlastní podprostory. Vlastní hodnoty jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$, obě hodnoty jsou jednonásobné. Platí

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

a proto platí

$$\begin{pmatrix}3^{57} & 0\\ 0 & 2^{57}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{57} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{57}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Musí tedy platit

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{57} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3^{57} & 0\\ 0 & 2^{57}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}$$

Protože platí

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

platí rovnosti

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{57} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3^{57} & 0\\ 0 & 2^{57}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3^{57} & 4\cdot(3^{57}-2^{57})\\ 0 & 2^{57}\end{pmatrix}$$

11.3.4 Problém Posloupnost čísel a_n, kde $n \geq 0$, je zadána rekurentně následovně:

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n, \quad \text{pro } n \geq 0$$

kde a_0 a a_1 jsou zadaná reálná čísla a kde víte, že pro reálná čísla A, B platí nerovnost $A^2 + 4B > 0$. Dokažte následující:

(1) Pro všechna $n \geq 0$ platí

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

(2) Matice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je diagonalisovatelná a platí

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

kde

$$\lambda_1 = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$$

jsou dvě (nutně různá a reálná) řešení kvadratické rovnice $x^2 - Ax - B = 0$.

(3) Z výše uvedeného odvoďte, že platí rovnost

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_2\lambda_1^{n+1} + \lambda_1\lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

a tudíž pro všechna $n \geq 0$ platí

$$a_n = \frac{a_1 \cdot (\lambda_1^n - \lambda_2^n) + a_0 \cdot (-\lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

✱ **Řešení problému 11.3.4** Řešením problému jsou správně vedené důkazy toho, že platí (1)–(3).

✱ **Návod k řešení problému 11.3.4** Postupujte stejně jako v Problému 11.2.3.

11.3.5 Problém Ať

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

je matice nad $\mathbb{R}$, kde a a b jsou libovolná reálná čísla, $b \neq 0$. Ukažte, že matici $\mathbf{M}$ nelze diagonalisovat.

✱ **Řešení problému 11.3.5** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že matici $\mathbf{M}$ nelze diagonalisovat.

✱ **Návod k řešení problému 11.3.5** Nalezněte vlastní hodnoty matice $\mathbf{M}$:

$$\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = \det(\mathbf{M} - x \cdot \mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} a - x & b \\ 0 & a - x \end{vmatrix} = (a - x)^2$$

To znamená, že $\lambda_{1,2} = a$ je dvojnásobná vlastní hodnota matice $\mathbf{M}$.

Spočtěte $\mathsf{eigen}(a, \mathbf{M})$: soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

má jako řešení množinu

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$$

Takže

$$\mathsf{eigen}(a, \mathbf{M}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$$

Protože platí

$$\dim(\mathsf{eigen}(a, \mathbf{M})) = 1 \neq 2 = \text{násobnost } a \text{ jako kořene } \mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$$

nelze matici $\mathbf{M}$ diagonalisovat.

11.3.6 Problém Zodpovězte následující otázky:

(1) Ať $a \in \mathbb{F}$ je skalár, ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Může být a vlastní hodnotou nějakého lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$?

(2) Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$, ať $\vec{v}$ je nenulový vektor z L. Může být $\vec{v}$ vlastní vektorem nějakého lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$?

✱ **Řešení problému 11.3.6**

(1) Ano, může. (Úplná odpověď vyžaduje i konstrukci příslušného lineárního zobrazení).

(2) Ano, může. (Úplná odpověď vyžaduje i konstrukci příslušného lineárního zobrazení).

✱ **Návod k řešení problému 11.3.6**

(1) Ukažte, že zobrazení $\vec{x} \mapsto a \cdot \vec{x}$ je lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$. Platí tedy $\mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \vec{x}$. Poslední rovnost využijte. (Pozor: je nutné si uvědomit, jaké podmínky musí splňovat vlastní vektor.)

(2) Zvolte pevně skalár $a \in \mathbb{F}$. Ukažte, že zobrazení $\vec{x} \mapsto a \cdot \vec{x}$ je lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \longrightarrow L$. Platí tedy $\mathbf{f}(\vec{x}) = a \cdot \vec{x}$. Poslední rovnost využijte.

11.3.7 Problém Dokažte, že pro matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Každá vlastní hodnota matice $\mathbf{M}$ je nenulová.

(2) Matice $\mathbf{M}$ je regulární.

✱ **Řešení problému 11.3.7** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že podmínky (1) a (2) jsou ekvivalentní.

✱ **Návod k řešení problému 11.3.7** Zformulujte nejprve *kontraposici*: pro matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

$(1)^*$ Matice $\mathbf{M}$ má nulovou vlastní hodnotu.

$(2)^*$ Matice $\mathbf{M}$ je singulární.

Stačí tedy dokázat ekvivalenci podmínek $(1)^*$ a $(2)^*$. Podmínka $(1)^*$ říká $\det(\mathbf{M}) = 0$, což je ekvivalentní podmínce $(2)^*$.

Téma 12

Abstraktní skalární součin

Týden v semestru:

B0B01LAG(A)
A8B01LAG 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 **12** 13 14

B6B01LAG 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 **12** 13 14

Co se procvičuje: základy abstraktního skalárního součinu, skalární součiny v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.

12.1 Výpočty s abstraktním skalárním součinem

12.1.1 Problém Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, kdy platí následující tvrzení:

(1) Ať $\langle - \mid - \rangle_1$ a $\langle - \mid - \rangle_2$ jsou skalární součiny v L. Potom vzorec

$$\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_2$$

zadává skalární součin v L.

(2) Ať $\langle - \mid - \rangle$ je skalární součin v L a ať a je reálné číslo. Potom vzorec

$$\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = a \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$$

zadává skalární součin v L.

✱ Řešení problému 12.1.1

(1) Vzorec $\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_2$ vždy zadává skalární součin v L.

(2) Vzorec $\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = a \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ zadává skalární součin v L pouze tehdy, když $a > 0$.

✱ Komentář k problému 12.1.1 V obou případech musíme použít definici *abstraktního* skalárního součinu.

(1) (a) Pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z L platí rovnosti

$$\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_2 = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle_1 + \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle_2 = \llparenthesis \vec{y} \mid \vec{x} \rrparenthesis$$

Využili jsme toho, že pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z L platí rovnosti $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_1 = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle_1$ a $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_2 = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle_2$.

(b) Ať $\vec{x}$ je pevný vektor z L. Potom obě zobrazení

$$\langle \vec{x} \mid - \rangle_1 : L \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \langle \vec{x} \mid - \rangle_2 : L \longrightarrow \mathbb{R}$$

jsou lineární. Proto je lineární i jejich součet

$$\llparenthesis \vec{x} \mid - \rrparenthesis = \langle \vec{x} \mid - \rangle_1 + \langle \vec{x} \mid - \rangle_2$$

(c) Ať $\vec{x}$ je pevný vektor z L. Protože platí nerovnosti $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle_1 \geq 0$ a $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle_2 \geq 0$, platí i nerovnost

$$\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{x} \rrparenthesis = \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle_2 \geq 0$$

Rovnost $\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{x} \rrparenthesis = 0$ platí právě tehdy, když $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle_1 = 0$ a $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle_2 = 0$. To nastane právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{o}$.

Ukázali jsme, že vzorec $\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle_2$ vždy zadává skalární součin v L.

(2) (a) Pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z L platí rovnosti

$$\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = a \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = a \cdot \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle = \llparenthesis \vec{y} \mid \vec{x} \rrparenthesis$$

Využili jsme toho, že pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z L platí rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle$

(b) Ať $\vec{x}$ je pevný vektor z L. Potom zobrazení

$$\langle \vec{x} \mid - \rangle : L \longrightarrow \mathbb{R}$$

je lineární. Proto je lineární i jeho skalární násobek

$$\llparenthesis \vec{x} \mid - \rrparenthesis = a \cdot \langle \vec{x} \mid - \rangle$$

(c) Ať $\vec{x}$ je pevný vektor z L. Protože platí nerovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geq 0$, nerovnost

$$\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{x} \rrparenthesis = a \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geq 0$$

platí pouze tehdy, když $a \geq 0$.
Rovnost $\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{x} \rrparenthesis = 0$ platí právě tehdy, když $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ nebo $a = 0$. To znamená, že $\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{x} \rrparenthesis = 0$ platí právě tehdy, když $\vec{x} = \vec{o}$ nebo $a = 0$.

Ukázali jsme, že vzorec $\llparenthesis \vec{x} \mid \vec{y} \rrparenthesis = a \cdot \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle$ zadává skalární součin v L pouze tehdy, když $a > 0$.

12.1.2 Problém Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$. Ať je seznam $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ vektorů z prostoru L lineárně nezávislý. Dokažte, že potom je matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{b}_k \mid \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_k \rangle & \langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_k \rangle & \ldots & \langle \vec{b}_k \mid \vec{b}_k \rangle \end{pmatrix}$$

regulární.

✱ **Řešení problému 12.1.2** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že matice $\mathbf{G}$ je regulární.

✱ **Komentář k problému 12.1.2** Ukážeme, že matice $\mathbf{G}$ je dokonce *positivně definitní* (potom platí nerovnost $\det(\mathbf{G}) > 0$, a proto je $\mathbf{G}$ regulární).

Z vlastností skalárního součinu plyne, že $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$. Dále musíme ukázat, že pro jakýkoli vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

platí $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ a že rovnost $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = 0$ platí právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Podle definice násobení matic je

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i \cdot x_j \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_j \rangle$$

a podle vlastností skalárního součinu platí

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i \cdot x_j \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{b}_i \mid \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \vec{b}_j \rangle$$

Označme $\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{b}_i$. Potom

$$\langle \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{b}_i \mid \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \vec{b}_j \rangle = \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle$$

Podle vlastností skalárního součinu platí $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle \geq 0$ a rovnost $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ platí právě tehdy, když platí $\vec{x} = \vec{o}$. Protože vektory $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ jsou lineárně nezávislé, rovnost $\vec{x} = \vec{o}$ platí právě tehdy, když $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$, a to je právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Ukázali jsme, že platí $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}$, že platí $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ a že rovnost $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = 0$ platí právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Matice $\mathbf{G}$ je tedy positivně definitní. Proto je matice $\mathbf{G}$ regulární.

12.1.3 Problém Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$ a ať $V = \mathsf{span}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ je nějaký jeho lineární podprostor, kde seznam $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ tvoří bázi V. Ukažte, že pro dva vektory $\vec{v}$, $\vec{v}'$ z V jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

(1) Platí rovnost $\vec{v} = \vec{v}'$.

(2) Rovnost $\langle \vec{v} \mid \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{v}' \mid \vec{b}_i \rangle$ platí pro všechna $i = 1, \ldots, k$.

✱ **Řešení problému 12.1.3** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že podmínky (1) a (2) jsou ekvivalentní.

✱ **Komentář k problému 12.1.3** Protože $\vec{v}$, $\vec{v}'$ jsou z V a protože seznam $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ tvoří bázi V, můžeme psát

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{b}_i \qquad \vec{v}' = \sum_{i=1}^{k} a'_i \cdot \vec{b}_i$$

pro jednoznačně určené skaláry a_i, a'_i, $i = 1, \ldots, k$.

Díky vlastnostem skalárního součinu platí rovnosti

$$\langle \vec{v} \mid \vec{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_j \rangle \qquad \langle \vec{v}' \mid \vec{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} a'_i \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{b}_j \rangle$$

pro všechna $j = 1, \ldots, k$.

Protože skaláry a_i, a'_i jsou určeny jednoznačně, znamená to, že obě soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{b}_k \mid \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{v} \mid \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_k \rangle & \langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_k \rangle & \ldots & \langle \vec{b}_k \mid \vec{b}_k \rangle & \langle \vec{v} \mid \vec{b}_k \rangle \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{b}_k \mid \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{v}' \mid \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle \vec{b}_1 \mid \vec{b}_k \rangle & \langle \vec{b}_2 \mid \vec{b}_k \rangle & \ldots & \langle \vec{b}_k \mid \vec{b}_k \rangle & \langle \vec{v}' \mid \vec{b}_k \rangle \end{array} \right)$$

mají jediné řešení. Navíc, soustavy mají stejnou matici soustavy. Tato matice je navíc regulární podle Problému 12.1.2. Řešení obou soustav tedy jsou stejná právě tehdy, když pravé strany obou soustav jsou stejné. To znamená, že rovnosti $a_i = a'_i$ platí pro všechna $i = 1, \ldots, k$ právě tehdy, když platí rovnosti $\langle \vec{v} \mid \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{v}' \mid \vec{b}_i \rangle$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$.

12.1.4 Problém V tomto příkladu je lineární prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ vybaven standardním skalárním součinem

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{y}$$

(1) Pro vektory $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ spočtěte $\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ a $\cos\varphi$, kde φ je úhel, který vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ svírají.

(2) Pro vektory $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ ověřte platnost rovnosti $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2 \cdot (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$. Dejte této rovnosti geometrický význam.

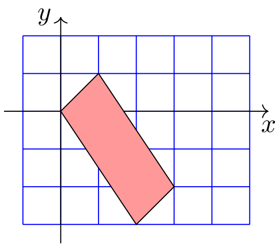
(3) Rozhodněte, zda trojúhelník zadaný třemi body $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ je pravoúhlý.

(4) Ukažte, že pro vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ v $\mathbb{R}^n$, pro které platí $\|\mathbf{a}\| = 2$ a $\|\mathbf{b}\| = 2$, platí nerovnosti $-4 \leq \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle \leq 4$.

✱ Řešení problému 12.1.4

(1) Platí $\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle = 3$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{17}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$, $\cos\varphi = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{102}}{102}$ (tj., $\varphi \approx 73°$).

(2) Řešením problému je ověření dané rovnosti výpočtem. Geometrická interpretace rovnosti je následující: vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ určují rovnoběžník



s hranami délky $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ a úhlopříčkami délky $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$. Rovnost $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = 2 \cdot (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$ tedy říká: součet druhým mocnin délek všech stran rovnoběžníka je roven součtu druhých mocnin délek jeho úhlopříček.

(3) Trojúhelník určený body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ je pravoúhlý. Pravý úhel je u vrcholu $\mathbf{a}$.

(4) Řešením problému je správné odvození nerovností $-4 \leq \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \rangle \leq 4$.

✱ Komentář k problému 12.1.4 Jedná se o standardní výpočty.

(1) Platí

$$\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 - 3 + 4 = 3$$

Protože $\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \rangle = 17$ a $\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle = 6$, platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{17} \qquad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{6}$$

Platí $\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\varphi$, proto

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{6}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{102}}{102}$$

(2) Platí

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\qquad \mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

a proto

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2=17\qquad \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=13$$

Protože platí

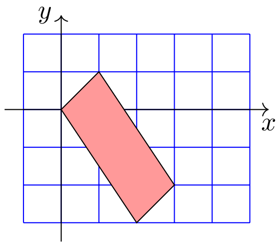
$$\|\mathbf{u}\|^2=13\qquad \|\mathbf{v}\|^2=2$$

máme ověřit rovnost

$$13+17=2\cdot(13+2)$$

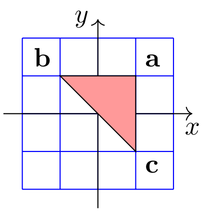
která evidentně platí.

Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ určují rovnoběžník



s hranami délky $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ a úhlopříčkami délky $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$. Rovnost $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=2\cdot(\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2)$ tedy říká: součet druhým mocnin délek všech stran rovnoběžníka je roven součtu druhých mocnin délek jeho úhlopříček.

(3) Ptáme se na to, zda některý z úhlů trojúhelníka



zadaného třemi body $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ je roven $\pi/2$. K tomu si stačí uvědomit, že platí

$$\begin{aligned}
\text{úhel u vrcholu } \mathbf{a}=\pi/2 &\quad\text{iff}\quad \langle\mathbf{b}-\mathbf{a}\mid\mathbf{c}-\mathbf{a}\rangle=0\\
\text{úhel u vrcholu } \mathbf{b}=\pi/2 &\quad\text{iff}\quad \langle\mathbf{a}-\mathbf{b}\mid\mathbf{c}-\mathbf{b}\rangle=0\\
\text{úhel u vrcholu } \mathbf{c}=\pi/2 &\quad\text{iff}\quad \langle\mathbf{a}-\mathbf{c}\mid\mathbf{b}-\mathbf{c}\rangle=0
\end{aligned}$$

Protože $\langle\mathbf{b}-\mathbf{a}\mid\mathbf{c}-\mathbf{a}\rangle=0$, je zadaný trojúhelník pravoúhlý. Pravý úhel je u vrcholu $\mathbf{a}$.

(4) Podle nerovnosti Cauchy-Schwarz-Bunyakovski platí $|\langle\mathbf{a}\mid\mathbf{b}\rangle|\leq\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|$. Protože $\|\mathbf{a}\|=\|\mathbf{b}\|=2$, platí $|\langle\mathbf{a}\mid\mathbf{b}\rangle|\leq 4$. To znamená, že platí $-4\leq\langle\mathbf{a}\mid\mathbf{b}\rangle\leq 4$.

12.2 Metrické tensory

12.2.1 Problém

(1) Ukažte, že vzorec

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

určuje skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Zakreslete jednotkovou sféru vzhledem ke skalárnímu součinu z bodu (1), tj. zakreslete množinu

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

kde $\| - \|$ je norma na $\mathbb{R}^2$, která je určena výše uvedeným skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$.

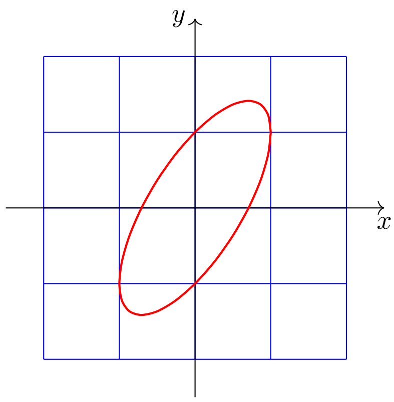
✱ Řešení problému 12.2.1

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že vzorec

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

určuje skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Jednotková sféra vzhledem k zadanému skalárnímu součinu je elipsa



parametrisovaná jako

$$\{\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\alpha - \sin\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [0; 2\pi)\}$$

✱ Komentář k problému 12.2.1

(1) Matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je positivně definitní, protože je symetrická a platí

$$\det(2) = 2 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = 3 > 0$$

Proto vzorec

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

určuje skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Pro každý vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^2$ platí $\|\mathbf{x}\| = 1$ právě tehdy, když platí $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$. Proto

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|^2 = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

Máme tedy zakreslit množinu

$$S = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 2xy + y^2 = 1\}$$

Množina S je tedy nějaká kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Jak vypadá? Předvedeme standardní způsob řešení.[1]

(a) Platí rovnost $2x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + (x-y)^2$. To znamená, že po substituci $u = x$ a $v = x - y$ máme zakreslit množinu

$$\{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1\} = \{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}\}$$

což je jednotková sféra v prostoru $\mathbb{R}^2$ se *standarním* skalárním součinem. Vada na kráse je, že pracujeme se souřadnicovými osami u, v.

(b) Protože

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

platí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Protože jednotkovou kružnici v souřadnicích u, v lze parametrisovat jako

$$u = \cos\alpha, \quad v = \sin\alpha, \quad \text{kde } \alpha \in [0; 2\pi)$$

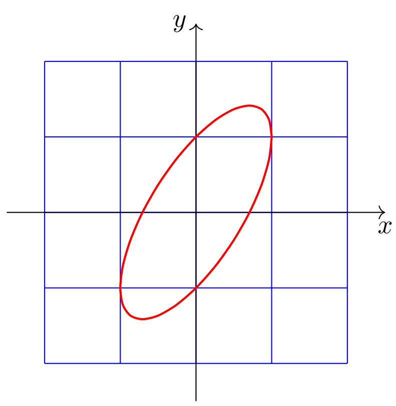
platí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\alpha - \sin\alpha \end{pmatrix}$$

a my tedy máme zakreslit množinu

$$\{\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\alpha - \sin\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [0; 2\pi)\}$$

Výsledkem je následující elipsa:



[1] Jedná se o známý postup úpravy na úplný čtverec, kombinovaný s jednoduchou úvahou o transformaci souřadnic.

12.2.2 Problém U následujících reálných matic rozhodněte, zda jsou metrickým tensorem skalárního součinu v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Pokud ano, zapište vzorec pro příslušný skalární součin v $\mathbb{R}^3$.

(1) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -9 \\ -1 & -9 & 9 \end{pmatrix}$.

✱ Řešení problému 12.2.2

(1) Matice $\mathbf{G}$ není metrickým tensorem skalárního součinu v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Matice $\mathbf{G}$ je metrickým tensorem skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se vzorcem

$$\begin{aligned} \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -9 \\ -1 & -9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 9x_1y_1 + 5x_1y_2 - x_1y_3 + 5x_2y_1 + 12x_2y_2 - 9x_2y_3 - x_3y_1 - 9x_3y_2 + 9x_3y_3 \end{aligned}$$

✱ Komentář k problému 12.2.2

(1) Máme rozhodnout, zda matice $\mathbf{G}$ je positivně definitní. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a platí

$$\det(3) = 3 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = 2 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}) = -7 \not> 0$$

Matice $\mathbf{G}$ *není* positivně definitní. Proto $\mathbf{G}$ nemůže být metrickým tensorem skalárního součinu v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

(2) Máme rozhodnout, zda matice $\mathbf{G}$ je positivně definitní. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a platí

$$\det(9) = 9 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}) = 83 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -9 \\ -1 & -9 & 9 \end{pmatrix}) = 96 > 0$$

Matice $\mathbf{G}$ *je* positivně definitní. Proto $\mathbf{G}$ je metrickým tensorem skalárního součinu v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se vzorcem

$$\begin{aligned} \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -9 \\ -1 & -9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 9x_1y_1 + 5x_1y_2 - x_1y_3 + 5x_2y_1 + 12x_2y_2 - 9x_2y_3 - x_3y_1 - 9x_3y_2 + 9x_3y_3 \end{aligned}$$

12.2.3 Problém Nalezněte metrický tensor $\mathbf{G}$ skalárního součinu v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, pro který seznam vektorů

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

tvoří ortonormální bázi.

✱ Řešení problému 12.2.3 Platí $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 12.2.3** Zadané vektory $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé, a proto tvoří uspořádanou bázi $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ prostoru $\mathbb{R}^2$.

Nalezení metrického tensoru $\mathbf{G}$ je standardní postup:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B})^T \cdot \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B}$$

Protože platí

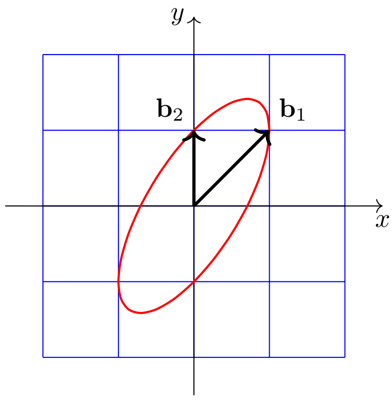
$$\mathbf{T}_{B \mapsto K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} = (\mathbf{T}_{B \mapsto K_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

platí i

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poznámka: nalezený metrický tensor $\mathbf{G}$ určuje přesně skalární součin z Problému 12.2.1.

Vektory $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mají normu 1, měly by tedy ležet na příslušné jednotkové sféře. To je pravda:



Navíc: platí $\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle = 0$. To znamená, že vektory $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$ (viděny optikou skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$) jsou na sebe navzájem *kolmé*. Po řešení Problému 12.2.1 by nás to nemělo překvapit: pro substituci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

z Problému 12.2.1 platí

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

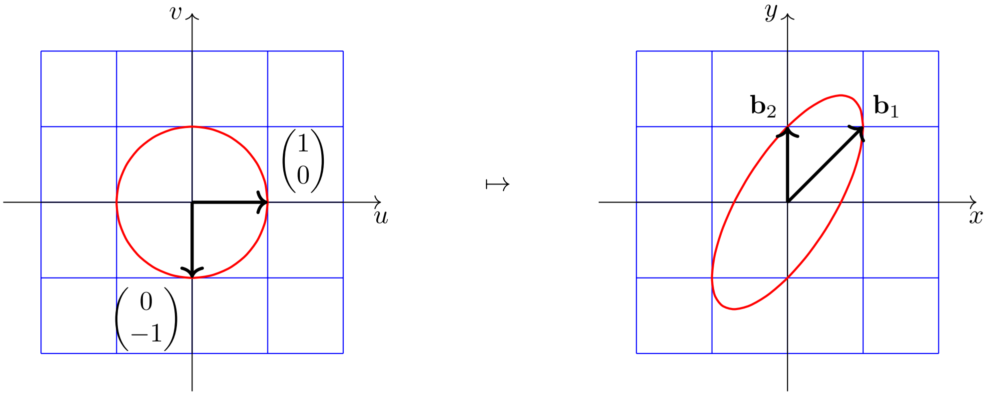
To znamená, že orotnormální báze

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix})$$

prostoru $\mathbb{R}^2$ se *standardním* skalárním součinem (a souřadnicovými osami u, v) přechází na ortonormální bázi

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem, zadaným metrickým tensorem $\mathbf{G}$. Viz obrázek:



Výše uvedený obrázek vysvětluje geometrické pozadí věty z přednášky 9B.

12.2.4 Problém Ať $\mathbf{G}$ je metrický tensor skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Dokažte, že pro lineární zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jsou následující pomínky ekvivalentní:

(1) Pro všechny vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ z $\mathbb{R}^n$ platí rovnost $\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}' \rangle$, tj., zobrazení $\mathbf{A}$ *zachovává skalární součin* $\langle - \mid - \rangle$.

(2) Platí rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ a $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

(3) Platí rovnost $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$.

✱ **Řešení problému 12.2.4** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2), že ze (2) plyne (3), a že ze (3) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 12.2.4** Dokážeme, že z (1) plyne (2), že ze (2) plyne (3), a že ze (3) plyne (1).

(i) Z (1) plyne (2). Podle předpokladu platí rovnost

$$\underbrace{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}'}_{=\langle \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}' \rangle} = \underbrace{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}'}_{=\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}' \rangle}$$

pro všechna $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ z $\mathbb{R}^n$. Speciálně tedy platí rovnost[2]

$$\underbrace{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j}_{=\text{položka na posici } (i,j) \text{ v matici } \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_j}_{=\text{položka na posici } (i,j) \text{ v matici } \mathbf{G}}$$

pro všechna i, j. To znamená, že platí rovnost $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$.
Z rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ plyne rovnost $\det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{G})$, neboli (díky vlastnostem determinantu) platí $(\det(\mathbf{A}))^2 \cdot \det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{G})$. Protože $\mathbf{G}$ je positivně definitní, platí $\det(\mathbf{G}) > 0$. Tudíž lze reálným číslem $\det(\mathbf{G})$ poslední rovnost vydělit. Po vydělení dostáváme $(\det(\mathbf{A}))^2 = 1$, neboli $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

(ii) Ze (2) plyne (3) triviálně (podmínka (3) je obecnější než podmínka (2)).

(iii) Ze (3) plyne (1) triviálně (rovnost $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ vynásobte zleva $\mathbf{x}^T$ a zprava $\mathbf{x}'$).

Poznámka (nepovinná terminologie): lineárním zobrazením $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pro která platí rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ a $\det(\mathbf{A}) = 1$ se říká *rotace* (vzhledem k metrickému tensoru $\mathbf{G}$). Lineárním zobrazením $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pro která platí rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{G}$ a $\det(\mathbf{A}) = -1$ se říká *nevlastní rotace* (vzhledem k metrickému tensoru $\mathbf{G}$). Viz také Problém 12.2.5.

[2] To je triviální ale užitečné pozorování: pro jakoukoli matici $\mathbf{M} : \mathbb{F}^s \longrightarrow \mathbb{F}^r$ se sloupcovým zápisem $(\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_s)$ platí z definice matice rovnost $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{m}_j$, pro všechna $j = 1, \ldots, s$. Dále $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{m}_j = i$-tá položka v sloupci $\mathbf{m}_j$, pro všechna $i = 1, \ldots, r$. To znamená, že $\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{e}_j =$ položka na posici (i, j) v matici $\mathbf{M}$, pro všechna $i = 1, \ldots, r$ a všechna $j = 1, \ldots, s$.

12.2.5 Problém Ukažte, že pro matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) $\mathbf{M} = \mathbf{R}_\alpha$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$, tj., $\mathbf{M}$ je matice rotace o úhel α proti směru hodinových ručiček kolem počátku.

(2) Matice $\mathbf{M}$ zachovává standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a velikosti orientovaných ploch všech čtyřúhelníků.

✱ **Řešení problému 12.2.5** Řešením problému jsou správně vedené důkazy toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 12.2.5** Z (1) plyne (2). Pro matici

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

platí rovnosti[3] $(\mathbf{R}_\alpha)^{-1} = \mathbf{R}_{-\alpha} = (\mathbf{R}_\alpha)^T$ a $\det(\mathbf{R}_\alpha) = 1$.

To znamená, že platí rovnost $(\mathbf{R}_\alpha)^T \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{E}_2$. Podle Problému 12.2.4 platí rovnost

$$\langle \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}' \rangle$$

pro všechny vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ z $\mathbb{R}^2$, kde $\langle - \mid - \rangle$ značí standardní sklární součin v $\mathbb{R}^2$. Ukázali jsme, že $\mathbf{R}_\alpha$ zachovává standardní skalární součin.

Ať $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{R}^2$. Orientovaná plocha příslušného rovnoběžníka je $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Orientovaná plocha rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_1$, $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_2$ je rovna $\det(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_2)$. Podle definice násobení matic platí $\mathbf{R}_\alpha \cdot (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_2)$. Z vlastností determinantu plynou rovnosti

$$\det(\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_1, \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}_2) = \det(\mathbf{R}_\alpha \cdot (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) = \underbrace{\det(\mathbf{R}_\alpha)}_{=1} \cdot \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

což jsme chtěli dokázat.

Ze (2) plyne (1). Protože $\mathbf{M}$ zachovává standarní skalární součin, platí, podle Problému 12.2.4, rovnost $\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} = \mathbf{E}_2$. To znamená, že $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$. Protože $\mathbf{M}$ zachovává orientované plochy všech čtyřúhelníků, platí $\det(\mathbf{M}) = 1$.

Označme

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Podle Cramerovy věty a toho, že $\det(\mathbf{M}) = 1$, platí

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Protože platí $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$, platí rovnosti

$$a = d \quad b = -c$$

Tudíž

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Protože víme, že platí

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

musí existovat úhel α tak, že $a = \cos\alpha$ a $b = \sin\alpha$. Ukázali jsme tedy, že existuje α tak, že

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\alpha$$

[3] Viz Problém 6.2.3.

12.3 Problémy s návodem k řešení

12.3.1 Problém Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$, vybavený skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$. Ať $f : L \longrightarrow L$ je *jakékoli* zobrazení, které zachovává skalární součin $\langle - \mid - \rangle$, tzn., ať platí rovnost

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{u}) \mid f(\vec{v}) \rangle$$

pro všechny vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ z L. Dokažte, že potom f je lineární zobrazení.

✱ **Řešení problému 12.3.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že f je lineární zobrazení.

✱ **Návod k řešení problému 12.3.1** Postupujte takto:

(1) Zvolte jakákoli reálná čísla a, b a jakékoli vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ z prostoru L. Definujte vektor

$$\vec{w} = f(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) - a \cdot f(\vec{u}) - b \cdot f(\vec{v})$$

(2) Ukažte, že platí $\langle \vec{w} \mid \vec{w} \rangle = 0$. K tomu využijte faktu, že zobrazení f zachovává skalární součin $\langle - \mid - \rangle$.

(3) Využijte toho, že $\langle - \mid - \rangle$ je skalární součin a z bodu (2) odvoďte, že $\vec{w} = \vec{o}$.

(4) Z bodu (3) odvoďte, že pro jakákoli reálná čísla a, b a jakékoli vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ z prostoru L platí rovnost $f(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) = a \cdot f(\vec{u}) + b \cdot f(\vec{v})$.

12.3.2 Problém Ukažte, že matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ je metrický tensor skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$. Nalezněte $\cos\varphi$, kde φ je úhel mezi vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_4$ ve skalárním součinu $\langle - \mid - \rangle$.

✱ **Řešení problému 12.3.2** Řešení první části problému je správně vedený důkaz toho, že $\mathbf{G}$ je metrický tensor. Platí $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ (tj., $\varphi \approx 67°$).

✱ **Návod k řešení problému 12.3.2** V první části je třeba ukázat, že $\mathbf{G}$ je positivně definitní. Protože matice $\mathbf{G}$ je symetrická, stačí dokázat, že platí nerovnosti[4]

$$\det(1) = 1 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}) = 1 > 0 \qquad \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}) = 2 > 0$$

[4]**Připomenutí:** determinant matice rozměrů 4×4 *nelze* počítat analogií Sarrusova pravidla. Viz Problém 9.4.2.

Dále platí

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_4 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_1 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle \mathbf{e}_4 \mid \mathbf{e}_4 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \\
\|\mathbf{e}_1\| &= \sqrt{\langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_1 \rangle} = 1 \\
\|\mathbf{e}_4\| &= \sqrt{\langle \mathbf{e}_4 \mid \mathbf{e}_4 \rangle} = \sqrt{7} \\
\cos\varphi &= \frac{\langle \mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_4 \rangle}{\|\mathbf{e}_1\| \cdot \|\mathbf{e}_4\|} = \frac{\sqrt{7}}{7}
\end{aligned}
$$

12.3.3 Problém Ať prostor $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ je vybaven standardním skalárním součinem. Ukažte, že všechny vnitřní úhly u jednotlivých vrcholů trojúhelníku, určeného body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, jsou shodné.

✱ **Řešení problému 12.3.3** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že všechny vnitřní úhly u jednotlivých vrcholů trojúhelníku, určeného body $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, jsou shodné.

✱ **Návod k řešení problému 12.3.3** Ukažte, že zadaný trojúhelník je rovnostranný a využijte toho, že všechny vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku jsou shodné. To znamená, že stačí dokázat rovnosti

$$\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\| = \|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\|$$

a to se ověří jednoduchým výpočtem.

Poznámka: v zadání *nebyl* požadavek zjistit úhel u jednotlivých vrcholů. Protože součet vnitřních úhlů trojúhelníku musí být π, je vnitřní úhel u každého vrcholu roven $\pi/3$.

12.3.4 Problém Pro skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, který je zadán metrickým tensorem

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

parametrisujte jednotkovou sféru

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

kde $\| - \|$ je norma vytvořená skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$.

✱ **Řešení problému 12.3.4** Platí $S = \{ \begin{pmatrix} \dfrac{2\cos\alpha - \sin\alpha}{4} \\ \dfrac{\sin\alpha}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [0; 2\pi) \}$.

✱ Návod k řešení problému 12.3.4 Postupujte analogicky řešení Problému 12.2.1:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|^2 = 1\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 4xy + 5y^2 = 1\}$$

Využijte toho, že

$$4x^2 + 4xy + 5y^2 = (2x + y)^2 + (2y)^2$$

To znamená, že při substituci

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

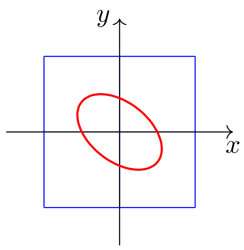
vidíme jednotkovou kružnici $u^2 + v^2 = 1$ (v souřadnicových osách u, v).
Protože

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\cos\alpha - \sin\alpha}{4} \\ \dfrac{\sin\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

platí

$$S = \{\begin{pmatrix} \dfrac{2\cos\alpha - \sin\alpha}{4} \\ \dfrac{\sin\alpha}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [0; 2\pi)\}$$

Obrázek:



12.3.5 Problém Nalezněte metrický tensor $\mathbf{G}$ skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^3$, pro který je seznam

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

ortonormální báze.

✱ Řešení problému 12.3.5 Platí $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

✱ Návod k řešení problému 12.3.5 Postupujte stejně jako v Problému 12.2.3:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{T}_{K_2 \mapsto B})^T \cdot \mathbf{T}_{K_2 \mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Téma 13

Ortogonální projekce a ortogonální rejekce

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) **A8B01LAG**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**13**	14

Co se procvičuje: ortogonalisace (Gram-Schmidt), ortogonální projekce a ortogonální rejekce, metoda nejmenších čtverců.

13.1 Ortogonální projekce a ortogonální rejekce, ortogonalisace

13.1.1 Problém Ať $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ je neprázdná lineárně nezávislá množina v lineárním prostoru L nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$. Ukažte, že vzorec

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}_j \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_j \mid \vec{u}_j \rangle} \cdot \vec{u}_j$$

obecně *nepočítá* ortogonální projekci vektoru $\vec{x}$ na lineární prostor $\mathsf{span}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$.

✱ **Řešení problému 13.1.1** Řešením problému je kompletní (a přehledný) protipříklad. To jest: lineární prostor L nad $\mathbb{R}$, popis skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$ v L, přirozené číslo $k \geq 1$, neprázdná lineárně nezávislá množina $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ v L a vektor $\vec{x}$ takový, že

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}_j \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_j \mid \vec{u}_j \rangle} \cdot \vec{u}_j \neq \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)}(\vec{x})$$

Například: L je $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Pro $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ platí $\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}(\mathbf{x}) \neq \sum_{j=1}^{2} \frac{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{u}_j \rangle} \cdot \mathbf{u}_j$.

✱ **Komentář k problému 13.1.1** Z přednášky 10A víme, že vzorec

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \vec{u}_j \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_j \mid \vec{u}_j \rangle} \cdot \vec{u}_j$$

počítá ortogonální projekci vektoru $\vec{x}$ na lineární prostor $\mathsf{span}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$, jakmile je množina $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ ortogonální. Náš protipříklad se tedy musí týkat množiny $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$, která *není ortogonální* vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle - \mid - \rangle$.

Potřebujeme nalézt protipříklad, který je *jednoduchý*. Protože každá jednoprvková množina $\{\vec{u}_1\}$ je ortogonální (viz definici z přednášky 10A), musíme protipříklad hledat pro $k \geq 2$. Zvolíme nejjednodušší možnou situaci: L je prostor $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, $\langle - \mid - \rangle$ je standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$, $k = 2$ a

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Protože $\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_2 \rangle = 1 \neq 0$, není množina $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle - \mid - \rangle$. Dále: $\mathsf{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{R}^2$ a pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^2$ platí rovnost $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Nalezneme tedy nějaký vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^2$, pro který platí

$$\frac{\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_2 \rangle} \cdot \mathbf{u}_2 = \sum_{j=1}^{2} \frac{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{u}_j \rangle} \cdot \mathbf{u}_j \neq \mathbf{x}$$

Pokud takový vektor $\mathbf{x}$ „nevidíme“ na první pohled, označme

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a dosaďme

$$\frac{\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \mid \mathbf{u}_1 \rangle} \cdot \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_2 \rangle} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{x_1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Stačí tedy nalézt x_1, x_2 tak, aby

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

To nastane například, když $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. To znamená, že pro vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

platí

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{u}_j \rangle} \cdot \mathbf{u}_j \neq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protipříklad je hotov: L je $\mathbb{R}^2$ se standardním skalárním součinem, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Pro $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ platí $\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}(\mathbf{x}) \neq \sum_{j=1}^{2} \frac{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j \mid \mathbf{u}_j \rangle} \cdot \mathbf{u}_j$.

13.1.2 Problém V tomto příkladu je lineární prostor $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ vybaven standardním skalárním součinem, značeným $\langle - \mid - \rangle$. Ověřte, že vektory

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda báze $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortogonální vzhledem k $\langle - \mid - \rangle$. Pokud ne, bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ortogonalisujte. Výslednou ortogonální bázi označte $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$.

✱ **Řešení problému 13.1.2** Seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, protože $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 9 \neq 0$. Báze $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ není ortogonální vzhledem ke $\langle - \mid - \rangle$, protože platí $\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle = 6$. Hledaná ortogonální báze je

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$$

✱ **Komentář k problému 13.1.2** Výpočet rozdělíme na několik částí.

(1) Protože $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, tvoří seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázi $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ jsou lineárně nezávislé. To nastane právě tehdy, když $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \neq 0$. Spočítáme tedy determinant

$$\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ tvoří bázi lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$.

(2) Zjistíme, zda báze $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je ortogonální vzhledem k $\langle - \mid - \rangle$. Spočteme tedy skalární součiny[1]

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle &= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \\
\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_3 \rangle &= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_3 \rangle &= \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2
\end{aligned}$$

Protože (například) $\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle \neq 0$, báze $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ není ortogonální vzhledem k $\langle - \mid - \rangle$.

(3) Bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ortogonalisujeme ortogonalisačním procesem. Vytvoříme tedy seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1 &= \mathbf{b}_1 \\
\mathbf{c}_2 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1)}(\mathbf{b}_2) \\
\mathbf{c}_3 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)}(\mathbf{b}_3)
\end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{c}_1$ tedy není třeba počítat, je stejný jako vektor $\mathbf{b}_1$. Vektory $\mathbf{c}_2$ a $\mathbf{c}_3$ spočteme následovně:

[1] Stačí nalézt jednu dvojici i, j, pro kterou $\langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle \neq 0$.

(a) Výpočet vektoru $\mathbf{c}_2$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_2 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1)}(\mathbf{b}_2) \\
&= \mathbf{b}_2 - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1)}(\mathbf{b}_2) \\
&= \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{c}_1 \rangle}{\langle \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_1 \rangle} \cdot \mathbf{c}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Důležitý trik: protože pracovat se zlomky je nepříjemné, uvědomme si, že namísto s vektorem $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ můžeme pracovat i s jakýmkoli jeho násobkem *nenulovým* skalárem. Proto zvolíme

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Výpočet vektoru $\mathbf{c}_3$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_3 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)}(\mathbf{b}_3) \\
&= \mathbf{b}_3 - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)}(\mathbf{b}_3) \\
&= \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{c}_1 \rangle}{\langle \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_1 \rangle} \cdot \mathbf{c}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{c}_2 \rangle}{\langle \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_2 \rangle} \cdot \mathbf{c}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{18} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

13.1.3 Problém V prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ je metrickým tensorem

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

zadán skalární součin $\langle - \mid - \rangle$. Ověřte, že seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, kde

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi $\mathbb{R}^3$, která není ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle - \mid - \rangle$. Bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ortonormalisujte. Výslednou ortonormální bázi označte $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$.

✱ **Řešení problému 13.1.3** Protože $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 1 \neq 0$, tvoří seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Protože $\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle = 10 \neq 0$, netvoří seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ortgonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Hledaná ortonormální báze je $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = (\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

✱ **Komentář k problému 13.1.3** Budeme postupovat stejně jako při řešení Problému 13.1.2. Jediný rozdíl je v tom, že nyní máme zadán netriviální metrický tensor $\mathbf{G}$.

(1) Protože

$$\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

tvoří seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

(2) Spočteme například $\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle$:

$$\langle \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \rangle = (\mathbf{b}_1)^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 10$$

Seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ tedy netvoří ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^3$.

(3) Bázi $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ ortogonalisujeme ortogonalisačním procesem. Vytvoříme tedy seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$, kde

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{c}_2 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1)}(\mathbf{b}_2) \\ \mathbf{c}_3 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)}(\mathbf{b}_3) \end{aligned}$$

Nakonec seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ znormalisujeme a tak dostaneme hledaný seznam $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$.

(a) Ortogonalisace.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_2 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1)}(\mathbf{b}_2) \\
&= \mathbf{b}_2 - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1)}(\mathbf{b}_2) \\
&= \mathbf{b}_2 - \frac{\langle \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{c}_1 \rangle}{\langle \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_1 \rangle} \cdot \mathbf{c}_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{10}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Použijeme stejný trik jako v Problému 13.1.2, nalezený vektor vynásobíme 2, abychom se zbavili nepříjemných zlomků. Proto

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Při výpočtech jsme využili toho, že

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 10$$

a

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

Následuje výpočet vektoru $\mathbf{c}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_3 &= \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)}(\mathbf{b}_3) \\
&= \mathbf{b}_3 - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)}(\mathbf{b}_3) \\
&= \mathbf{b}_3 - \frac{\langle \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{c}_1 \rangle}{\langle \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_1 \rangle} \cdot \mathbf{c}_1 - \frac{\langle \mathbf{b}_3 \mid \mathbf{c}_2 \rangle}{\langle \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_2 \rangle} \cdot \mathbf{c}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{12}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili toho, že platí

$$\begin{aligned}
\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 10 & 4\\2 & 4 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 12\\
\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 10 & 4\\2 & 4 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 4\\
\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} \rangle &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 10 & 4\\2 & 4 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} = 4\\
\langle \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} \rangle &= \begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 10 & 4\\2 & 4 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} = 4
\end{aligned}$$

(b) Normalisace.

Seznam $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ znormalisujeme na seznam $(\frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|}, \frac{\mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_2\|}, \frac{\mathbf{c}_3}{\|\mathbf{c}_3\|})$.

Protože

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_1 \rangle &= \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 10 & 4\\2 & 4 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 4\\
\langle \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_2 \rangle &= \langle \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 10 & 4\\2 & 4 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} = 4\\
\langle \mathbf{c}_3 \mid \mathbf{c}_3 \rangle &= \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 10 & 4\\2 & 4 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 2
\end{aligned}$$

platí

$$\|\mathbf{c}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_1 \rangle} = \sqrt{4} = 2 \qquad \|\mathbf{c}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{c}_2 \mid \mathbf{c}_2 \rangle} = \sqrt{4} = 2 \qquad \|\mathbf{c}_3\| = \sqrt{\langle \mathbf{c}_3 \mid \mathbf{c}_3 \rangle} = \sqrt{2}$$

Normalisovaný seznam je

$$(\frac{\mathbf{c}_1}{\|\mathbf{c}_1\|}, \frac{\mathbf{c}_2}{\|\mathbf{c}_2\|}, \frac{\mathbf{c}_3}{\|\mathbf{c}_3\|}) = (\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix})$$

Hledaná ortonormální báze je

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = (\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix})$$

13.1.4 Problém Ať $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ je vybaven standardním skalárním součinem. Pro ortogonální projekci na lineární podprostor

$$W = \{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

nalezněte matici $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vzhledem ke kanonické bázi K_3.

✱ **Řešení problému 13.1.4** Hledaná matice je $\mathbf{P} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

✱ Komentář k problému 13.1.4 Předvedeme dva způsoby řešení. Oba jsou založeny na tom, že

$$W = \ker(\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix})$$

o čemž se lze snadno přesvědčit řešením soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

(1) První způsob využívá toho, že pro lineárně nezávislé vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ v $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem s metrickým tensorem $\mathbf{G}$ platí pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$ rovnost

$$\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

kde $\mathbf{A}$ má sloupcový zápis $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Viz přednášku 10B. To znamená, že

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}$$

je matice ortogonální projekce na podprostor $\mathsf{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. V našem případě je

$$\mathbf{G} = \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Proto platí

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \\
&= \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix})^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Využili jsme rychlého výpočtu inversní matice

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

pomocí Cramerovy věty.

(2) Druhý způsob využívá znalosti *normály*

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix})$$

k rovině W. Pro každý vektor $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^3$ tedy platí rovnost

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix})}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix})}(\mathbf{x})$$

Spočítat projekci vektoru $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ na přímku $\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je ale velmi jednoduché:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})}(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) &= \frac{\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{x-y+z}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+y-z \\ x-y+z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matice orotogonální projekce na přímku $\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ je tedy rovna matici

$$
\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Protože pro každý vektor $\mathbf{x}$ platí rovnost $\mathrm{rej}_{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})}(\mathbf{x})$ je matice orotogonální rejekce přímkou $\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ rovna matici

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Ukázali jsme, že matice ortogonální projekce na W je rovna

$$
\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

Poznámka: úvaha z druhého postupu (tj., nahrazení ortogonální projekce na podprostor ortogonální rejekcí jeho normálou) má obecnou platnost, viz Problém 13.1.5.

13.1.5 Problém Ať lineární prostor L dimense n nad $\mathbb{R}$ je vybaven skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$. Ať W je lineární podprostor prostoru L, $\dim(W) = k$.

(1) Označte[a]
$$W^{\perp} = \{\vec{x} \in L \mid \langle \vec{x} \mid \vec{w} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \vec{w} \text{ z } W\}$$
Ukažte, že platí
$$W^{\perp} = \{\vec{x} \in L \mid \langle \vec{w} \mid \vec{x} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \vec{w} \text{ z } W\}$$
a ukažte, že $W^{\perp}$ je lineární podprostor lineárního prostoru L.

(2) Označte jako $(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k)$ jakoukoli ortonormální bázi lineárního podprostoru W. Dokažte, že pro jakýkoli vektor $\vec{x}$ z prostoru L platí:
$$\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \vec{w}_i$$

(3) Dokažte, že pokud $\dim(W) = k$, potom $\dim(W^{\perp}) = n - k$.

(4) Dokažte, že platí rovnost
$$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

(5) Dokažte, že pro každý vektor $\vec{x}$ z L platí rovnosti[b]
$$\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \mathrm{rej}_{W^{\perp}}(\vec{x}) \qquad \mathrm{rej}_W(\vec{x}) = \mathrm{proj}_{W^{\perp}}(\vec{x})$$

[a] Intuice: $W^{\perp}$ obsahuje přesně ty vektory, které jsou kolmé na všechny vektory z W. Proto se množině $W^{\perp}$ říká *ortogonální doplněk* lineárního podprostoru W.

[b] Porovnejte tyto rovnosti s Problémem 6.3.6: tam lze ukázat, že platí $\mathbf{p}_W = \mathbf{id} - \mathbf{p}_V$.

✱ Řešení problému 13.1.5

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že $W^{\perp} = \{\vec{x} \in L \mid \langle \vec{w} \mid \vec{x} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \vec{w} \text{ z } W\}$ a toho, že $W^{\perp}$ je lineární podprostor prostoru L.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že rovnost $\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \vec{w}_i$ platí pro všechny vektory $\vec{x}$ z L.

(3) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pokud $\dim(W) = k$, potom $\dim(W^{\perp}) = n - k$.

(4) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že platí rovnost $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

(5) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že rovnosti $\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \mathrm{rej}_{W^{\perp}}(\vec{x})$ a $\mathrm{rej}_W(\vec{x}) = \mathrm{proj}_{W^{\perp}}(\vec{x})$ platí pro všechna $\vec{x}$ z L.

✱ Komentář k problému 13.1.5

(1) Protože pro každý vektor $\vec{w}$ z W a pro každý vektor $\vec{x}$ z L platí $\langle \vec{x} \mid \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} \mid \vec{x} \rangle$, platí
$$W^{\perp} = \{\vec{x} \in L \mid \langle \vec{w} \mid \vec{x} \rangle = 0 \text{ pro všechna } \vec{w} \text{ z } W\}$$
Zbývá dokázat, že $W^{\perp}$ je lineární podprostor prostoru L. Ukážeme dva způsoby řešení:

(a) Pro každý vektor $\vec{w}$ z W platí, že $\langle \vec{w} \mid - \rangle : L \longrightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Proto je
$$\ker(\langle \vec{w} \mid - \rangle) = \{\vec{x} \in L \mid \langle \vec{w} \mid \vec{x} \rangle = 0\}$$
lineární podprostor prostoru L. Protože platí
$$W^{\perp} = \bigcap_{\vec{w} \in M} \ker(\langle \vec{w} \mid - \rangle)$$
je $W^{\perp}$ lineární podprostor prostoru L. Využili jsme toho, že průnik libovolného systému lineárních podprostorů je opět lineární podprostor, viz přednášku 2A.

(b) Ukážeme platnost následujících tří podmínek:

(i) $\vec{o} \in W^{\perp}$.
Pro každý vektor $\vec{w}$ z W platí $\langle \vec{w} \mid \vec{o} \rangle = 0$. Proto $\vec{o} \in W^{\perp}$.

(ii) Jestliže $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ jsou ve $W^{\perp}$, potom $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ je ve $W^{\perp}$.
Ať $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ jsou ve $W^{\perp}$. Pro každý vektor $\vec{w}$ z W platí

$$\langle \vec{w} \mid \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \rangle = \underbrace{\langle \vec{w} \mid \vec{x}_1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \vec{w} \mid \vec{x}_2 \rangle}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

Proto $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ je ve $W^{\perp}$.

(iii) Jestliže $\vec{x}$ je ve $W^{\perp}$ a jestliže $a \in \mathbb{R}$ je libovolný skalár, potom $a \cdot \vec{x}$ je ve $W^{\perp}$.
Ať $\vec{x}$ je ve $W^{\perp}$ a ať $a \in \mathbb{R}$ je libovolný skalár. Pro každý vektor $\vec{w}$ z W platí

$$\langle \vec{w} \mid a \cdot \vec{x} \rangle = a \cdot \underbrace{\langle \vec{w} \mid \vec{x} \rangle}_{=0} = a \cdot 0 = 0$$

Proto $a \cdot \vec{x}$ je ve $W^{\perp}$.

Podle přednášky 2A jsme ukázali, že $W^{\perp}$ je lineární podprostor prostoru L.

(2) Potřebujeme dokázat následující dvě tvrzení:

(a) Vektor $\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \vec{w}_i$ leží ve W.

To je jednoduché: vektor $\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \vec{w}_i$ leží ve $\mathsf{span}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k)$. Protože $\mathsf{span}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k) = W$, je důkaz hotov.

(b) Vektor $\vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \vec{w}_i$ leží ve $W^{\perp}$.
Protože $\mathsf{span}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k) = W$, stačí ukázat, že

$$\langle \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \vec{w}_i \mid \vec{w}_{i_0} \rangle = 0$$

pro všechna $i_0 = 1, \ldots, k$. Viz přednášku 10A.
Zvolme jakýkoli vektor $\vec{w}_{i_0}$, kde $i_0 = 1, \ldots, k$. Potom

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \vec{w}_i \mid \vec{w}_{i_0} \rangle &= \langle \vec{x} \mid \vec{w}_{i_0} \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{w}_i \rangle \cdot \langle \vec{w}_i \mid \vec{w}_{i_0} \rangle \\ &= \langle \vec{x} \mid \vec{w}_{i_0} \rangle - \langle \vec{x} \mid \vec{w}_{i_0} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) Ať $\dim(W) = k$. Označme jako $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ jakoukoli ortogonální bázi prostoru W. Doplňme tuto bázi na ortogonální bázi $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\}$ prostoru L. Potom pro všechna $i = 1, \ldots, k$ a všechna $j = 1, \ldots, n-k$ platí

$$\langle \vec{w}_i \mid \vec{v}_j \rangle = 0$$

Tudíž pro všechna $j = 1, \ldots, n-k$ platí, že $\vec{v}_j$ leží ve $W^{\perp}$. Protože $W^{\perp}$ je lineární podprostor, platí

$$\mathsf{span}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\}) \subseteq W^{\perp}$$

Důkaz bude hotov, jakmile ukážeme, že platí rovnost

$$W^{\perp} \subseteq \mathsf{span}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\})$$

Pak totiž bude $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\}$ lineárně nezávislá množina generátorů podprostoru $W^{\perp}$, neboli $\dim(W^{\perp}) = n - k$.

Zvolme jakýkoli vektor $\vec{x}$ z $W^\perp$. Chceme ukázat, že $\vec{x}$ leží ve $\mathsf{span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}\})$. Napišme $\vec{x}$ jako lineární kombinaci prvků

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot \vec{w}_i + \sum_{j=1}^{n-k} v_j \cdot \vec{v}_j$$

báze $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}\}$ prostoru L. Protože $\vec{x}$ leží ve $W^\perp$, platí pro všechna $i_0 = 1, \dots, k$ rovnosti

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \vec{x} \mid \vec{w}_{i_0} \rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot \vec{w}_i + \sum_{j=1}^{n-k} v_j \cdot \vec{v}_j \mid \vec{w}_{i_0} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot \langle \vec{w}_i \mid \vec{w}_{i_0} \rangle + \sum_{j=1}^{n-k} v_j \cdot \underbrace{\langle \vec{v}_j \mid \vec{w}_{i_0} \rangle}_{=0} \\
&= w_{i_0} \cdot \langle \vec{w}_{i_0} \mid \vec{w}_{i_0} \rangle
\end{aligned}$$

To znamená, že $w_{i_0} = 0$ pro všechna $i_0 = 1, \dots, k$. Neboli

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n-k} v_j \cdot \vec{v}_j$$

a proto $\vec{x}$ leží ve $\mathsf{span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}\})$.

(4) Uvidíme, že budeme potřebovat fakt, že prostor L má konečnou dimensi. Označme $\dim(L) = n$ a $\dim(W) = k$. Rovnost $(W^\perp)^\perp = W$ ukážeme důkazem platnosti následujících dvou tvrzení.

(a) Platí $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.
Zvolme libovolný vektor $\vec{v}$ z W. Chceme ukázat, že $\vec{v}$ leží v $(W^\perp)^\perp$. K tomu stačí ukázat, že $\langle \vec{v} \mid \vec{x} \rangle = 0$ pro všechna $\vec{x}$ z $W^\perp$. Zvolme tedy ještě vektor $\vec{x}$ z $W^\perp$. Potom (z definice $W^\perp$) platí $\langle \vec{w} \mid \vec{x} \rangle = 0$ pro všechna $\vec{w}$ z W. Speciálně platí $\langle \vec{v} \mid \vec{x} \rangle = 0$, protože vektor $\vec{v}$ je z podprostoru W. Důkaz je hotov: inkluse $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ platí.

(b) Platí $\dim(W) = \dim((W^\perp)^\perp)$.
To plyne z části (2): platí

$$\dim((W^\perp)^\perp) = (n - (n - k)) = k = \dim(W)$$

Z částí (a) a (b) plyne, že $W = (W^\perp)^\perp$.

(5) Ukážeme, že pro každý vektor $\vec{x}$ z L platí rovnosti

$$\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \mathrm{rej}_{W^\perp}(\vec{x}) \qquad \mathrm{rej}_W(\vec{x}) = \mathrm{proj}_{W^\perp}(\vec{x})$$

Zvolme *jakoukoli* uspořádanou bázi $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$ prostoru W a *jakýmkoli* způsobem ji doplňme na uspořádanou bázi

$$(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k})$$

prostoru L. Tuto bázi *ortonormalisujeme* a výslednou ortonormální bázi označíme

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-k})$$

Podle vlastností metody Gram-Schmidt a podle bodu (2) víme, že platí

$$W = \mathsf{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) \qquad W^\perp = \mathsf{span}(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-k})$$

Pro vektor $\vec{x}$ z L platí rovnosti

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{a}_i \rangle \cdot \vec{a}_i + \sum_{j=1}^{n-k} \langle \vec{x} \mid \vec{b}_j \rangle \cdot \vec{b}_j$$

viz přednášku 10A. Dále platí, opět podle přednášky 10A, rovnosti

$$\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{a}_i \rangle \cdot \vec{a}_i \qquad \mathrm{proj}_{W^\perp}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n-k} \langle \vec{x} \mid \vec{b}_j \rangle \cdot \vec{b}_j$$

Proto

$$\begin{aligned} \mathrm{rej}_W(\vec{x}) &= \vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{a}_i \rangle \cdot \vec{a}_i + \sum_{j=1}^{n-k} \langle \vec{x} \mid \vec{b}_j \rangle \cdot \vec{b}_j \right) - \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{a}_i \rangle \cdot \vec{a}_i \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} \langle \vec{x} \mid \vec{b}_j \rangle \cdot \vec{b}_j \\ &= \mathrm{proj}_{W^\perp}(\vec{x}) \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \mathrm{rej}_{W^\perp}(\vec{x}) &= \vec{x} - \mathrm{proj}_{W^\perp}(\vec{x}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{a}_i \rangle \cdot \vec{a}_i + \sum_{j=1}^{n-k} \langle \vec{x} \mid \vec{b}_j \rangle \cdot \vec{b}_j \right) - \sum_{j=1}^{n-k} \langle \vec{x} \mid \vec{b}_j \rangle \cdot \vec{b}_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x} \mid \vec{a}_i \rangle \cdot \vec{a}_i \\ &= \mathrm{proj}_W(\vec{x}) \end{aligned}$$

13.2 Metoda nejmenších čtverců

13.2.1 Problém Ukažte, že soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$ nemá řešení. Vyřešte tuto soustavu metodou nejmenších čtverců. Nalezněte chybu, se kterou je tímto způsobem soustava vyřešena.

✱ **Řešení problému 13.2.1** Protože rank $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 2$ a rank $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 3$, nemá soustava

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

řešení podle Frobeniovy věty.

Řešením soustavy $\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$ metodou nejmenších čtverců je vektor $\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$. Tento vektor zadanou soustavu řeší s chybou $\sqrt{\frac{8\,388}{324}}$.

✱ **Komentář k problému 13.2.1** Pro přehlednost výpočet rozdělíme na tři části.

(1) Řešení pomocí Frobeniovy věty.
Nejprve převedeme zadanou soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

na horní blokový tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 + 3R_1 \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_4 \\ R_3 \\ R_2 - 6R_3 \end{array}$$

Ukázali jsme, že

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

nemá řešení podle Frobeniovy věty.

(2) Řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců.
Označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Protože podle bodu (1) platí $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$, lze metodu nejmenších čvterců použít.
Vyřešit soustavu $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců znamená vyřešit regulární soustavu

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$$

Protože

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

máme vyřešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & 0 & -7 \\ 0 & 18 & 5 \end{array} \right)$$

Jediné řešení je

$$\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(3) Pro zjištění chyby potřebujeme spočítat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

a výsledek porovnat s vektorem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pravých stran.
Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix}$$

spočteme

$$\begin{aligned}
\| \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \|^2 &= \| \frac{1}{18} \cdot (\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 72 \\ 54 \\ 36 \end{pmatrix}) \|^2 \\
&= \frac{1}{18^2} \cdot \| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 72 \\ 54 \\ 36 \end{pmatrix} \|^2 \\
&= \frac{1}{18^2} \cdot \| \begin{pmatrix} -20 \\ -68 \\ -58 \\ 0 \end{pmatrix} \|^2 \\
&= \frac{20^2 + 68^2 + 58^2 + 0^2}{18^2} \\
&= \frac{8\,388}{324}
\end{aligned}$$

To znamená, že platí

$$\| \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{\frac{8\,388}{324}} \approx 5.08$$

Řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců je tedy zatíženo chybou $\sqrt{\dfrac{8\,388}{324}}$.

13.2.2 Problém Metodou nejmenších čtverců proložte přímku třemi body

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 13.2.2** Hledaná přímka má rovnici $y = \dfrac{106}{56} \cdot x + \dfrac{8}{56}$.

✱ **Komentář k problému 13.2.2** Přímku budeme hledat ve tvaru $y = ax + b$. To znamená, že hledáme řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Soustava

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

ale, podle Frobeniovy věty, řešení nemá.[2]

Vyřešíme tedy soustavu

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců. Označme jako $\mathbf{A}$ matici soustavy, a jako $\mathbf{b}$ označme vektor pravých stran. Protože $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2$, řešení metodou nejmenších čtverců existuje.

Máme tedy vyřešit soustavu $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$. Protože

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 8 \end{pmatrix}$$

máme vyřešit soustavu

$$\left(\begin{array}{rr|r} 24 & 4 & 46 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

Podle Cramerovy věty platí

$$\begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{56} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix}$$

a proto

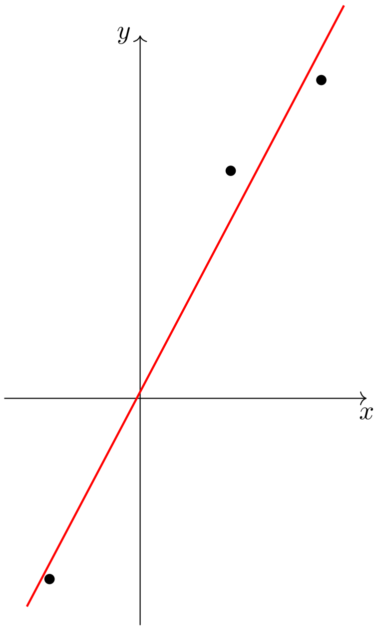
$$\begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{56} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{56} \cdot \begin{pmatrix} 106 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Hledaná přímka má rovnici

$$y = \frac{106}{56} \cdot x + \frac{8}{56}$$

[2] Hodnost matice soustavy je 2, hodnost rozšířené matice soustavy je 3. Přesvědčete se o tom, jde o standardní výpočty.

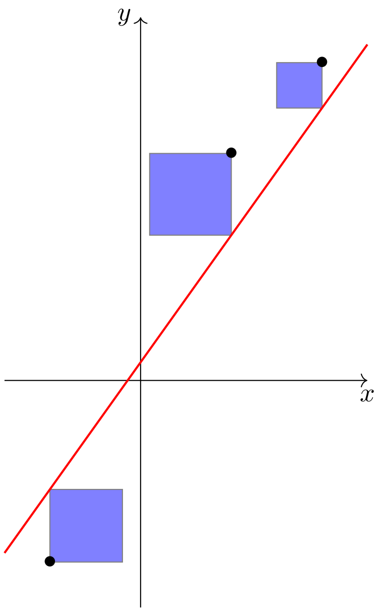
Poznámka: Přímka s rovnicí $y = \frac{106}{56} \cdot x + \frac{8}{56}$ má graf



Protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

nemá řešení, nemůže daná přímka procházet třemi zadanými body. Metoda nejmenších čtverců však zaručuje, že součet druhých mocnin chyb je minimální. To znamená, že mezi všemi přímkami tvaru $y = ax + b$ je kvadratická chyba (tj., součet ploch čtverců v následujícím obrázku)



nejmenší pro přímku s rovnicí $y = \frac{106}{56} \cdot x + \frac{8}{56}$.

13.3 Problémy s návodem k řešení

13.3.1 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem ortogonalisujte seznam $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, kde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Výsledný ortogonální seznam označte $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.

✱ **Řešení problému 13.3.1** Platí (například) $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

✱ **Návod k řešení problému 13.3.1** Postup řešení je stejný jako při řešení Problému 13.1.2.

13.3.2 Problém Nalezněte délky stran trojúhelníku, zadaného body

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ s metrickým tensorem $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 13.3.2** Platí: strana určená body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ má délku $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{3}$, strana určená body $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ má délku $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| = \sqrt{2}$, strana určená body $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ má délku $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| = \sqrt{3}$.

✱ **Návod k řešení problému 13.3.2** Platí

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| &= \sqrt{\langle \mathbf{a} - \mathbf{b} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle} \\
&= \sqrt{\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \\
&= \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Hodnoty $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$ a $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|$ spočtěte analogicky.

13.3.3 Problém V lineárním prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ všech reálných polynomů v neurčité x stupně maximálně 2 je definován skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ následovně:[a]

$$\langle a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$$

V prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ jsou zadány čtyři polynomy

$$p_1(x) = 3x^2 + 2x + 1 \qquad p_2(x) = -x^2 + 2x + 1 \qquad p_3(x) = 3x^2 + 2x + 5 \qquad p_4(x) = 3x^2 + 5x + 2$$

(1) Pro obecný polynom $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ spočtěte vzdálenosti

$$d(p(x), p_1(x)) \qquad d(p(x), p_2(x)) \qquad d(p(x), p_3(x)) \qquad d(p(x), p_4(x))$$

polynomu $p(x)$ od zadaných polynomů $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ a $p_4(x)$.

(2) Nalezněte polynom $p_0(x)$ v $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$, pro který platí

$$d(p_0(x), p_1(x)) = d(p_0(x), p_2(x)) = d(p_0(x), p_3(x)) = d(p_0(x), p_4(x))$$

Tuto společnou vzdálenost nalezněte.

[a] *Nemusíte* ověřovat, že vzorec $\langle a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$ opravdu zadává skalární součin v prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$. Pokud tomu nevěříte, ověřte, že jde o skalární součin. Musíte k tomu použít definici skalárního součinu z přednášky 9A.

✱ Řešení problému 13.3.3

(1) Platí

$$\begin{aligned} d(p(x), p_1(x)) &= \sqrt{(a_2-3)^2 + (a_1-2)^2 + (a_0-1)^2} \\ d(p(x), p_2(x)) &= \sqrt{(a_2+1)^2 + (a_1-2)^2 + (a_0-1)^2} \\ d(p(x), p_3(x)) &= \sqrt{(a_2-3)^2 + (a_1-2)^2 + (a_0-5)^2} \\ d(p(x), p_4(x)) &= \sqrt{(a_2-3)^2 + (a_1-5)^2 + (a_0-2)^2} \end{aligned}$$

✱ Řešení problému 13.3.3 Hledaný polynom je $p_0(x) = x^2 + 3x + 3$, $d(p_0(x), p_1(x)) = 3$.

✱ Návod k řešení problému 13.3.3

(1) Pro polynom $p(x)$ platí

$$\begin{aligned} d(p(x), p_1(x)) &= \|p(x) - p_1\| \\ &= \sqrt{\langle p(x) - p_1(x) \mid p(x) - p_1(x) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle (a_2-3)x^2 + (a_1-2)x + (a_0-1) \mid (a_2-3)x^2 + (a_1-2)x + (a_0-1) \rangle} \\ &= \sqrt{(a_2-3)^2 + (a_1-2)^2 + (a_0-1)^2} \end{aligned}$$

Ostatní vzdálenosti spočtěte analogicky.

(2) Označte $p_0(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Podle části (1) musí být čtyři čísla

$$\begin{aligned} d(p_0(x), p_1(x)) &= \sqrt{(a_2-3)^2 + (a_1-2)^2 + (a_0-1)^2} \\ d(p_0(x), p_2(x)) &= \sqrt{(a_2+1)^2 + (a_1-2)^2 + (a_0-1)^2} \\ d(p_0(x), p_3(x)) &= \sqrt{(a_2-3)^2 + (a_1-2)^2 + (a_0-5)^2} \\ d(p_0(x), p_4(x)) &= \sqrt{(a_2-3)^2 + (a_1-5)^2 + (a_0-2)^2} \end{aligned}$$

totožná.
Odvoďte z toho, že musí platit $a_2 = 1$, $a_1 = 3$, $a_0 = 3$. To znamená, že hledaný polynom je $p_0(x) = x^2 + 3x + 3$ a platí $d(p_0(x), p_1(x)) = 3$.

13.3.4 Problém Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$. Dokažte, že pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z L jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$

(2) $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2$

(3) Vektory $\vec{x} - \vec{y}$ a $\vec{x} + \vec{y}$ jsou na sebe kolmé.

Dejte tomuto tvrzení geometrickou interpretaci.

✱ **Řešení problému 13.3.4** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2), toho, že ze (2) plyne (3) a toho, že ze (3) plyne (1).

Geometrická interpretace: rovnoběžník určený vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ je rovnostranný právě tehdy, když úhlopříčky tohoto rovnoběžníku jsou na sebe navzájem kolmé.

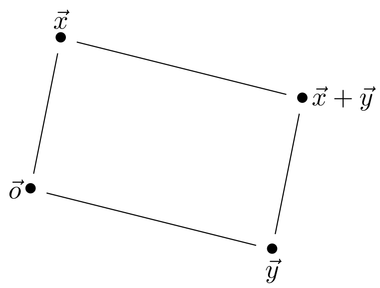
✱ **Návod k řešení problému 13.3.4** Využijte vlastností skalárního součinu a dokažte nejprve, že pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z L platí rovnost

$$\langle \vec{x} - \vec{y} \mid \vec{x} + \vec{y} \rangle = \underbrace{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle}_{=\|\vec{x}\|^2} - \underbrace{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}_{=\|\vec{y}\|^2}$$

Dále postupujte například takto: díky výše dokázané rovnosti jsou podmínky (2) a (3) ekvivalentní.

Důkaz toho, že z (1) plyne (2), je triviální. Při důkazu toho, že ze (2) plyne (1) použijte toho, že norma vektoru nemůže být záporné číslo.

Geometrická interpretace: z vektorů $\vec{o}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ a $\vec{x} + \vec{y}$ vytvořte rovnoběžník



a uvažujte o jeho úhlopříčkách.

13.3.5 Problém Ať pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^r$ platí $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = s$.

(1) Ať $\mathbf{b}$ je vektor v $\mathbb{R}^r$. Ukažte, že soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ buď nemá žádné řešení, nebo má právě jedno řešení.

(2) Ať $\mathbf{v}$ je vektor v $\mathbb{R}^s$, který je řešením soustavy $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$. Ukažte, že pokud soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, potom je jejím (jediným) řešením vektor $\mathbf{v}$.

✱ **Řešení problému 13.3.5**

(1) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ buď nemá žádné řešení, nebo má právě jedno řešení.

(2) Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že pro řešitelnou soustavu $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ a vektor $\mathbf{v}$ z $\mathbb{R}^s$, který řeší soustavu $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$, je $\mathbf{v}$ řešením soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

✱ Návod k řešení problému 13.3.5

(1) Použijte větu o dimensi jádra a obrazu k tomu, abyste ukázali, že $\mathrm{def}(\mathbf{A}) = 0$. Odvoďte z toho, že $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{o}\}$. Použijte Frobeniovu větu k tomu, abyste dokázali, že pokud soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, pak jde o jediný vektor $\mathbf{p}$ z $\mathbb{R}^s$.

(2) Nejprve vysvětlete, proč matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ musí být positivně definitní (využijte definici positivní definitnosti z přednášky 9B). Odvoďte z toho, že matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je nutně regulární (použijte charakterisační větu pro positivně definitní matice z přednášky 9B).

Ať platí $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$ a ať soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení. Protože $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je regulární, musí platit $\mathbf{v} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$.

Protože soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení, platí $\mathbf{b} \in \mathrm{im}(\mathbf{A})$. Proto

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$$

13.3.6 Problém Ať je $\mathbb{R}^n$ vybaven standardním skalárním součinem. Ať pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ platí $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = k$. Označte jako $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ matici ortogonální projekce na $\mathrm{im}(\mathbf{A})$. Dokažte, že pro $\mathbf{P}$ platí následující tři podmínky:

(1) $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

(2) $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$.

(3) $\mathrm{rank}(\mathbf{P}) = k$.

✱ Řešení problému 13.3.6 Řešením problému jsou správně vedené důkazy toho, že platí (1), že platí (2), a že platí (3).

✱ Návod k řešení problému 13.3.6 Víte, že platí rovnost

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$$

(1) Spočtěte

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{P}$$

(2) Využijte Problém 10.3.3: je-li $\mathbf{X}$ regulární, pak i $\mathbf{X}^T$ je regulární a platí $(\mathbf{X}^T)^{-1} = (\mathbf{X}^{-1})^T$. Proto platí

$$\left((\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1}\right)^T = \left((\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T\right)^{-1} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1}$$

Tudíž

$$\mathbf{P}^T = \left(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T\right)^T = (\mathbf{A}^T)^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{P}$$

(3) Dokažte, že platí $\mathrm{im}(\mathbf{A}) = \mathrm{im}(\mathbf{P})$: $\mathbf{v} \in \mathrm{im}(\mathbf{P})$ právě tehdy, když $\mathbf{v} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$ pro nějaké $\mathbf{x}$. To nastane právě tehdy, když $\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$. A to nastane právě tehdy, když $\mathbf{v} \in \mathrm{im}(\mathbf{A})$.

13.3.7 Problém Vyřešte soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$ metodou nejmenších čtverců. Spočtěte chybu, které se dopustíte.

✱ Řešení problému 13.3.7 Řešením soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ metodou nejmenších čtverců je $\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Chyba, které jsme se dopustili, je $3 \cdot \sqrt{2}$.

✱ Návod k řešení problému 13.3.7 Postupujte analogicky řešení Problému 13.2.1. Označte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a spočtěte

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Soustava

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

má jediné řešení

$$\frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 22 \\ 26 \end{pmatrix}$$

a

$$\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 22 \\ 26 \end{pmatrix} \|^2 = \| \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \|^2 = \frac{252}{14} = 18$$

je chyba, které jsme se dopustili, rovna $\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4.24$.

13.3.8 Problém Body

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 880 \end{pmatrix}$$

proložte křivku tvaru $y = e^{ax+b}$ metodou nejmenších čtverců.[a]

[a] Tato úloha se řeší například při analýze průběhu epidemií.

✱ Řešení problému 13.3.8 Platí $a = \frac{1}{2} \cdot \ln 44$ a $b = \frac{4}{3} \cdot \ln 20 + \frac{1}{3} \cdot \ln 200 + \frac{1}{3} \cdot \ln 880$. Hledaná křivka má přibližný tvar $y = e^{1.89x+8.02}$.

✱ Návod k řešení problému 13.3.8 Pro kladné reálné číslo u platí $e^t = u$ právě tehdy, když platí $t = \ln u$. Stačí tedy proložit přímku tvaru $t = ax + b$ body

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \ln 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ \ln 200 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ \ln 880 \end{pmatrix}$$

metodou nejmenších čtverců. Postupujte stejně jako při řešení Problému 13.2.2, tj., vyřešte soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \ln 20 \\ 2 & 1 & \ln 200 \\ 3 & 1 & \ln 880 \end{array} \right)$$

metodou nejmenších čtverců.

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln 20 \\ \ln 200 \\ \ln 880 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(20 \cdot 200^2 \cdot 880^3) \\ \ln(20 \cdot 200 \cdot 880) \end{pmatrix}$$

znamená to vyřešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & \ln(20 \cdot 200^2 \cdot 880^3) \\ 6 & 3 & \ln(20 \cdot 200 \cdot 880) \end{array} \right)$$

Řešení této soustavy je

$$\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} \ln \dfrac{20^3 \cdot 200^6 \cdot 880^9}{20^6 \cdot 200^6 \cdot 880^6} \\ \ln \dfrac{20^{14} \cdot 200^{14} \cdot 880^{14}}{20^6 \cdot 200^{12} \cdot 880^{12}} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} \ln \dfrac{880^3}{20^3} \\ \ln(20^8 \cdot 200^2 \cdot 880^2) \end{pmatrix}$$

To znamená, že

$$a = \frac{1}{6} \cdot \ln \frac{880^3}{20^3} = \frac{1}{2} \cdot \ln 44 = \ln \sqrt{44} \approx 1.89$$

a

$$b = \frac{1}{6} \cdot \ln(20^8 \cdot 200^2 \cdot 880^2) = \frac{4}{3} \cdot \ln 20 + \frac{1}{3} \cdot \ln 200 + \frac{1}{3} \cdot \ln 880 \approx 8.02$$

Hledaná křivka má přibližný tvar $y = e^{1.89x+8.02}$.

Téma 14

Metrické výpočty v $\mathbb{R}^n$

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: parametrický a normálový popis afinního podprostoru, vzájemná poloha a vzájemná vzdálenost dvou afinních poprostorů, Gramův determinant a vektorový součin.

14.1 Afinní podprostory

14.1.1 Problém V $\mathbb{R}^3$ je zadána rovina $x + y - 2z = 3$ v $\mathbb{R}^3$.

(1) Nalezněte *parametrický* (také: *směrový*) popis roviny $x+y-2z = 3$. To jest: zadanou rovinu popište jako množinu tvaru $\mathbf{p} + \mathrm{im}(\mathbf{S})$, kde $\mathbf{S}$ je monomorfismus.

(2) Nalezněte *obecnou rovnici*) roviny $x + y - 2z = 3$. To jest: nalezněte soustavu tvaru $(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{b})$, kde $\mathbf{N}^T$ je epimorfismus, a která má jako množinu řešení množinu všech bodů v rovině $x + y - 2z = 3$.

(3) Nalezněte *normálovou* rovnici roviny $x + y - 2z = 3$. To jest: nalezněte bod $\mathbf{p}$ a matici $\mathbf{N}^T$, která je epimorfismus, tak, že bod $\mathbf{x}$ leží v rovině $x + y - 2z = 3$ právě tehdy, když splňuje rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.

✱ Řešení problému 14.1.1

(1) Parametrický popis roviny $x + y - 2z = 3$ je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{im}(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

(2) Množina bodů roviny $x + y - 2z = 3$ je řešením soustavy lineárních rovnic tvaru $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$.

(3) Pro matici $\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ a bod $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ platí: bod $\mathbf{x}$ leží v rovině $x + y - 2z = 3$ právě tehdy, když splňuje rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.

✱ Komentář k problému 14.1.1

(1) Množina bodů roviny $x + y - 2z = 3$ je řešením soustavy lineárních rovnic tvaru $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$. Podle Frobeniovy věty lze toto řešení popsat jako množinu

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Definujme

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože matice $\mathbf{S} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ má hodnost 2, je defekt matice $\mathbf{S}$ roven 0. To znamená, že $\mathbf{S}$ je monomorfismus. Hledaný popis je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{im}(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

(2) Množina bodů roviny $x + y - 2z = 3$ je řešením soustavy lineárních rovnic tvaru $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$. Matice

$$\mathbf{N}^T \equiv \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^1$$

má hodnost 1. Protože $\dim(\mathbb{R}^1) = 1$, znamená to, že $\mathbf{N}^T$ je epimorfismus.[1]

(3) Pro nalezení normálového popisu roviny $x + y - 2z = 3$ je třeba zapsat soustavu $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$ z bodu (2) ve tvaru $\mathbf{N}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{p}$. Potom bod $\mathbf{x}$ leží v rovině $x + y - 2z = 3$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.
To znamená, že je zapotřebí nalézt partikulární řešení $\mathbf{p}$ soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$. Takovým bodem je například $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

14.1.2 Problém V $\mathbb{R}^4$ je zadán nejmenší afinní prostor $\boldsymbol{\pi}$, který obsahuje body

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Nalezněte *parametrický* (také: *směrový*) popis afinního prostoru $\boldsymbol{\pi}$. To jest: nalezněte monomorfismus $\mathbf{S}$ tak, že body v $\boldsymbol{\pi}$ tvoří množinu $\mathbf{p} + \mathrm{im}(\mathbf{S})$.

(2) Nalezněte *obecnou rovnici* afinního prostoru $\boldsymbol{\pi}$. To jest: nalezněte epimorfismus $\mathbf{N}^T$ a bod $\mathbf{b}$ tak, že body v $\boldsymbol{\pi}$ tvoří řešení soustavy $(\mathbf{N}^T \mid \mathbf{b})$.

(3) Nalezněte *normálovou rovnici* afinního prostoru $\boldsymbol{\pi}$. To jest: nalezněte epimorfismus $\mathbf{N}^T$ a bod $\mathbf{p}$ tak, že bod $\mathbf{x}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.

✱ Řešení problému 14.1.2

(1) Platí $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{im}(\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$.

[1] Víme, že $\mathrm{im}(\mathbf{N}^T) \subseteq \mathbb{R}^1$, a že $\dim(\mathrm{im}(\mathbf{N}^T)) = \dim(\mathbb{R}^1)$. Potom $\mathrm{im}(\mathbf{N}^T) = \mathbb{R}^1$. Viz také Problém 4.3.3(1).

(2) Obecná rovnice afinního prostoru $\boldsymbol{\pi}$ je $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

(3) Pro $\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bod $\mathbf{x}$ leží v afinním prostoru $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.

✱ Komentář k problému 14.1.2

(1) Označme jako $\mathbf{S}$ matici se sloupcpvým zápisem $(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a})$. To jest: $\mathbf{S}$ je lineární zobrazení

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^4$$

Protože sloupce matice $\mathbf{S}$ jsou lineárně nezávislé, platí $\operatorname{def}(\mathbf{S}) = 0$. Matice $\mathbf{S}$ je tedy monomorfismus. Tvrdíme, že $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a} + \operatorname{im}(\mathbf{S})$. To je zřejmé z následujících úvah:

(a) Prostor $\boldsymbol{\pi}$ je definován jako nejmenší afinní prostor obsahující body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. To znamená, že $\boldsymbol{\pi}$ je tvořen všemi lineárními kombinacemi tvaru $a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c}$, kde $a + b + c = 0$.

(b) Afinní prostor $\mathbf{a} + \operatorname{im}(\mathbf{S})$ je tvořen všemi lineárními kombinacemi tvaru $\mathbf{a} + t_1 \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t_2 \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$. Každou takovou lineární kombinaci lze zapsat jako $(1 - t_1 - t_2) \cdot \mathbf{a} + t_1 \cdot \mathbf{b} + t_2 \cdot \mathbf{c}$.

Protože platí rovnost[2]

$$\{a \cdot \mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b} + c \cdot \mathbf{c} \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a + b + c = 0\} = \{(1 - t_1 - t_2) \cdot \mathbf{a} + t_1 \cdot \mathbf{b} + t_2 \cdot \mathbf{c} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

ukázali jsme, že $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{a} + \operatorname{im}(\mathbf{S})$.

(2) Díky bodu (1) stačí nalézt obecnou rovnici afinního prostoru

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{im}(\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Stačí tedy nalézt soustavu rovnic, která má jako řešení afinní prostor $\boldsymbol{\pi}$. Takovou soustavu nalezneme postupem z Kapitoly 8.3: je jí například soustava

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Zobrazení

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$$

je epimorfismus, protože jeho hodnost je 2.

(3) Díky bodu (2) stačí nalézt partikulární řešení $\mathbf{p}$ soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Takovým řešením je například

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2] Jsou-li zadána a, b, c, pro která platí $a + b + c = 0$, definujte $t_1 = b$, $t_2 = c$. Jsou-li dána t_1, t_2, definujte $a = 1 - t_1 - t_2$, $b = t_1$, $c = t_2$.

Označme

$$\mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom $\mathbf{x}$ leží v prostoru $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$.

14.1.3 Problém Ať $\boldsymbol{\pi} = \vec{p} + W$ je afinní podprostor lineárního prostoru L. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

(1) $\boldsymbol{\pi}$ je lineární podprostor prostoru L.

(2) Bod $\vec{p}$ leží ve W.

✱ **Řešení problému 14.1.3** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že z (1) plyne (2) a toho, že ze (2) plyne (1).

✱ **Komentář k problému 14.1.3** Z (1) plyne (2). Ať $\boldsymbol{\pi}$ je lineární podprostor prostoru L. To znamená, že $\vec{o}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$. Existuje tedy $\vec{w}$ ve W tak, že $\vec{o} = \vec{p} + \vec{w}$. To znamená, že $\vec{p} = -\vec{w}$ a, protože W je lineární podprostor prostoru L, leží vektor $\vec{p}$ ve W.

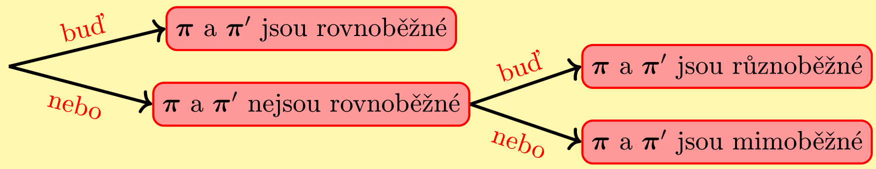
Ze (2) plyne (1). Ať $\vec{p} \in W$. Potom

$$\boldsymbol{\pi} = \vec{p} + W = \{\vec{p} + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\} = W$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že $\vec{p} \in W$. Protože W je lineární podprostor prostoru L, je $\boldsymbol{\pi}$ lineární podprostor prostoru L.

14.2 Vzájemná poloha afinních podprostorů

Připomeňme, že vzájemná poloha dvou afinních podprostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ je definována „rozhodovacím stromem“



Z toho plyne doporučená strategie při učování vzájemné polohy $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$:

(1) Nejprve rozhodneme, zda $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné.

(2) Pokud $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ rovnoběžné nejsou, rozhodneme, zda $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou různoběžné.

14.2.1 Problém Určete vzájemnou polohu dvou afinních podprostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ v $\mathbb{R}^3$, které jsou zadány obecnými rovnicemi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

✱ **Řešení problému 14.2.1** Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné.

✱ **Komentář k problému 14.2.1** Vyřešme obě soustavy rovnic. Tím získáme parametrické zápisy jednotlivých afinních podprostorů.

(1) Řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

je

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})}_{W}$$

(2) Řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

je

$$\boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Afinní prostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou tedy dvě přímky v $\mathbb{R}^3$ a my máme rozhodnout o jejich vzájemné poloze. Protože neplatí ani jedna z inklusí

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}) \subseteq \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) \subseteq \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$$

přímky $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ *nejsou rovnoběžné*.
Zjistíme, zda $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou různoběžné nebo mimoběžné, tj. zjistíme, zda $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W \vee W'$. Platí

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a (podle Frobeniovy věty) vztah $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W \vee W'$ platí právě tehdy, když soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

má řešení. Hodnost[3] matice této soustavy je ovšem 2 a hodnost rozšířené matice soustavy je 3. Soustava tedy řešení nemá, a proto $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \notin W \vee W'$. Proto jsou $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ mimoběžné přímky.

14.2.2 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete vzájemnou polohu $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

✱ **Řešení problému 14.2.2** Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné.
✱ **Komentář k problému 14.2.2** Nejprve rozhodneme, zda $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou rovnoběžné.

(1) Inkluse $W \subseteq W'$ platí právě tehdy, když simultánní soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

[3] Přesvědčete se o tom pomocí GEM.

má řešení. Použitím GEM

$$
\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \\ R_4 \end{array}
$$

zjišťujeme, že simultánní soustava

$$
\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

řešení nemá. Proto $W \not\subseteq W'$.

(2) Inkluse $W' \subseteq W$ platí právě tehdy, když soustava rovnic

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

má řešení. Protože soustava je již v horním blokovém tvaru, je vidět, že soustava řešení má. Proto platí $W' \subseteq W$.

Protože platí $W' \subseteq W$, jsou afinní prostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ rovnoběžné.

14.2.3 Problém V prostoru $\mathbb{R}^5$ nad $\mathbb{R}$ jsou zadány afinní podprostory

$$
\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)}_{=W'}
$$

Určete vzájemnou polohu $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

✱ **Řešení problému 14.2.3** Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné.

✱ **Komentář k problému 14.2.3** Nejprve rozhodneme, zda $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné.

(1) Inkluse $W \subseteq W'$ platí právě tehdy, když soustava rovnic

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right)
$$

má řešení. Použijeme GEM:

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 \\ R_4 - 2R_1 \\ R_5 - 3R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 2R_3 + R_2 \\ 2R_4 - 3R_2 \\ 2R_5 - 5R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}
$$

Zadaná soustava řešení nemá, platí $W \not\subseteq W'$.

(2) Inkluse $W' \subseteq W$ platí právě tehdy, když simultánní soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

má řešení. Použijeme GEM:

$$\left(\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + 4R_1 \\ 2R_3 - 3R_1 \\ 2R_4 + 5R_1 \\ 2R_5 - R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 - 3R_2 \\ 3R_5 - 5R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{r|rr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_5 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

Zadaná soustave řešení nemá, platí $W' \not\subseteq W$.

Protože neplatí ani $W \subseteq W'$ ani $W' \subseteq W$, nejsou prostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ rovnoběžné. Rozhodnutím, zda platí $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W \vee W'$, zjistíme, zda jsou $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ různoběžné nebo mimoběžné. Protože

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

vztah $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \in W \vee W'$ platí právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

má řešení. Použijeme GEM:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 \\ R_4 - 2R_1 \\ R_5 - 3R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 20 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 2R_3 + R_2 \\ 2R_4 - 3R_2 \\ 2R_5 - 5R_2 \end{array}$$

Není třeba v GEM pokračovat: například třetí řádek poslední soustavy ukazuje, že řešení neexistuje. Proto platí $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \notin W \vee W'$. Tudíž prostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné.

14.2.4 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}\right)}_{=W'}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. Určete hodnotu parametru a tak, aby prostory $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\pi}'$ byly mimoběžné.

✱ **Řešení problému 14.2.4** Hledaná hodnota parametru je $a = -4$.

✱ **Komentář k problému 14.2.4** Nalezneme $a \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \notin W \vee W'$. Spočteme

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vztah $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \notin W \vee W'$ platí právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & a & 7 \end{array}\right)$$

nemá řešení. Použijeme GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & a & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & a & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 + 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & a & 21 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ -R_2 \\ R_3 - 2R_2 \\ R_4 + 5R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 + 4R_3 \end{array}$$

Zadaná soustava nemá řešení právě tehdy, když $a = -4$. Protože afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

nejsou rovnoběžné,[4] je hledaná hodnota parametru $a = -4$.

14.2.5 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete průnik prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

✱ **Řešení problému 14.2.5** Průnik $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ je přímka $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix})$.

[4] Neplatí ani $W \subseteq W'$, ani $W' \subseteq W$. Přesvědčete se o tom.

✱ Komentář k problému 14.2.5 Předvedeme dva postupy řešení.[5]

(1) Bod

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

leží v $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ právě tehdy, když existují reálná čísla t_1, t_2, t_1', t_2' tak, že

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hledáme tedy reálná čísla t_1, t_2, t_1', t_2' tak, že

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - t_1' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} - t_2' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektor $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}$ je tedy řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 9 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

kterou vyřešíme pomocí GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 9 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 9 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -3 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 + R_1 \\ R_3 \\ R_4 + 2R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 2R_3 + 3R_2 \\ R_4 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -R_1 \\ 1/2R_2 \\ -1/8R_3 \\ R_4 + 1/8R_3 \end{array}$$

To znamená, že zadaná soustava má řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathsf{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

[5] **Poznámka:** druhý způsob řešení se mi zdá být jednodušším než ten první.

Jednu čtveřici $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix}$ tedy dostaneme jako

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pro nějaké reálné číslo u. To znamená, že bod $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ leží v průniku $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ právě tehdy, když platí rovnost

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \underbrace{(1-2u)}_{=t_1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{(-1+3u)}_{=t_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{u}_{=t'_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{2}_{=t'_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro $u \in \mathbb{R}$. To znamená, že

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

pro $u \in \mathbb{R}$.

Průnik $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ je tedy přímka

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix})$$

(2) Nejprve nalezneme obecné rovnice prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

(a) Obecná rovnice $\boldsymbol{\pi}$. Hledáme soustavu rovnic, která má jako řešení

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})$$

Postupem z Kapitoly 8.3 dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 0 & 17 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(b) Obecná rovnice $\boldsymbol{\pi}'$. Hledáme soustavu rovnic, která má jako řešení

$$\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Postupem z Kapitoly 8.3 dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -13 & 11 & 2 & 0 & 17 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Průnik $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ je tedy řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & 17 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -13 & 11 & 2 & 0 & 17 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

kterou vyřešíme pomocí GEM:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & 17 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -13 & 11 & 2 & 0 & 17 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & -6 & -2 & 3 & -11 \\ 0 & 72 & 32 & 0 & 272 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 23 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ 3R_2 - R_1 \\ 3R_3 + 13R_1 \\ 3R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & -6 & -2 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 8 & 36 & 140 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 35 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 12R_2 \\ 2R_4 + R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & -6 & -2 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 1/4R_3 \\ 4R_4 - R_3 \end{array}$$

Řešením této soustavy je přímka

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix})$$

a ta je průnikem afinních podprostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

14.2.6 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete průnik prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

✱ **Řešení problému 14.2.6** Průnik prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ je tvořen jediným bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 14.2.6** Opět předvedeme dva způsoby řešení.

(1) Bod

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

leží v $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ právě tehdy, když existují reálná čísla t_1, t_2, t_1', t_2' tak, že

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t_1' \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hledáme tedy reálná čísla t_1, t_2, t_1', t_2' tak, že

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - t_1' \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - t_2' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektor $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}$ je tedy řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -3 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

kterou vyřešíme pomocí GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -3 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -10 & -8 & -18 \\ 0 & 2 & -12 & -6 & -26 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 + 2R_1 \\ R_4 + 2R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & -14 & -28 \\ 0 & 0 & -30 & -12 & -60 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 2R_3 + R_2 \\ 2R_4 - R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & 4 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ -1/14R_3 \\ R_4 - 30/14R_3 \end{array}$$

Zadaná soustava má právě jedno řešení, a sice

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ mají tedy průnik tvořený jediným bodem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) Nalezneme obecné rovnice prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

(a) Obecná rovnice $\boldsymbol{\pi}$. Hledáme soustavu rovnic, která má jako řešení

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Postupem z Kapitoly 8.3 dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(b) Obecná rovnice $\boldsymbol{\pi}'$. Hledáme soustavu rovnic, která má jako řešení

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Postupem z Kapitoly 8.3 dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -5 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Průnik $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ je tedy řešením soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

kterou vyřešíme pomocí GEM:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -5 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -8 & -10 & 6 & -16 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 14 \\ 0 & 10 & 2 & 12 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ 3R_2 - 5R_1 \\ 3R_3 + R_1 \\ 3R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ -1/14R_3 \\ R_2 - 8/14R_3 \\ R_4 + 10/14R_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 4R_3 \end{array}$$

Tato soustava má jediné řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

které je jediným bodem průniku $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$.

14.2.7 Problém Vybavte lineární prostor $\mathbb{R}^n$ standardním skalárním součinem a označte jej $\langle - \mid - \rangle$. Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \mathsf{span}(\mathbf{s})$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + \mathsf{span}(\mathbf{s}')$ jsou dvě různoběžné přímky v $\mathbb{R}^n$. Dokažte, průsečík $\mathbf{x}$ přímek $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ lze spočítat následovně:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}' \mid \mathbf{s} \rangle & \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{s} \rangle \\ \langle \mathbf{s}' \mid \mathbf{s}' \rangle & \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{s}' \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle & \langle \mathbf{s}' \mid \mathbf{s} \rangle \\ \langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s}' \rangle & \langle \mathbf{s}' \mid \mathbf{s}' \rangle \end{vmatrix}} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{p}' + \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle & \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{s} \rangle \\ \langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s}' \rangle & \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{s}' \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \rangle & \langle \mathbf{s}' \mid \mathbf{s} \rangle \\ \langle \mathbf{s} \mid \mathbf{s}' \rangle & \langle \mathbf{s}' \mid \mathbf{s}' \rangle \end{vmatrix}} \cdot \mathbf{s}'$$

✱ **Řešení problému 14.2.7**

✱ **Komentář k problému 14.2.7** Pro průsečík $\mathbf{x}$ přímek $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ existují jediná reálná čísla t, t' tak, že platí rovnosti

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t \cdot \mathbf{s} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + t' \cdot \mathbf{s}'$$

Jinými slovy musí platit rovnost

$$-t\cdot\mathbf{s}+t'\cdot\mathbf{s}'=\mathbf{p}-\mathbf{p}'$$

a ta platí právě tehdy, když platí rovnosti[6]

$$\langle -t\cdot\mathbf{s}+t'\cdot\mathbf{s}' \mid \mathbf{s}\rangle=\langle \mathbf{p}-\mathbf{p}' \mid \mathbf{s}\rangle \qquad \langle -t\cdot\mathbf{s}+t'\cdot\mathbf{s}' \mid \mathbf{s}'\rangle=\langle \mathbf{p}-\mathbf{p}' \mid \mathbf{s}'\rangle$$

Pomocí vlastností skalárního součinu lze výše uvedené přepsat na rovnosti

$$-t\cdot\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle+t'\cdot\langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle=\langle \mathbf{p}-\mathbf{p}' \mid \mathbf{s}\rangle \qquad -t\cdot\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle+t'\cdot\langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle=\langle \mathbf{p}-\mathbf{p}' \mid \mathbf{s}'\rangle$$

To znamená, že vektor $\begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix}$ je jediným řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{array}\right)$$

a podle Cramerovy věty platí

$$t=\frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}} \qquad t'=\frac{\begin{vmatrix} -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ -\langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}$$

Vlastnosti determinantů (prohození dvou sloupců mění znaménko determinantu a vynásobení sloupce číslem (-1) znamená vynásobení determinantu číslem (-1)) nám umožňují výše uvedené rovnosti přepsat na

$$t=\frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}} \qquad t'=\frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}$$

Pro průsečík $\mathbf{x}$ přímek $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ dostáváme tedy rovnosti

$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+\frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}\cdot\mathbf{s}=\mathbf{p}'+\frac{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{p}-\mathbf{p}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}\rangle \\ \langle \mathbf{s}\mid\mathbf{s}'\rangle & \langle \mathbf{s}'\mid\mathbf{s}'\rangle \end{vmatrix}}\cdot\mathbf{s}'$$

které jsme měli dokázat.

14.3 Vektorový součin a Gramův determinant

14.3.1 Problém V prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$ spočtěte Gramův determinant $\mathrm{Gram}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, kde

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 14.3.1** Platí $\mathrm{Gram}(\mathbf{u},\mathbf{v})=26$.

✱ **Komentář k problému 14.3.1** Předvedeme dva způsoby výpočtu.

(1) Podle definice je

$$\mathrm{Gram}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}\mid\mathbf{u}\rangle & \langle \mathbf{u}\mid\mathbf{v}\rangle \\ \langle \mathbf{v}\mid\mathbf{u}\rangle & \langle \mathbf{v}\mid\mathbf{v}\rangle \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=26$$

[6] Použijte Problém 12.1.3.

(2) Protože pro matici $\mathbf{A}$ se sloupcpvým zápisem $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ platí $\operatorname{Gram}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$, lze počítat i takto:

$$\operatorname{Gram}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}) = 26$$

14.3.2 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem spočtěte 2-dimensionální objem rovnoběžnostěnu zadaného vektory

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 14.3.2** Zadaný rovnoběžnostěn má 2-dimensionální objem roven 4.

✱ **Komentář k problému 14.3.2** Hledaný 2-dimensionální objem je roven $\sqrt{\operatorname{Gram}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$. Protože

$$\operatorname{Gram}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

má zadaný rovnoběžnostěn 2-dimensionální objem roven 4.

14.3.3 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem spočtěte vektorový součin $\times(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, kde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

✱ **Řešení problému 14.3.3** Platí $\times(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 14.3.3** Předvedeme dva způsoby výpočtu.

(1) Platí

$$\begin{aligned}
\times(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3 + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{e}_4) \cdot \mathbf{e}_4 \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} \cdot \mathbf{e}_1 + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=2} \cdot \mathbf{e}_2 \\
&\quad + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} \cdot \mathbf{e}_3 + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=-2} \cdot \mathbf{e}_4 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(2) Výpočet pomocí *mnemotechnické pomůcky*:

$$
\begin{aligned}
\times(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ -1 & 1 & 3 & \mathbf{e}_2 \\ 2 & -1 & -1 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 1 & 3 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} \\
&= -\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} \cdot \mathbf{e}_1 + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=2} \cdot \mathbf{e}_2 - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} \cdot \mathbf{e}_3 + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-2} \cdot \mathbf{e}_4 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

14.3.4 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem jsou zadány tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Dokažte, že platí rovnost $\times(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\times(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w})$.

✱ **Řešení problému 14.3.4** Řešením problému je správně vedený důkaz rovnosti $\times(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\times(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w})$.

✱ **Komentář k problému 14.3.4** Platí rovnost

$$\times(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_2 + \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_3 + \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_4)\cdot\mathbf{e}_4$$

Z vlastností determinantu víme, že platí

$$
\begin{aligned}
\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_1) &= -\det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_1) & \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_2) &= -\det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_2) \\
\det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_3) &= -\det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_3) & \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{e}_4) &= -\det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_4)
\end{aligned}
$$

Protože platí rovnost

$$\times(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{e}_1 - \det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_2 - \det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{e}_3 - \det(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{e}_4)\cdot\mathbf{e}_4$$

platí díky výše uvedenému rovnost $\times(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\times(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w})$.

14.4 Vzdálenost afinních podprostorů

14.4.1 Problém V prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem nalezněte vzdálenost bodu $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ od roviny $3x - 4y + z = 1$.

✱ **Řešení problému 14.4.1** Vzdálenost bodu $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ od roviny $3x - 4y + z = 1$ je $\frac{5}{26} \cdot \sqrt{26}$.

✱ **Komentář k problému 14.4.1** Víme, že rovinu $3x-4y+z = 1$ lze popsat jako afinní prostor $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$, kde

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad W'^{\perp} = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix})$$

protože bod $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ evidentně v zadané rovině leží a protože známe normálový vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ roviny.

Protože $\mathbf{p}$ je afinní prostor $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \{\mathbf{o}\}$, platí

$$\mathrm{rej}_{\{\mathbf{o}\}\vee W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \mathrm{rej}_{W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \mathrm{proj}_{W'^{\perp}}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \frac{\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\rangle}{\langle \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\rangle} \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} = \frac{-5}{26} \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$$

kde rovnost $\mathrm{rej}_{W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \mathrm{proj}_{W'^{\perp}}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ platí díky Problému 13.1.5(5).

Proto můžeme psát

$$\omega(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{\{\mathbf{o}\}\vee W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\| = \|\frac{-5}{26} \cdot \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\| = \frac{5}{26} \cdot \|\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}\| = \frac{5}{26} \cdot \sqrt{26}$$

14.4.2 Problém V prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem nalezněte vzdálenost bodu $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ od přímky $\boldsymbol{\pi}'$ s obecnou rovnicí $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

✱ Řešení problému 14.4.2 Vzdálenost bodu $\mathbf{p}$ od přímky $\boldsymbol{\pi}'$ je $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{42}$.

✱ Komentář k problému 14.4.2 Víme, že platí $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$, kde W' je směr přímky $\boldsymbol{\pi}'$ generovaný vektorovým součinem

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}$$

a bod $\mathbf{p}'$ je například[7] $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$. Protože bod $\mathbf{p}$ je afinní prostor tvaru $\mathbf{p} + W$, kde $W = \{\mathbf{o}\}$, můžeme psát

$$\begin{aligned}
\mathrm{rej}_{W\vee W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') &= \mathrm{rej}_{W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = (\mathbf{p}-\mathbf{p}') - \mathrm{proj}_{W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\rangle}{\langle \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}\rangle} \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{6}{27} \cdot \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Proto platí $\omega(\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W\vee W'}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\| = \|\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}\| = \frac{1}{3} \cdot \|\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{42}$.

[7] Je zřejmé, že bod $\mathbf{p}'$ leží na přímce $\boldsymbol{\pi}'$. Samozřejmě: za bod $\mathbf{p}'$ lze zvolit jakékoli partikulární řešení soustavy rovnic $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

14.4.3 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete vzájemnou vzdálenost $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

✱ **Řešení problému 14.4.3** Vzájemná vzdálenost $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ je rovna 6.

✱ **Komentář k problému 14.4.3** Platí rovnost $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$. Dále platí

$$W \vee W' = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix})$$

Nejprve nalezneme matici $\mathbf{P}$ ortogonální projekce na prostor $W \vee W'$ postupem z Problému 13.1.4. Označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -9 & -9 & 0 \\ -9 & 18 & -9 & 0 \\ -9 & -9 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a proto

$$\mathrm{proj}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože platí

$$\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = (\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \mathrm{proj}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

platí

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{36} = 6$$

14.4.4 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem jsou zadány afinní podprostory[a]

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete vzájemnou vzdálenost $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

[a] Afinní prostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou prostory z Problému 14.2.2. Víme tedy, že $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné. Na postup při výpočtu vzdálenosti $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ však tato znalost nemá vliv.

✱ **Řešení problému 14.4.4** Vzájemná vzdálenost $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ je rovna 3.

✱ **Komentář k problému 14.4.4** Platí rovnost $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$. Protože

$$W \vee W' = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}) = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix})$$

je $\dim(W \vee W') = 3$. Proto $\dim(W \vee W')^\perp = 1$. Stačí tedy nalézt jeden nenulový vektor ve $(W \vee W')^\perp$. Tímto vektorem je například vektorový součin

$$\times(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Proto platí

$$(W \vee W')^\perp = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$$

Podle Problému 13.1.5(5) platí $\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathrm{proj}_{(W \vee W')^\perp}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Spočteme tedy

$$\mathrm{proj}_{(W \vee W')^\perp}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathrm{proj}_{\mathsf{span}(\mathbf{e}_4)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{e}_4 \rangle}{\langle \mathbf{e}_4 \mid \mathbf{e}_4 \rangle} \cdot \mathbf{e}_4 = \frac{-3}{1} \cdot \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\end{pmatrix}$$

Proto je

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}((\mathbf{p} - \mathbf{p}'))\| = \|\mathrm{proj}_{(W \vee W')^\perp}((\mathbf{p} - \mathbf{p}'))\| = \| \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\end{pmatrix} \| = 3$$

14.4.5 Problém V $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem je zadán bod $\mathbf{p}$ a rovina $\boldsymbol{\pi}'$ normálovou rovnicí $\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}') = 0$. Dokažte, že vzdálenost bodu $\mathbf{p}$ od $\boldsymbol{\pi}'$ lze počítat vzorcem

$$\frac{|\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')|}{\|\mathbf{n}\|}$$

✱ **Řešení problému 14.4.5** Řešením problému je správně vedený důkaz platnosti daného vzorce.

✱ **Komentář k problému 14.4.5** Bod $\mathbf{p}$ je afinní prostor $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$, kde $W = \{\mathbf{o}\}$ a rovina $\boldsymbol{\pi}'$ je afinní prostor $\mathbf{p}' + W'$, kde $W'^{\perp} = \mathsf{span}(\mathbf{n})$. To znamená, že platí

$$\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathrm{rej}_{W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathrm{proj}_{W'^{\perp}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \rangle} \cdot \mathbf{n}$$

Proto platí

$$\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\| = \|\frac{\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \rangle} \cdot \mathbf{n}\| = \frac{|\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{n} \rangle|}{\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \rangle} \cdot \|\mathbf{n}\| = \frac{|\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')|}{\|\mathbf{n}\|}$$

kde jsme použili faktu, že $\langle \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \rangle = \|\mathbf{n}\|^2$ a toho, že $\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}' \mid \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}' \rangle = \mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')$.

Poznámka: v učebnicích se často vyskytuje vzorec

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

pro výpočet vzdálenosti bodu $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ od roviny $ax + by + cz = d$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Jde o stejný vzorec, který jsme odvodili: označíme-li $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, potom pro jakýkoli bod $\mathbf{p}'$ roviny $ax + by + cz = d$ platí $\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{p}' = d$. Proto platí $\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{p} - \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{p}' = ap_1 + bp_2 + cp_3 - d$, a tudíž

$$\frac{|\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

14.5 Problémy s návodem k řešení

14.5.1 Problém Ať W a V jsou lineární podprostory prostoru L, ať $\vec{p}$ a $\vec{q}$ jsou body v L. Dokažte, že platí:

(1) $\vec{p} + W = \vec{q} + W$ platí právě tehdy, když $\vec{p} - \vec{q} \in W$.

(2) $\vec{p} + W = \vec{q} + V$ platí právě tehdy, když $V = W$ a $\vec{p} - \vec{q} \in W$.

✱ **Řešení problému 14.5.1** Řešením problému je správně vedený důkaz toho, že platí (1) a správně vedený důkaz toho, že platí (2).

✱ **Návod k řešení problému 14.5.1** Postupujte podobně jako při řešení Problému 14.1.3.

14.5.2 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ nad $\mathbb{R}$ jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete vzájemnou polohu $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ a průnik $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$.

✱ **Řešení problému 14.5.2** Afinní prostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou různoběžné. Průnik $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ je tvořen bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

✱ **Návod k řešení problému 14.5.2** Postupujte jako v Problémech 14.2.5 a 14.2.6.

14.5.3 Problém Označte jako $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ plochu trojúhelníku zadaného body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ v $\mathbb{R}^3$. Spočítejte $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ a dokažte, že $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

✱ **Řešení problému 14.5.3** Platí rovnost $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})}$. Rovnost $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dostaneme dosazením do tohoto vzorce.

✱ **Návod k řešení problému 14.5.3** Protože platí $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = A(\mathbf{a}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})$, stačí spočítat plochu $A(\mathbf{a}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}) = A(\mathbf{o}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})$. To je jednoduché[8]

$$A(\mathbf{o}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})}$$

Rovnost $A(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dostaneme dosazením do vzorce $A(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\mathrm{Gram}(\mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a})}$.

14.5.4 Problém V $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$ jsou zadány čtyři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$. Dokažte, že platí rovnost[a]

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v} \mid \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' \rangle = \det(\begin{pmatrix} \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{u}' \rangle & \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{u}' \rangle \\ \langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v}' \rangle & \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v}' \rangle \end{pmatrix})$$

[a] Této rovnosti se říká *Lagrangeova rovnost pro vektorový součin*. To je samozřejmě nepovinná znalost.

✱ **Řešení problému 14.5.4** Řešením problému je správně vedený důkaz platnosti zadané rovnosti.

✱ **Návod k řešení problému 14.5.4** Rozdělte důkaz na dva případy: případ, kdy vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé (pak je rovnost triviální) a případ, kdy jsou vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Ve druhém případě využijte toho, že lze nalézt uspořádanou bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ ve tvaru $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ a dále využijte definici vektorového součinu dvou vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ v $\mathbb{R}^3$: vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je jediný vektor, pro který platí rovnost

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b} \mid \mathbf{w} \rangle = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$$

pro všechny vektory $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^3$.

14.5.5 Problém V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem jsou zadány afinní podprostory

$$\boldsymbol{\pi} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})}_{=W} \qquad \boldsymbol{\pi}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{p}'} + \underbrace{\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix})}_{=W'}$$

Určete vzájemnou vzdálenost $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}')$ prostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

✱ **Řešení problému 14.5.5** Platí $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \sqrt{7}$.

✱ **Návod k řešení problému 14.5.5** Postupujte jako v Problémech 14.4.3 a 14.4.4.

14.5.6 Problém V $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ se standardním skalárním součinem je zadán bod $\mathbf{p}$ a přímka $\boldsymbol{\pi}'$ normálovou rovnicí $\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}') = 0$. Dokažte, že vzdálenost bodu $\mathbf{p}$ od $\boldsymbol{\pi}'$ lze počítat vzorcem

$$\frac{|\mathbf{n}^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}')|}{\|\mathbf{n}\|}$$

✱ **Řešení problému 14.5.6** Řešením problému je správně vedený důkaz platnosti daného vzorce.

✱ **Návod k řešení problému 14.5.6** Postupujte analogicky jako při řešení Problému 14.4.5.

[8] Namalujte si obrázek! Srovnejte postup s řešením Problému 9.4.3.

Téma 15

Lineární kódy

Týden v semestru:

B0B01LAG(A) A8B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B6B01LAG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Co se procvičuje: generující a kontrolní matice lineárního kódu, vlastnosti lineárního kódu.

15.1 Generující a kontrolní matice lineárního kódu

15.1.1 Problém Víme, že W je lineární kód nad $\mathbb{Z}_5$ délky 4 a dimense 3. Kolik kódových slov kód W obsahuje?

✱ **Řešení problému 15.1.1** Kód W obsahuje přesně 5^3 kódových slov.

✱ **Komentář k problému 15.1.1** Podle definice je W lineární podprostor prostoru $(\mathbb{Z}_5)^4$ dimense 3. Generující matice $\mathbf{G}$ je tedy $\mathbf{G} : (\mathbb{Z}_5)^3 \longrightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ taková, že $W = \mathrm{im}(\mathbf{G})$. Každý prvek $\mathbf{w}$ ve W je napsán jednoznačně ve tvaru $\mathbf{w} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}$, kde $\mathbf{a}$ je vektor v $(\mathbb{Z}_5)^3$. Stačí tedy spočítat počet prvků v $(\mathbb{Z}_5)^3$. Těch je 5^3 (jedná se o uspořádané trojice, kde každá položka může být obsazena pěti různými způsoby).

15.1.2 Problém Zjistěte, zda matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Z}_3$ je generující maticí nějakého lineárního kódu W nad $\mathbb{Z}_3$. Pokud ano, pak nalezněte délku a dimensi W a počet kódových slov ve W.

✱ **Řešení problému 15.1.2** Ano, $\mathbf{G}$ je generující matice lineárního kódu W nad $\mathbb{Z}_3$, délky 4 a dimense 2. Kód W obsahuje přesně 3^2 různých kódových slov.

✱ **Komentář k problému 15.1.2**

(1) Matice $\mathbf{G}$ je lineární zobrazení $\mathbf{G} : (\mathbb{Z}_3)^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}_3)^4$, a bude generující maticí nějakého lineárního kódu W nad $\mathbb{Z}_3$ právě tehdy, když je $\mathbf{G}$ monomorfismus. Podle věty o dimensi jádra a obrazu platí rovnost $2 = \mathrm{def}(\mathbf{G}) + \mathrm{rank}(\mathbf{G})$. Protože sloupce $\mathbf{G}$ jsou lineárně nezávislé, platí $\mathrm{rank}(\mathbf{G}) = 2$. To znamená, že

def$(\mathbf{G}) = 0$. Matice $\mathbf{G}$ je monomorfismus. Proto je matice $\mathbf{G}$ generující maticí lineárního kódu W nad $\mathbb{Z}_3$.

(2) Popis kódu W. Platí $W = \mathrm{im}(\mathbf{G})$, proto $\dim(W) = 2$. Protože W je lineární podprostor v $(\mathbb{Z}_3)^4$, má kód W délku 4. Kód W obsahuje přesně 3^2 různých kódových slov (výpočet je analogický řešení Problému 15.1.1).

15.1.3 Problém Nalezněte nějakou kontrolní matici $\mathbf{H}$ pro lineární kód W s generující maticí

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Z}_3$ (viz Problém 15.1.2).

✱ **Řešení problému 15.1.3** Hledaná kontrolní matice je (například) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 15.1.3** Kontrolní matice $\mathbf{H}$ je taková, že $\mathbf{H}^T$ je epimorfismus a $\ker(\mathbf{H}^T) = W$. Protože sloupce zadané matice $\mathbf{G}$ jsou lineárně nezávislé, je $\dim(W) = 2$. Dále: protože $W = \mathrm{im}(\mathbf{G})$, je W lineární podprostor prostoru $(\mathbb{Z}_3)^4$.

Proto budeme hledat matici $\mathbf{H}^T : (\mathbb{Z}_3)^4 \longrightarrow (\mathbb{Z}_3)^2$ s jádrem $W = \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Postup je analogický řešení Problému 8.3.1: hledáme soustavu ve tvaru $(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{o})$, která má jako řešení afinní prostor $\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Jde (například) o soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

a proto

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15.1.4 Problém Nad $\mathbb{Z}_5$ je zadána kontrolní matice

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

lineárního kódu W. Nalezněte nějakou generující matici $\mathbf{G}$ tohoto kódu.

✱ **Řešení problému 15.1.4** Generující matice kódu W je (například) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 15.1.4** Zadaný kód W je $\ker(\mathbf{H}^T)$. Nejprve tedy vyřešíme soustavu

$$(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{o}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{Z}_5$. Řešením je

$$W = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},)$$

Proto je generující matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\3 & 3 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

15.1.5 Problém Nad $\mathbb{Z}_7$ je zadán lineární kód s kontrolní maticí

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix}1 & 6\\2 & 1\\3 & 2\\4 & 2\\5 & 4\end{pmatrix}$$

Nalezněte syndrom slova $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\0\end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 15.1.5** Syndrom slova $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\0\end{pmatrix}$ je $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

✱ **Komentář k problému 15.1.5** Syndrom slova $\mathbf{v}$ má hodnotu $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v}$. Stačí tedy nad $\mathbb{Z}_7$ spočítat součin

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\6 & 1 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

15.1.6 Problém Nad $\mathbb{Z}_5$ je zadán lineární kód W s kontrolní maticí

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nalezněte všechna slova $\mathbf{v}$ se syndromem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

✱ **Řešení problému 15.1.6** Všechna slov $\mathbf{v}$ se syndromem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ tvoří afinní podprostor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

lineárního prostoru $(\mathbb{Z}_5)^5$.

✱ **Komentář k problému 15.1.6** Syndrom slova $\mathbf{v}$ má hodnotu $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{v}$. Množina všech slov $\mathbf{v}$ se syndromem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ je tedy množina všech řešení soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{Z}_5$. Množina všech řešení uvedené soustavy je afinní podprostor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

lineárního prostoru $(\mathbb{Z}_5)^5$.

15.2 Vlastnosti lineárního kódu

15.2.1 Problém Nalezněte nějakou generující a nějakou kontrolní matici lineárního kódu W and $\mathbb{Z}_2$, který informaci délky 4 zakóduje tak, že ji třikrát zopakuje.[a]

[a] Takovému typu kódu se říká *repetition code*.

✱ **Řešení problému 15.2.1** Generující matice $\mathbf{G}$ kódu W je například

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a kontrolní matice $\mathbf{H}$ kódu W je například

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Z}_2$.

✱ **Komentář k problému 15.2.1** Protože informace má délku 4 a protože kódové slovo má délku 12 (informace je třikrát zopakována), musí platit

$$\mathbf{G} : (\mathbb{Z}_2)^4 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^{12}, \quad \operatorname{def}(\mathbf{G}) = 0, \quad \operatorname{im}(\mathbf{G}) = W$$

Podle věty o dimensi jádra a obrazu platí $\operatorname{rank}(\mathbf{G}) = 4$. To znamená, že dimense kódu W je rovna 4.

Zakódování vektorů kanonické báze prostoru $(\mathbb{Z}_2)^4$ probíhá následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zapišme to (nepřesně, ale mírně přehledněji) jako

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_4 \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$$

Protože vektory

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{e}_4\\ \mathbf{e}_4\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé v $(\mathbb{Z}_2)^{12}$, pro matici $\mathbf{G}$ s výše uvedenými sloupci platí

$$\mathbf{G} : (\mathbb{Z}_2)^4 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^{12}, \quad \operatorname{def}(\mathbf{G}) = 0, \quad \operatorname{im}(\mathbf{G}) = W$$

To znamená, že

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro kontrolní matici $\mathbf{H}^T$ našeho kódu musí platit $\ker(\mathbf{H}^T) = W$ a $\mathbf{H}^T$ musí být epimorfismus. To znamená, že

$$\mathbf{H}^T : (\mathbb{Z}_2)^{12} \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^8, \quad \operatorname{rank}(\mathbf{H}^T) = 8, \quad \ker(\mathbf{H}^T) = W$$

Protože víme, že platí

$$W = \mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix})$$

stačí nalézt soustavu rovnic tvaru $(\mathbf{H}^T \mid \mathbf{o})$, která má W jako množinu řešení. Tuto soustavu nalezneme analogicky Problému 8.3.3. Jde (například) o soustavu

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{Z}_2$.

Hledaná kontrolní matice $\mathbf{H}$ je tedy

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Z}_2$. Viz také Problémy 15.3.1 a 15.3.2.

15.2.2 Problém Spočtěte Hammingovu vzdálenost $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, kde

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

v $(\mathbb{Z}_7)^5$.

✱ **Řešení problému 15.2.2** Platí $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2$.

✱ **Komentář k problému 15.2.2** Protože Hammingova vzdálenost $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ je počet položek, ve kterých se $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ liší, platí $d_H(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2$.

15.2.3 Problém Nalezněte minimální distanci $dist_W$ lineárního kódu W nad $\mathbb{Z}_2$, kde W je zadán obecnou rovnicí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

✱ **Řešení problému 15.2.3** Platí $dist_W = 2$.

✱ **Komentář k problému 15.2.3** Lineární kód W je

$$\mathsf{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Protože minimální distance $dist_W$ je definována vztahem

$$dist_W = \min\{d_H(\mathbf{w}, \mathbf{o}) \mid \mathbf{w} \text{ je nenulové slovo ve } W\}$$

platí $dist_W = 2$.

15.2.4 Problém Ukažte že existuje jediný kód délky 3 nad $\mathbb{Z}_2$, který opravuje 3 chyby.

✱ **Řešení problému 15.2.4** Řešením problému je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Komentář k problému 15.2.4** Označme jako W kód délky 3 a dimense k nad $\mathbb{Z}_2$, který opravuje 3 chyby. Podle *Sphere-packing Bound* (Přednáška 12B) platí nerovnost

$$\sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \leq 2^{3-k}$$

neboli

$$2^3 \leq 2^{3-k}$$

Musí tedy platit $k = 0$. Proto $W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ je jediný kód délky 3 nad $\mathbb{Z}_2$, který opravuje 3 chyby.

15.3 Problémy s návodem k řešení

15.3.1 Problém Ať lineární kód W délky n a dimense k nad $\mathbb{Z}_p$ má generující matici $\mathbf{G}$ v blokovém tvaru[a]

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\mathbf{E}_k}{\mathbf{B}}\right)$$

Potom má kontrolní matice blokový tvar

$$\mathbf{H} = \left(\frac{-\mathbf{B}^T}{\mathbf{E}_{n-k}}\right)$$

neboli

$$\mathbf{H}^T = (-\mathbf{B} \mid \mathbf{E}_{n-k})$$

[a] Kódům, které mají generující matici v tomto tvaru se říká *systematické*. Jde o *nepovinnou* znalost.

✱ **Řešení problému 15.3.1** Řešením problému je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Návod k řešení problému 15.3.1** Díky tvaru $\mathbf{G}$ platí $\operatorname{rank}(\mathbf{G}) = k$ a $\mathbf{G}$ má n řádků. To znamená, že blok $\mathbf{B}$ má k sloupců a $n-k$ řádků. Dále: pro matici $\mathbf{H} = \left(\frac{-\mathbf{B}^T}{\mathbf{E}_{n-k}}\right)$ platí $\operatorname{rank}(\mathbf{H}) = n-k$ a $\mathbf{H}$ má $n-k$ sloupců a n řádků.

To znamená, že $\mathbf{G} : (\mathbb{Z}_p)^k \longrightarrow (\mathbb{Z}_p)^n$ je monomorfismus a $\mathbf{H}^T : (\mathbb{Z}_p)^n \longrightarrow (\mathbb{Z}_p)^{n-k}$ je epimorfismus. Zbývá ukázat, že $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{G}$ je nulová matice. To plyne ihned z maticového součinu

$$\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{G} = (-\mathbf{B} \mid \mathbf{E}_{n-k}) \cdot \left(\frac{\mathbf{E}_k}{\mathbf{B}}\right) = -\mathbf{B} + \mathbf{B} = \mathbf{O}_{k,n-k}$$

15.3.2 Problém Ať lineární kód W délky n a dimense k nad $\mathbb{Z}_p$ má kontrolní matici $\mathbf{H}$ v blokovém tvaru

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{E}_{n-k}}\right)$$

Potom má generující matice blokový tvar

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\mathbf{E}_k}{-\mathbf{C}^T}\right)$$

✱ **Řešení problému 15.3.2** Řešením problému je správně vedený důkaz daného tvrzení.

✱ **Návod k řešení problému 15.3.2** Postupujte analogicky řešení Problému 15.3.1.