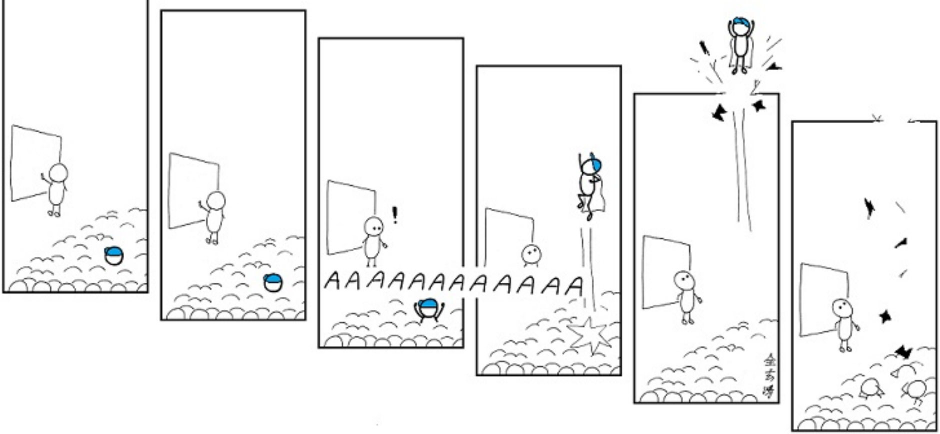


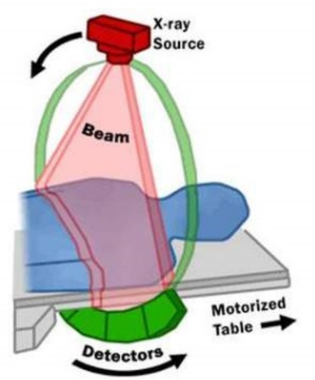
http://abstrusegoose.com/415

Lineární algebra a počítačová tomografie

Sir Godfrey Newbold Hounsfield (28. 8. 1919 — 12. 8. 2004)

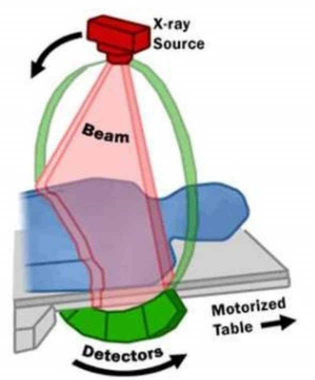
- britský elektroinženýr
- 1979 Nobelova cena za medicínu (spolu s Allanem MacLeodem Cormackem) za vynález počítačové tomografie
- prototyp CAT testoval nejprve na laboratorním vzorku mozku, poté na kravském mozku zakoupeném v řeznictví, nakonec na sobě
- 1. října 1971 Atkinson Morley Hospital in Wimbledon, Londýn: první klinické použití (cerebrální cysta)

Základní schéma počítačové axiální tomografie (CAT)



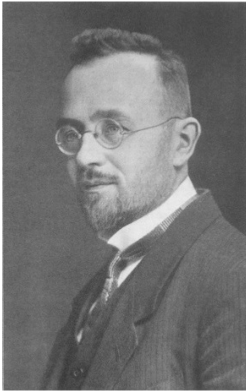
Skvělá a jednoduchá myšlenka!

Základní schéma počítačové axiální tomografie (CAT)



Skvělá a jednoduchá myšlenka!
Lze ale z přímkových řezů zrekonstruovat snímaný objekt?

Johann Karl August Radon (16. 12. 1887 — 25. 5. 1956)



- rakouský matematik
- 1917: autor postupu, nazvaném později Radonova transformace

  Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Akademie der Wissenschaften Leipzig* 69 (1917), 262–277.
- $f \mapsto \mathbf{R}(f)$, kde

$$\mathbf{R}(f)(t, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cdot \cos\alpha - s \cdot \sin\alpha, t \cdot \sin\alpha + s \cdot \cos\alpha) \, \mathrm{d}s$$

$$t \in (-\infty; +\infty) \qquad \alpha \in [0; 2\pi]$$

Použijeme zidealisovaný model

1. Nedochází k refrakci nebo difrakci.
   Rentgenové paprsky se šíří po přímkách a nejsou „ohnuty“ objekty, skrz které procházejí.
2. Paprsky jsou monochromatické.
   Všechny paprsky daného svazku mají stejnou frekvenci.
3. Platí Beerův zákon.[a]
   Každá tkáň má (pro danou energii paprsku) charakteristický tlumící koeficient[b] μ. Intensita $I(s)$ splňuje na bodech přímky $\mathbf{p} + s \cdot \mathbf{d}$, $s \in \mathbb{R}$, diferenciální rovnici

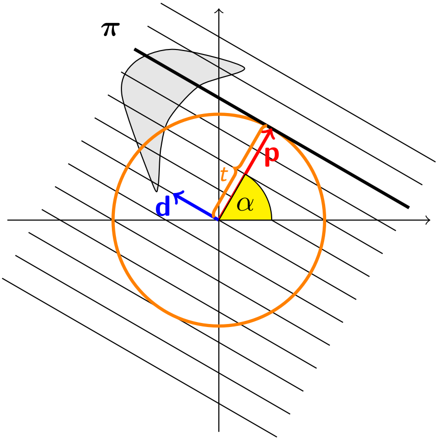
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} I(s) = -\mu(s) \cdot I(s)$$

---

[a] August Beer, Bestimmung der Absorption des rothen Lichts in farbigen Flüssigkeiten, *Annalen der Physik und Chemie* 162.5 (1852), 78–88.

[b] Anglicky: attenuation coefficient.

Popis paralelních přímek (tj., popis svazku paprsků)



$$\|\mathbf{p}\| = t$$

$$\langle \mathbf{p} \mid \mathbf{d} \rangle = 0$$

$$\mathbf{p} = t \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \times \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\pi_{t,\alpha} = \mathbf{p} + \operatorname{span}(\mathbf{d})$$

Linearita Radonovy transformace

Připomenutí: pro (integrovatelnou) funkci[a] $(x, y) \mapsto f(x, y)$, která je nulová vně nějakého čtverce, definujeme její Radonovu transformaci

$$\mathbf{R}(f) : (t, \alpha) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cdot \cos\alpha - s \cdot \sin\alpha, t \cdot \sin\alpha + s \cdot \cos\alpha) \, \mathrm{d}s$$

kde $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0; 2\pi]$.
Platí důležitá rovnost

$$\mathbf{R}(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \mathbf{R}(f) + b \cdot \mathbf{R}(g), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

To jest: Radonova transformace je lineární!

[a] Funkce f modeluje zkoumanou tkáň.

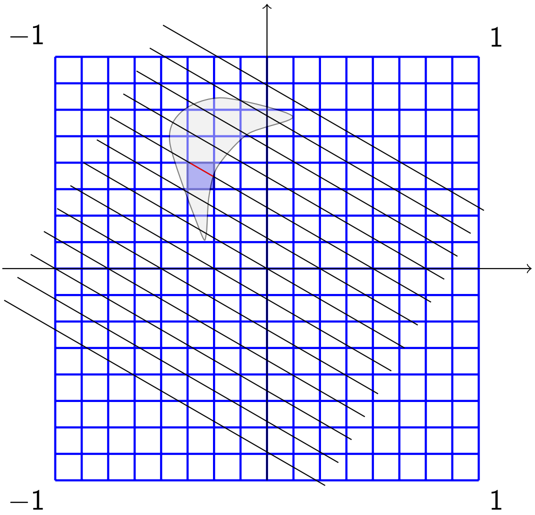
Hlavní výsledek profesora Johanna Radona (1917)

- Ze znalosti $\mathbf{R}(f)$ lze zrekonstruovat původní funkci f.
- To jest: existuje inversní Radonova transformace.
- Jde o velmi netriviální výsledek, protože lineární prostor všech „vhodných“ funkcí f nemá konečnou dimensi.

Jak se problému nekonečné dimense vyhnout?

- Předvedeme metodu ART (Algebraic Reconstruction Technique), která využívá jednoduchých metod lineární algebry.
- Budeme řešit jistou soustavu lineárních rovnic iterativní metodou která pochází z roku 1937.

Základní myšlenka ART



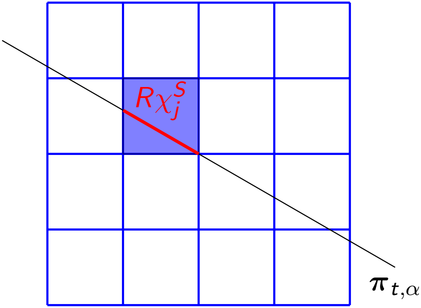
- čtvercová síť $K \times K$ čtverců, číslováno od 1 do $S = K^2$
- $\chi_j^S(x, y) = 1$ v j-tém čtverci, jinde $\chi_j^S(x, y) = 0$
- χ_j^S jsou ortogonální
- $\langle h \mid k \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} h \cdot k$

Linearita Radonovy transformace ještě jednou

$$\mathbf{R}(\sum_{j=1}^{S} a_j \cdot \chi_j^S) = \sum_{i=1}^{S} a_j \cdot \mathbf{R}(\chi_j^S)$$

Výpočet hodnoty $\mathbf{R}(\chi_j^S)$ je velmi snadný:

$$\mathbf{R}(\chi_j^S) : (t, \alpha) \mapsto \text{délka průsečíku přímky } \boldsymbol{\pi}_{t,\alpha} \text{ s } j\text{-tým čtvercem}$$



Vzorkovací matice V a vektor b naměřených hodnot

1. Tkáň je popsána funkcí $(x, y) \mapsto f(x, y)$, která je integrovatelná a nulová vně intervalu $[-1; 1] \times [-1; 1]$.
2. Zvolíme K a budeme pracovat s ortogonální sadou $\chi_1^S, \ldots, \chi_S^S$, kde $S = K^2$.
3. Zvolíme sadu vzorkovacích přímek
$$\boldsymbol{\pi}_{t_1,\alpha_1}, \quad \boldsymbol{\pi}_{t_2,\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{\pi}_{t_R,\alpha_R}$$
4. Spočteme hodnoty
$$v_{ji} = \mathbf{R}(\chi_j^S)(t_i, \alpha_i) \qquad b_i = \mathbf{R}(f)(t_i, \alpha_i)$$
pro všechna $i = 1, \ldots, R$, $j = 1, \ldots, S$.
5. Vytvoříme tak matici $\mathbf{V}$, která má v i-tém řádku a j-tém sloupci hodnotu v_{ji} a vektor $\mathbf{b}$.
6. Rekonstrukce: funkce f je (s malou chybou) řešením soustavy lineárních rovnic $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Slasti a strasti řešení soustavy $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

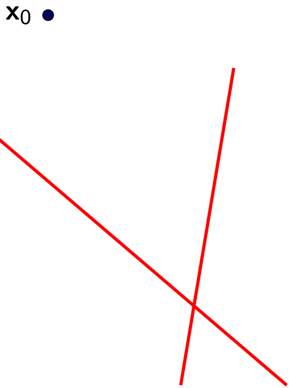
1. Soustava $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je teoreticky řešitelná (GEM).
2. V praxi má matice $\mathbf{V}$ zhruba 20 000 sloupců a 20 000 řádků. Plně se projeví numerická nestabilita GEM.
3. Pro každé i (tj., pro každou vzorkovací přímku) je pouze $K \approx \sqrt{R}$ prvků j tak, že $v_{ji} \neq 0$. To jest: matice $\mathbf{V}$ je řídká (obsahuje mnoho nul).
   Tedy lze k řešení soustavy $\mathbf{V}^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ použít aproximační iterativní metodu.

Stefan Kaczmarz (20. 3. 1895 — 1939 ??)

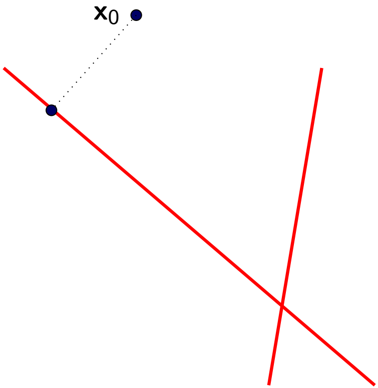
- polský matematik, profesor university ve Lwóvě (spolupráce se Stefanem Banachem)
- autor iterativní metody, která je základem rekonstrukce moderních zobrazovacích technik

Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen, *Bull. Intern. Acad. Polonaise Sci. Lett., Cl. Sci. Math. Nat. A*, 35 (1937), 355–357.

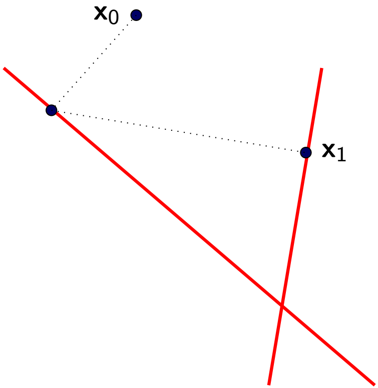
Myšlenka Kacmarzovy metody (soustava 2×2)



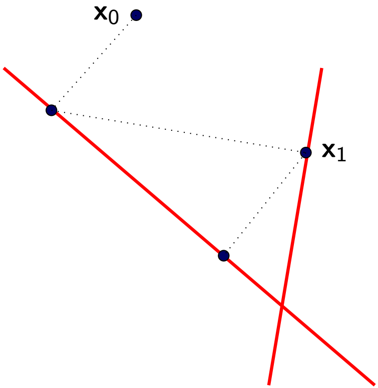
Myšlenka Kacmarzovy metody (soustava 2×2)



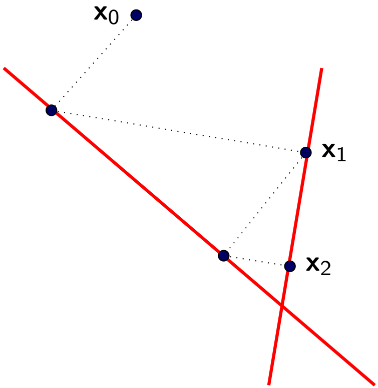
Myšlenka Kacmarzovy metody (soustava 2×2)



Myšlenka Kacmarzovy metody (soustava 2×2)



Myšlenka Kacmarzovy metody (soustava 2×2)



Literatura

- ☞ Stanley R. Deans, *The Radon transform and some of its applications*, John Wiley & Sons, 1983.
- ☞ Charles L. Epstein, *Introduction to the mathematics of medical imaging*, SIAM, 2008.
- ☞ Timothy G. Feeman, *The mathematics of medical imaging*, Springer, 2015.
- ☞ Gabor T. Herman, *Image reconstruction from projections*, Academic Press, 1980.