Lineární prostory nad $\mathbb{F}$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.1–1.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ jako zobecnění (například) prostoru orientovaných úseček v rovině.

Dnešní přednáška

1. Těleso $\mathbb{F}$ jako zobecnění reálných čísel.
2. Lineární prostor nad $\mathbb{F}$ jako zobecnění pojmu lineární prostor nad $\mathbb{R}$.
3. Důležité: povšmneme si, že důkazy typicky nesouvisí s konkrétními operacemi; souvisí s pouze s algebraickými vlastnostmi těchto operací.[a]

Od příště budeme pracovat s lineárními prostory nad obecným tělesem.

[a] Do jisté míry je tak dnešní přednáška „kopií“ přednášky předchozí. Algebra dovolí od příště takovou marnotratnost nedopustit.

Sčítání a násobení reálných čísel

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je vybavena dvěma funkcemi

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
   1. Existuje $0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a + 0 = 0 + a = a$ (existence nuly).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ platí: $a + b = b + a$ (komutativita sčítání).
   4. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $b \in \mathbb{R}$ tak, že $a + b = 0$ (existence opačného čísla, značíme $b = -a$).

Sčítání a násobení reálných čísel (pokrač.)

2. Vlastnosti násobení:
   1. Existuje $1 \in \mathbb{R}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $1 \cdot a = a$ (existence jednotky).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita násobení).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení).
3. Provázanost sčítání a násobení:
   1. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levý distributivní zákon).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (pravý distributivní zákon).
4. Test invertibility: pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \neq 0$ iff existuje a^{-1}.

Poznámka

Výše uvedené vlastnosti byly podstatné pro zavedení pojmu lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (viz minulou přednášku).

Příklady: další „standardní“ sčítání a násobení

1. Standardní sčítání a násobení racionálních čísel: obě operace na množině $\mathbb{Q}$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.
2. Standardní sčítání a násobení komplexních čísel: obě operace na množině $\mathbb{C}$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.
3. Standardní sčítání a násobení celých čísel: obě operace na množině $\mathbb{Z}$ nesplňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$. Neplatí test invertibility: například $2 \neq 0$, ale 2^{-1} v $\mathbb{Z}$ neexistuje![a]

---

[a] Test invertibility v $\mathbb{R}$ byl v minulé přednášce podstatný! Množinu $\mathbb{Z}$ tedy jako množinu skalárů nebudeme moci použít.

Příklad: „nestandardní“ sčítání a násobení

1. Množina $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ s operacemi:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

2. Množina $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ s operacemi:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Operace na množinách $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení na množině $\mathbb{R}$.

Slogan pro těleso

Těleso $\mathbb{F}$ je kolekce jakýchkoli objektů (těm budeme říkat prvky tělesa $\mathbb{F}$), které mezi sebou můžeme sčítat a násobit. Sčítání a násobení v $\mathbb{F}$ splňují stejné vlastnosti jako standardní sčítání a násobení v $\mathbb{R}$.

Definice (těleso)

Těleso je množina $\mathbb{F}$, vybavena dvěma funkcemi

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, \quad \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
    1. Existuje $0 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a + 0 = 0 + a = a$ (existence nuly).
    2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání).
    3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a + b = b + a$ (komutativita sčítání).
    4. Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ existuje právě jedno $b \in \mathbb{F}$ tak, že $a + b = 0$ (existence opačného čísla, značíme $b = -a$).

Definice tělesa (pokrač.)

2. Vlastnosti násobení:
   1. Existuje $1 \in \mathbb{F}$ tak, že pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $1 \cdot a = a$ (existence jednotky).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asociativita násobení).
   3. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení).
3. Provázanost sčítání a násobení:
   1. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (levý distributivní zákon).
   2. Pro vš. $a, b, c \in \mathbb{F}$ platí: $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (pravý distributivní zákon).
4. Test invertibility: pro vš. $a \in \mathbb{F}$ platí: $a \neq 0$ iff existuje a^{-1}.

Příklady

1. Množiny $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se standardním sčítáním a násobením jsou tělesa.
2. Množina $\mathbb{Z}$ se standardním sčítáním a násobením není těleso.
3. Množiny $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ jsou tělesa (sčítáme a násobíme jako zbytky po dělení 2, resp. 3).

   Obecněji: množina $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, kde p je prvočíslo, je těleso, pokud čísla sčítáme a násobíme jako zbytky po dělení p.

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$)

Lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina L spolu se dvěma funkcemi

$$+ : L \times L \to L, \quad \cdot : \mathbb{F} \times L \to L$$

pro které platí následující:

1. Vlastnosti sčítání:
    1. Existuje $\vec{o} \in L$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{x} = \vec{x}$ (existence nulového vektoru).
    2. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$ platí: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita sčítání vektorů).
    3. Pro vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita sčítání vektorů).
    4. Pro vš. $\vec{x} \in L$ existuje právě jeden $\vec{y} \in L$ tak, že $\vec{x} + \vec{y} = \vec{o}$ (existence opačného vektoru, značíme $\vec{y} = -\vec{x}$).

Definice (lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$), pokrač.

2. Vlastnosti násobení skalárem:
   1. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ (násobení jednotkovým skalárem).
   2. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$ (asociativita násobení skalárem).
3. Distributivní zákony:
   1. Pro vš. $a, b \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x} \in L$ platí: $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$ (distributivita součtu skalárů).
   2. Pro vš. $a \in \mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}, \vec{y} \in L$ platí: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ (distributivita součtu vektorů).

Poznámka

Axiomy tří typů: chování operace $+$, chování operace $\cdot$ a vzájemný vztah obou operací.

Definice je formálně stejná jako pro lineární prostor nad $\mathbb{R}$. Jediná změna: těleso $\mathbb{R}$ je nahrazeno obecným tělesem $\mathbb{F}$.

Příklady lineárních prostorů nad obecným tělesem $\mathbb{F}$

1. Prostory $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$, $n \geq 1$. Vektory jsou uspořádané n-tice prvků $\mathbb{F}$, psané do sloupce. Skaláry jsou prvky tělesa $\mathbb{F}$.

   Například: v $(\mathbb{Z}_7)^2$ je vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, v $\mathbb{Q}^3$ je vektor $\begin{pmatrix} 2.14 \\ -21.7 \\ 12 \end{pmatrix}$,

   v $\mathbb{C}^2$ je vektor $\begin{pmatrix} 2-4i \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$, atd.

2. Prostory $\mathbb{F}[x]$ polynomů v neurčité x s koeficienty z tělesa $\mathbb{F}$. Skaláry jsou prvky tělesa $\mathbb{F}$, vektory jsou jednotlivé polynomy. Sčítání a násobení je definováno analogicky jako v $\mathbb{R}[x]$. Například: v $\mathbb{Z}_3[x]$ platí:

$$\begin{aligned} (2x+2)+(x+2) &= 1 \\ (2x+2)\cdot(x+2) &= 2x^2+1 \end{aligned}$$

Jednoduché důsledky definice

Ať L je lineární prostor. Potom:

1. Nulový vektor je jednoznačně určen.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
3. Opačný vektor k $\vec{x} \in L$ je vektor $(-1) \cdot \vec{x}$.
4. Pro vš. $a \in \mathbb{R}$ platí: $a \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Důkaz.

1. Ať existují $\vec{o_1}, \vec{o_2}$ tak, že pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} + \vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{x} = \vec{x}$ a $\vec{x} + \vec{o_2} = \vec{o_2} + \vec{x} = \vec{x}$. Pak $\vec{o_1} = \vec{o_1} + \vec{o_2} = \vec{o_2}$.
2. Pro vš. $\vec{x} \in L$ platí: $\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = (1 + 0) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + 0 \cdot \vec{x} = \vec{x} + 0 \cdot \vec{x}$. Tudíž $0 \cdot \vec{x}$ musí být nulový vektor.

Důkaz (pokrač.)

3. Platí: $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = (1-1) \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$.
4. Platí: $a \cdot \vec{o} = a \cdot (0 \cdot \vec{o}) = (a \cdot 0) \cdot \vec{o} = 0 \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

■

Velmi důležitý důsledek definice

Ať L je lineární prostor, $a \in \mathbb{F}$, $\vec{x} \in L$. Pak $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ právě tehdy, když $a = 0$ nebo $\vec{x} = \vec{o}$.

Důkaz.

Díky předchozímu stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava.
Ať $a \cdot \vec{x} = \vec{o}$ a $a \neq 0$. Potom existuje a^{-1}. Tudíž
$\vec{o} = a^{-1} \cdot \vec{o} = a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{x}) = (a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. ■

Povšimněme si:

Důkazy jsou stejné, jako v minulé přednášce!

Jaký nejobecnější výpočet lze v lineárním prostoru vykonat?

1. Například můžeme sečíst čtyři vektory: $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$.
   Díky asociativitě sčítání nemusíme psát závorky.
2. Například můžeme násobek vektoru opět vynásobit: $b \cdot (a \cdot \vec{x})$.
   Díky axiomům jde opět o násobek $(b \cdot a) \cdot \vec{x}$.
3. Obecněji, můžeme sčítat konečně mnoho násobků vektorů.
   To znamená: je-li dán konečný seznam vektorů $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a konečný seznam skalárů[a] $(a_1, \ldots, a_n)$, lze utvořit lineární kombinaci

$$a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + a_3 \cdot \vec{x}_3 + \ldots + a_n \cdot \vec{x}_n$$

značenou i $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ nebo $\sum\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} a_i \cdot \vec{x}_i$

[a] Těmto skalárům říkáme koeficienty lineární kombinace.

Definice

Seznam (také: skupina) vektorů je buď prázdná posloupnost () nebo konečná posloupnost $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Pozor: je rozdíl mezi seznamem a množinou

$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq (\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\} = \{\vec{x}_3, \vec{x}_2, \vec{x}_1\}$

$(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \neq (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ *vs.* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$

Definice (lineární kombinace konečného seznamu vektorů)

Pro seznam vektorů tvaru

1. () definujeme $\vec{o}$ jako jeho (jedinou možnou) lineární kombinaci (s prázdným seznamem koeficientů).
2. $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je vektor $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i$ jeho lineární kombinace (se seznamem koeficientů $(a_1, \ldots, a_n)$).

Příklad (geometrický význam lineární kombinace)

Pro seznam $(\mathbf{a}_1)$ v $\mathbb{R}^2$

a seznam (2.5) reálných čísel je

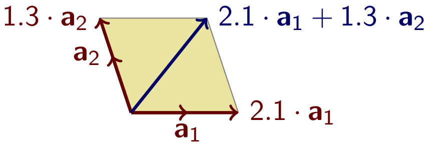
lineární kombinace.

Všechny možné lineární kombinace vektoru $\mathbf{a}_1$ vytvářejí v $\mathbb{R}^2$ přímku procházející počátkem (se směrem $\mathbf{a}_1$).

Příklad (geometrický význam lineární kombinace)

Pro seznam $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ v $\mathbb{R}^3$

a seznam $(2.1, 1.3)$ reálných čísel je



Všechny možné lineární kombinace seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ vytvářejí v $\mathbb{R}^3$ rovinu procházející počátkem (se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$).

Význam lineárních kombinací (zatím jen slogan)

Ať L je lineární prostor nad $\mathbb{F}$.

Lineární kombinace seznamu $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ v L vytvářejí „rovný kus“ prostoru L.

Tento „rovný kus“ prostoru L prochází počátkem $\vec{o}$ a má „směr“ $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$.

Příští přednáška: těmto „rovným kusům“ v L budeme říkat lineární podprostory L.

Příklad (lineární kombinace a soustavy rovnic)

Existují koeficienty x, y v $\mathbb{Z}_7$ tak, že v $(\mathbb{Z}_7)^2$ platí rovnost

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ?$$

Dva pohledy na tento problém:

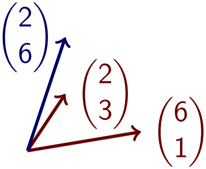
1. Hledáme prvky x, y v $\mathbb{Z}_7$ tak, že platí

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 2 \\ 3x + 1y &= 6 \end{aligned}$$

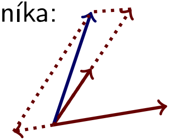
   To znamená: koeficienty lineární kombinace jsou řešením jisté soustavy lineárních rovnic nad $\mathbb{Z}_7$.

Příklad (lineární kombinace a soustavy rovnic, pokrač.)

2. Pro zadané vektory



hledáme „natažení“ červených vektorů tak, aby modrý vektor byl úhlopříčkou čtyřúhelníka:



Pozor: výše uvedený obrázek je „slogan“! Pracujeme totiž v $(\mathbb{Z}_7)^2$.

Zobecnění předchozího (zatím jen slogan)

Hledáme-li pro pevný seznam $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ a pevný vektor $\mathbf{b}$ v $\mathbb{F}^r$ reálné koeficienty x_1, ..., x_s tak, aby platila rovnost

$$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \ldots + x_s \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{b}$$

pak lze na tuto úlohu pohlížet dvěma způsoby:

1. Řešíme soustavu r lineárních rovnic o s neznámých.
2. Hledáme „natažení“ vektorů $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_s$ pomocí skalárů x_1, ..., x_s tak, aby vektor $\mathbf{b}$ tvořil úhlopříčku rovnoběžnostěnu.

Příští přednášky: druhý pohled na tuto úlohu nám dovolí vybudovat elegantní metodu řešení (Gaussovu eliminaci).