

# Lineární obal a lineární podprostor

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 1.5 a 1.6 skript  
*Abstraktní a konkrétní lineární algebra.*

## Minulá přednáška

- 1 Definice lineárního prostoru (nad obecným tělesem).
- 2 Lineární kombinace.

## Dnešní přednáška

- 1 Lineární obal množiny vektorů.
- 2 Lineární podprostor lineárního prostoru.

## Připomenutí

V lineárním prostoru můžeme zjednodušovat zápisy:

- 1 Píšeme:  $-\vec{x}$  místo  $(-1) \cdot \vec{x}$ . Jde o **opačný vektor** k vektoru  $\vec{x}$  (dokázáno minule).
- 2 Píšeme:  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n$  místo  $(\dots (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \dots + \vec{x}_{n-1}) + \vec{x}_n$ . Důvod: **asociativita sčítání vektorů**.

Lineární kombinace seznamu  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  s koeficienty  $a_1, \dots, a_n$

z tělesa  $\mathbb{F}$  je vektor  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$ .

Lineární kombinace prázdného seznamu  $()$  je nulový vektor.

## Konečné a nekonečné množiny

Připomenutí:<sup>a</sup> množina přirozených čísel  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

- 1 Množina  $M$  je **konečná**, když má přesně  $n$  prvků, kde  $n$  je nějaké přirozené číslo.

To znamená:  $M$  je konečná, když buď

$$M = \emptyset \text{ (množina } M \text{ má 0 prvků),}$$

nebo

$$M = \{x_1, \dots, x_n\}, \text{ kde } n \geq 1 \text{ je přirozené číslo (v tom případě má množina } M \text{ } n \text{ prvků).}$$

- 2 Množina  $M$  je **nekonečná**, když není konečná.

Například  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  jsou nekonečné množiny. Množina  $\mathbb{R}[x]$  je nekonečná.

---

<sup>a</sup>**Důležité:** v této přednášce **nula je přirozené číslo**.

## Definice (lineární obal množiny vektorů)

At'  $M$  je jakákoli množina vektorů lineárního prostoru  $L$ . **Lineární obal množiny vektorů**  $M$  je množina  $\text{span}(M)$ , definovaná takto:

$$\vec{x} \in \text{span}(M) \quad \text{právě tehdy, když}^a \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$$

pro nějaké  $n \geq 0$ , nějaká  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$  a nějaká  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in M$ .

<sup>a</sup>**Pozor:** prázdná lineární kombinace je rovna vektoru  $\vec{o}$ .

## Ujasnění si definice $\text{span}(M)$

$\vec{x} \in \text{span}(M)$  právě tehdy, když **existuje** nějaký seznam  $S$  vektorů z množiny  $M$  tak, že  $\vec{x}$  je roven nějaké lineární kombinaci seznamu  $S$ .

To jest:  **$\text{span}(M)$  je množina všech možných lineárních kombinací, které lze z  $M$  utvořit.**

## Příklady (viz minulé přednášky)

1 Pro  $\mathbf{a}_1$  

v  $\mathbb{R}^2$  je  $\text{span}(\{\mathbf{a}_1\})$  přímka procházející počátkem se směrem  $(\mathbf{a}_1)$ .

2 Pro  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  

v  $\mathbb{R}^3$  je  $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$  rovina procházející počátkem se směrem  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ .

Pozor: pro  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  

v  $\mathbb{R}^3$ , lineární obal  $\text{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$  **není rovina!** Jde opět o přímku. Jak poznat o co jde? Uvidíme příště.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Toto téma se zove **lineární závislost** a **lineární nezávislost**.

## Uzávěrové vlastnosti lineárního obalu

- 1 Je-li  $M \subseteq N$ , potom  $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$ .
- 2 Pro vš.  $M$  platí:  $M \subseteq \text{span}(M)$ .
- 3 Pro vš.  $M$  platí:  $\text{span}(\text{span}(M)) \subseteq \text{span}(M)$ .

### Důkaz.

Přednáška. ■

### Vysvětlení uzávěrových vlastností (slogan)

Lineárními kombinacemi tvoříme „rovne kusy“ lineárního prostoru (viz minulou přednášku).

Množina  $\text{span}(M)$  je tedy „zabalení“ množiny  $M$  tak, aby výsledkem byl „co nejmenší rovný kus“, který obsahuje  $M$ .

## Definice (lineární podprostor)

Ať  $W$  je podmnožina lineárního prostoru  $L$ . Řekneme, že  $W$  je **lineární podprostor** lineárního prostoru  $L$ , když platí  $\text{span}(W) \subseteq W$ .

## Slogan pro lineární podprostor

Podprostor je „dobrá“ podmnožina prostoru. Žádnou lineární kombinací nelze z lineárního podprostoru „utéct“.

## Tvrzení

- 1  $\text{span}(M)$  je vždy lineární podprostor. Jde o nejmenší podprostor, který obsahuje množinu  $M$ .
- 2 Množina  $M$  je lineární podprostor právě tehdy, když  $\text{span}(M) = M$ .

## Důkaz.

Přednáška.



## Tvrzení

Ať  $L$  je lineární prostor. Podmnožina  $W \subseteq L$  je lineárním podprostorem prostoru  $L$  právě tehdy, když platí:

- 1  $\vec{0}$  je prvkem  $W$  (uzavřenost  $W$  na nulový vektor).
- 2  $\vec{x} + \vec{y}$  je prvkem  $W$ , pro každé  $\vec{x}, \vec{y} \in W$  (uzavřenost  $W$  na součet vektorů).
- 3  $a \cdot \vec{x}$  je prvkem  $W$ , pro každé  $a \in \mathbb{F}$  a každé  $\vec{x} \in W$  (uzavřenost  $W$  na skalární násobek).

## Důkaz.

Přednáška. ■

## Další slogan pro lineární podprostor

Lineární podprostor vždy obsahuje nulový vektor a „vydrží“ operace součtu a skalárního násobku.

## Důležité

Ať  $W$  je lineární podprostor lineárního prostoru  $L$ . Potom množina  $W$  sama o sobě je lineárním prostorem, pokud sčítání vektorů ve  $W$  a násobení vektoru skalárem ve  $W$  definujeme **stejně** jako v prostoru  $L$ .

**Obrácené tvrzení ale neplatí:** například  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$  **není** lineárním podprostorem  $\mathbb{R}^2$ . Ale množina  $W$  spolu s operacemi

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ 1 \end{pmatrix} \quad a \odot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ 1 \end{pmatrix}$$

**tvoří** lineární prostor nad  $\mathbb{R}$ .

## Příklady

- 1 Každý lineární prostor je sám svým podprostorem.
- 2 Množina  $\{\vec{0}\}$  je vždy lineárním podprostorem.<sup>a</sup>
- 3  $\mathbb{R}^3$  je lineární prostor (operace jsou definovány po složkách).

1  $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$  je lineárním podprostorem  $\mathbb{R}^3$ .

2  $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \right\}$  není lineárním podprostorem  $\mathbb{R}^3$ .

**Pozor!** Na množině  $W_2$  lze definovat strukturu lineárního prostoru (cvičení).

---

<sup>a</sup>Tomuto podprostoru říkáme **triviální podprostor**.

## Příklady (pokrač.)

- 4 Označme jako  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 3 a jako  $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$  množinu všech reálných polynomů stupně maximálně 136.

Potom  $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$  je lineární podprostor lineárního prostoru  $\mathbb{R}^{\leq 136}[x]$ .

Obecněji: Ať  $\mathbb{F}$  je těleso. Označme jako  $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$  množinu všech polynomů nad  $\mathbb{F}$  stupně maximálně  $n$ ,  $n \geq 0$ .

Jakmile  $n \leq m$ , je  $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$  lineární podprostor lineárního prostoru  $\mathbb{F}^{\leq m}[x]$ .

- 5 Pro každé  $n \geq 0$  je  $\mathbb{F}^{\leq n}[x]$  lineární podprostor lineárního prostoru  $\mathbb{F}[x]$ .

## Vlastnosti lineárních podprostorů

Ať  $L$  je lineární prostor.

- 1 Průnik libovolného systému  $\{W_i \mid i \in I\}$  podprostorů prostoru  $L$  je lineárním podprostorem prostoru  $L$ .
- 2 Sjednocení systému  $\{W_i \mid i \in I\}$  lineárních podprostorů prostoru  $L$  obecně lineárním podprostorem prostoru  $L$  není.

### Důkaz.

Přednáška. ■

### Definice (spojení lineárních podprostorů)

Ať  $\{W_i \mid i \in I\}$  je systém lineárních podprostorů prostoru  $L$ .

Lineárnímu podprostoru  $\text{span}(\bigcup_{i \in I} W_i)$  prostoru  $L$  říkáme **spojení** podprostorů  $W_i$ ,  $i \in I$ , a značíme jej<sup>a</sup>

$$\bigvee_{i \in I} W_i$$

<sup>a</sup>V případě dvou podprostorů používáme i značení  $W_1 \vee W_2$ .

## Klasifikace lineárních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^3$

Všechny podprostory  $\mathbb{R}^3$  jsou buď

- 1 Jednoprvková množina obsahující pouze počátek.

nebo

- 2 Každá přímka procházející počátkem.

nebo

- 3 Každá rovina procházející počátkem.

nebo

- 4 Celá množina  $\mathbb{R}^3$ .

### Důkaz.

V každém z uvedených bodů je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{R}^3$ .  
To, že žádné jiné lineární podprostory prostoru  $\mathbb{R}^3$  neexistují, ukážeme později.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Budeme k tomu potřebovat pojem **dimense**.