Lineární závislost a nezávislost

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 3.1 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Lineární kombinace.
2. Definice lineárního obalu.
3. Definice lineárního podprostoru.

Dnešní přednáška

1. Lineární závislost/nezávislost seznamu a množiny vektorů v lineárním prostoru.

Připomenutí

1. Pro

   v $\mathbb{R}^3$ je $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina procházející počátkem se směrem $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$.

2. Pro

   v $\mathbb{R}^3$, lineární obal $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\})$ rovina není.

   V množině $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ je (například) vektor $\mathbf{a}_2$ „zbytečný vzhledem k tvorbě lineárních kombinací“.[a]

   Platí totiž $\mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}) = \mathrm{span}(\{\mathbf{a}_1\})$.

[a] Za chvíli budeme říkat, že množina $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ je lineárně závislá.

Definice

Lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$ je triviální, pokud $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
V opačném případě je lineární kombinace $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n$ netriviální.

Poznámky

1. Triviální lineární kombinace je vždy rovna nulovému vektoru: rovnost $0 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$ platí, protože $0 \cdot \vec{x} = \vec{o}$, pro jakýkoli vektor $\vec{x}$ (dokázáno minule).
2. I netriviální lineární kombinace může být rovna nulovému vektoru: například $\vec{x} - \vec{x} = \vec{o}$, pro jakýkoli vektor $\vec{x}$.
3. Lineární kombinaci, která dává nulový vektor, také říkáme nulová kombinace.[a]

---

[a] Pozor: triviální kombinace je vždy nulová. Nulová kombinace nemusí být triviální.

Definice (lineární nezávislost seznamu vektorů)

Řekneme, že seznam S vektorů je lineárně nezávislý, pokud platí jedna z podmínek:

1. Seznam S je prázdný.
2. Seznam S je tvaru $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ a platí: kdykoli $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, pak $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Řekneme, že seznam S je lineárně závislý, pokud není lineárně nezávislý.

Příklady

1. Prázdný seznam () je vždy lineárně nezávislý.
2. Seznam $(\vec{o})$ je vždy lineárně závislý.
3. Seznam, ve kterém se opakuje vektor, je vždy lineárně závislý.

Příklad

Nulová lineární kombinace $x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \ldots x_s \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{o}$ v $\mathbb{F}^r$, kde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{a}_s = \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{rs} \end{pmatrix}$$

kóduje soustavu r lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_s a_{1s} & = & 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_s a_{2s} & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_1 a_{r1} + x_2 a_{r2} + \cdots + x_s a_{rs} & = & 0 \end{array}$$

o s neznámých nad $\mathbb{F}$.

Seznam $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když tato soustava má pouze triviální řešení $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 0$.

Definice (lineární nezávislost množiny vektorů)

Ať M je množina vektorů v lineárním prostoru L. Řekneme, že M je lineárně nezávislá, pokud platí jedna z následujících podmínek:

1. Množina M je prázdná.
2. $M = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ je neprázdná konečná množina a navíc platí: kdykoli $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, pak $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.
3. M je nekonečná množina a každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá.

Řekneme, že množina M je lineárně závislá, pokud není lineárně nezávislá.

Praktický test lineární nezávislosti neprázdné množiny M

Musí platit následující implikace:

> Ať $a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_n \cdot \vec{x}_n = \vec{o}$, kde $n > 0$ je přirozené číslo, vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou z M a skaláry $a_1, \dots, a_n$ jsou z $\mathbb{F}$. Potom $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Příklady

1. $\{\vec{o}\}$ je lineárně závislá množina v jakémkoli lineárním prostoru L.

   Obecněji: ať $\vec{o} \in M$, potom M je lineárně závislá množina.

2. Množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ je lineárně nezávislá množina v $\mathbb{R}^3$.

   Obecněji: definujte pro $i = 1, \dots, n$, vektor $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ jako n-tici mající na i-té posici 1 a všude jinde 0. Potom $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ je lineárně nezávislá množina v $\mathbb{R}^n$.

3. Nekonečná množina $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ je lineárně nezávislá množina v prostoru polynomů $\mathbb{R}[x]$.

Příklady (pokrač.)

4. Množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$ je lineárně závislá množina v $\mathbb{R}^3$.

   Důvod:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tvrzení

Ať M je lineárně nezávislá množina vektorů v lineárním prostoru L. Jakmile $N \subseteq M$, je i N lineárně nezávislá množina vektorů.

Důkaz.

Přednáška. ■

Slogan

Ubereme-li z lineárně nezávislé množiny vektorů nějaké vektory, je výsledná množina opět lineárně nezávislá.

Tvrzení

Ať M je lineárně závislá množina vektorů v lineárním prostoru L. Jakmile N je množina vektorů z L a platí $M \subseteq N$, je i N lineárně závislá množina vektorů.

Důkaz.

Přednáška. ■

Slogan

Přidáme-li do lineárně závislé množiny vektorů nějaké vektory, je výsledná množina opět lineárně závislá.

Věta (charakterisace lineárně nezávislých množin)

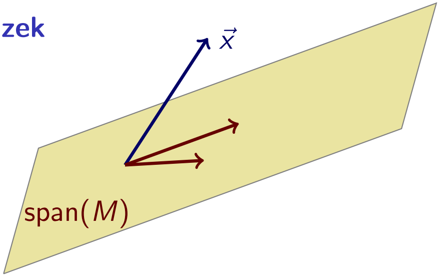
Pro množinu M vektorů z lineárního prostoru L jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Množina M je lineárně nezávislá.
2. Pro každý vektor $\vec{x} \notin \mathrm{span}(M)$ je množina $M \cup \{\vec{x}\}$ lineárně nezávislá.

Důkaz.

Přednáška. ■

Ilustrační obrázek



Věta (charakterisace lineárně závislých množin)

Pro množinu M vektorů z lineárního prostoru L jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Množina M je lineárně závislá.
2. Existuje $\vec{v} \in M$ tak, že $\operatorname{span}(M \setminus \{\vec{v}\}) = \operatorname{span}(M)$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Ilustrační obrázek