Souřadnice vzhledem k uspořádané bázi a komutativní diagramy

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 3.1–3.3 a 2.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Báze lineárního (pod)prostoru.

   Intuitivní význam: báze je výběr systému souřadnicových os.

2. Dimense lineárního (pod)prostroru.

   Intuitivní význam: dimense je počet souřadnicových os.

Dnešní přednáška

1. Souřadnice vektoru vzhledem k uspořádané bázi.

   Intuitivní význam: souřadnice vektoru udávají „úseky“ vektoru na jednotlivých souřadnicových osách.

2. Ukážeme velmi užitečný pohled na zobrazení (funkce): kalkulus komutativních diagramů.

Věta (existence souřadnic vzhledem k uspořádané bázi)

Ať seznam $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ tvoří bázi lineárního prostoru L. Pro každý vektor $\vec{x}$ v L existuje jediný seznam $(a_1, \ldots, a_n)$ prvků $\mathbb{F}$ tak, že $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{b}_1 + \cdots + a_n \cdot \vec{b}_n$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Definice (souřadnice vzhledem k uspořádané bázi)

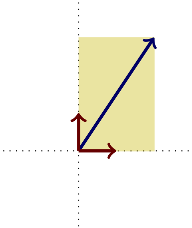
Seznamu $(a_1, \ldots, a_n)$ z předchozí věty říkáme souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k uspořádané bázi $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$. Značení:[a]

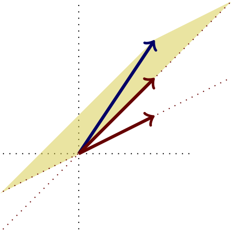
$$\mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

[a] Tj, souřadnice vektoru $\vec{x}$ chápeme jako další vektor: vektor souřadnic v $\mathbb{F}^n$.

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy $K_2 = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$, $B = (\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix})$ jsou uspořádané báze prostoru $\mathbb{R}^2$. (Seznam K_2 je kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^2$.)





$$\mathbf{coord}_{K_2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{coord}_{B}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

Důležitá vlastnost kanonické báze

Připomenutí: prostor $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$ má kanonickou bázi $K_n = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, kde

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ať $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je vektor v $\mathbb{F}^n$. Potom $\mathbf{coord}_{K_n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Příklad (souřadnice stejného vektoru k různým bázím)

Seznamy

$$B_1 = (1, x, x^2) \qquad B_2 = (x^2, x, 1)$$

jsou uspořádané báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ reálných polynomů stupně nejvýše 2.

Platí:

$$\mathbf{coord}_{B_1}(3x^2-2x+4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{coord}_{B_2}(3x^2-2x+4) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3x^2-2x+4 = 4\cdot 1+(-2)\cdot x+3\cdot x^2, \quad 3x^2-2x+4 = 3\cdot x^2+(-2)\cdot x+4\cdot 1$$

Tvrzení (linearita výpočtu souřadnic)

Ať B je (jakákoli) konečná uspořádaná báze lineárního prostoru L. Potom pro zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$ platí:[a]

1. $\mathbf{coord}_B(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + \mathbf{coord}_B(\vec{y})$.
2. $\mathbf{coord}_B(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x})$.

[a] Tyto dvě vlastnosti jsou velmi důležité. Příště je budeme studovat abstraktně (vedou k pojmu lineárního zobrazení).

Důkaz.

Přednáška. ■

Důsledek: důležitá vlastnost každé uspořádané báze

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze prostoru L.
Potom platí:

$$\mathbf{coord}_B(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{coord}_B(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ \mathbf{coord}_B(\vec{b}_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obecně platí:

$$\mathbf{coord}_B\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{b}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{b}_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Několik připomenutí

1. Zadat zobrazení (také: funkci) $f : X \to Y$ znamená: pro každé $x \in X$ zadat právě jedno $y \in Y$. Toto y značíme $f(x)$ (funkční hodnota v x).
   Píšeme[a] i $x \mapsto f(x)$, $f : x \mapsto f(x)$.
2. Pro zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ značíme $g \cdot f : X \to Z$ složené zobrazení $x \mapsto g(f(x))$.

[a] Důležité je rozlišovat: šipka $f : X \to Y$ versus šipka s patkou $x \mapsto f(x)$.

Poznámky

- Slova *funkce* a *zobrazení* znamenají totéž.
- Skládání zobrazení značíme stejně jako násobení (tj. tečkou). Uvidíme později, že skládání zobrazení skutečně je jistý druh násobení.

Několik připomenutí (pokrač.)

3. Přesná definice zobrazení $f : A \to B$ zní:

   Zobrazení $f : A \to B$ je podmnožina $A \times B$ taková, že pro všechna $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ tak, že $(a, b) \in f$.

   Potom lze dokázat:

   1. Pro libovolnou množinu B existuje právě jedno zobrazení $f : \emptyset \to B$.
   2. Pro libovolnou množinu A existuje právě jedno zobrazení $f : A \to \{b\}$.
   3. Je-li A neprázdná množina, pak neexistuje zobrazení $f : A \to \emptyset$.

Několik připomenutí (pokrač.)

4. Komutativní trojúhelník:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

znamená $h = g \cdot f$, tj. $h(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in X$.

5. Komutativní čtverec:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "k"'] & Y \end{tikzcd}$$

znamená $h \cdot f = k \cdot g$, tj. $h(f(x)) = k(g(x))$ pro všechna $x \in A$.

Několik připomenutí (pokrač.)

6. „Slepování“ komutativních diagramů:[a]

jestliže
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "x"'] & Y \end{tikzcd}$$
a
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$
jsou komutativní,

pak je i
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[rr, bend left, "g\cdot f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[r, "x"'] \arrow[rr, bend right, "y\cdot x"'] & Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$
komutativní.

[a] Důležité: projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 skript.

Několik připomenutí (pokrač.)

7. „Trhání“ komutativních diagramů:[a]

Jestliže je
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\cdot f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[r, "x"'] \arrow[rr, bend right, "y\cdot x"'] & Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$
komutativní,

pak ani
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "x"'] & Y \end{tikzcd}$$
ani
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[d, "c"] \\ Y \arrow[r, "y"'] & Z \end{tikzcd}$$

komutativní být nemusí.

[a] Důležité: projděte si podrobně Příklady 2.2.1–2.2.3 skript.

Několik připomenutí (pokrač.)

8. Zobrazení $f : X \to Y$ je prosté (také: injektivní nebo injekce), když z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$.
9. Zobrazení $f : X \to Y$ je na (také: surjektivní nebo surjekce), když pro každé $y \in Y$ existuje x tak, že $f(x) = y$.
10. Zobrazení $f : X \to Y$ je bijekce (také: vzájemně jednoznačné), když f je injekce a surjekce současně.

Známá fakta

1. Identita na X, tj. $\mathrm{id}_X : X \to X$, kde $\mathrm{id}_X : x \mapsto x$, je bijekce.
2. Platí $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$ a $\mathrm{id}_Y \cdot f = f = f \cdot \mathrm{id}_X$, kdykoli je skládání definováno.
3. Složení injekcí je injekce, složení surjekcí je surjekce, složení bijekcí je bijekce.
4. $f : X \to Y$ je bijekce právě tehdy, když existuje jednoznačně určené[a] $g : Y \to X$ tak, že $g \cdot f = \mathrm{id}_X$ a $f \cdot g = \mathrm{id}_Y$.

[a] Tomuto jednoznačně určenému zobrazení se říká inverse zobrazení f a značí se také f^{-1}.