Lineární zobrazení, část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 2.3, 3.4 a 9.1 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s)$ (sloupcový zápis matice, každý sloupec $\mathbf{a}_j$ je vektor z $\mathbb{F}^r$) je ztotožněna s lineárním zobrazením $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$, $\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{a}_j$.

   Operace s maticemi odpovídají operacím s lineárními zobrazeními.

Dnešní přednáška

1. Pojmy jádro, obraz, defekt a hodnost lineárního zobrazení.

   Tyto pojmy umožní jemnější klasifikaci lineárních zobrazení.

2. Pojem matice obecného lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k obecným uspořádaným bázím. Prostory L_1 a L_2 musí mít konečnou dimensi.

Připomenutí (témata 4A a 3B)

1. Ať L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$, pro které platí $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{x}') = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{x}')$ a $\mathbf{f}(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \mathbf{f}(\vec{x})$ pro vš. a z $\mathbb{F}$ a vš. $\vec{x}$, $\vec{x}'$ z L_1, říkáme lineární zobrazení z L_1 do L_2.
2. Zápis $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ znamená[a] $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j$-tý sloupec $\mathbf{A}$.
   Tudíž platí $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{F}^s$.
3. Trojúhelník

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^s \arrow[rr, "\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}"] \arrow[dr, "\mathbf{A}"'] & & \mathbb{F}^r \\
& \mathbb{F}^p \arrow[ur, "\mathbf{B}"'] &
\end{tikzcd}$$

   je komutativní.

[a] V terminologii dnešní přednášky: $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ je maticí zobrazení $\mathbf{A} : \mathbf{e}_j \mapsto j$-tý sloupec $\mathbf{A}$ vzhledem ke kanonické bázi. Ale nepředbíhejme

Definice (speciální vlastnosti lineárních zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ říkáme:

1. monomorfismus, je-li $\mathbf{f}$ injektivní (také: prosté) zobrazení.
2. epimorfismus, je-li $\mathbf{f}$ surjektivní (také: na) zobrazení.
3. isomorfismus, je-li $\mathbf{f}$ bijektivní (také: prosté a na) zobrazení.[a]

[a] Ekvivalentně: k zobrazení $\mathbf{f}$ existuje inversní zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$ a toto inversní zobrazení je opět lineární.

Tvrzení

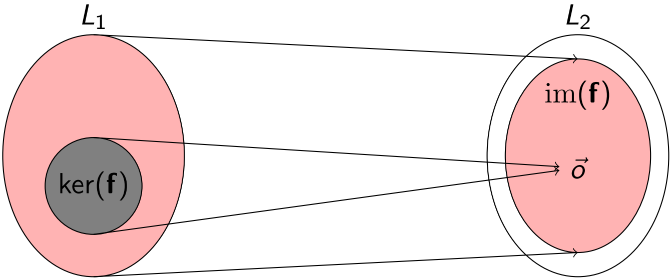
Složení monomorfismů/epimorfismů/isomorfismů je monomorfismus/epimorfismus/isomorfismus. Identita je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška.

Definice (obraz a jádro)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množině $\ker(\mathbf{f}) = \{\vec{x} \mid \mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{o}\}$ říkáme jádro $\mathbf{f}$, množině $\mathrm{im}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{f}(\vec{x}) \mid \vec{x} \text{ z } L_1\}$ říkáme obraz $\mathbf{f}$.



Slogany (tj. reklamní hesla, nikoli skutečnost)

Jádro $\mathbf{f}$ říká, jak moc je $\mathbf{f}$ monomorfismus.
Obraz $\mathbf{f}$ říká, jak moc je $\mathbf{f}$ epimorfismus.

Tvrzení

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Pak $\ker(\mathbf{f})$ je podprostor L_1, $\mathrm{im}(\mathbf{f})$ je podprostor L_2.[a]

[a] Obecněji: $\{\mathbf{f}(\vec{w}) \mid \vec{w} \in W\}$ je podprostor L_2, pro jakýkoli podprostor W prostoru L_1.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Definice (defekt a hodnost lineárního zobrazení)

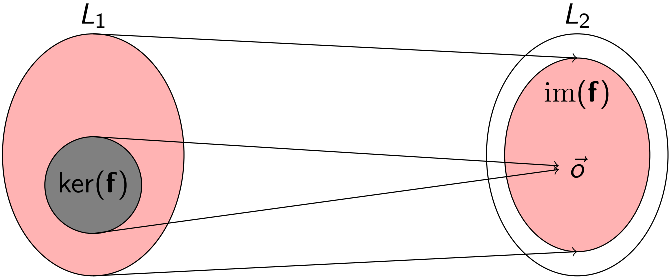
Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Číslu $\mathrm{def}(\mathbf{f}) = \dim(\ker(\mathbf{f}))$ říkáme defekt lineárního zobrazení $\mathbf{f}$ a číslu $\mathrm{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\mathrm{im}(\mathbf{f}))$ říkáme hodnost (také: rank) lineárního zobrazení $\mathbf{f}$.

Tvrzení (Věta o dimensi jádra a obrazu)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Pak $\mathrm{def}(\mathbf{f}) + \mathrm{rank}(\mathbf{f}) = \dim(L_1)$.

Důkaz.

Bez důkazu (důkaz je například ve skriptech, Věta 3.3.6).



$\mathrm{def}(\mathbf{f}) = \dim(\mathrm{ker}(\mathbf{f}))$ $\quad$ $\mathrm{rank}(\mathbf{f}) = \dim(\mathrm{im}(\mathbf{f}))$ ∎

Tvrzení (charakterisace monomorfismů)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Pak je ekvivalentní:

1. $\mathbf{f}$ je monomorfismus.
2. $\mathrm{def}(\mathbf{f}) = 0$.
3. $\mathbf{f}$ respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina).

Důkaz.

Přednáška. ∎

Důsledek (monomorfismy a soustavy rovnic)

$\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ je monomorfismus právě tehdy, když soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$ má pouze triviální řešení.

Tvrzení (charakterisace isomorfismů)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor L_1 má konečnou dimensi. Pak je ekvivalentní:

1. $\mathbf{f}$ je isomorfismus.
2. $\mathbf{f}$ je monomorfismus a epimorfismus současně.
3. $\operatorname{def}(\mathbf{f}) = 0$ a $\operatorname{im}(\mathbf{f}) = L_2$ současně.
4. $\operatorname{def}(\mathbf{f}) = 0$ a $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.
5. $\mathbf{f}$ respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina) a každá rovnice $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ má alespoň jedno řešení.

Důkaz.

Přednáška. $\blacksquare$

Důsledek (isomorfismy a soustavy rovnic)

$\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ je isomorfismus právě tehdy, když $s = r$ a každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení.

Definice (regulární a singulární matice)

Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ typu je regulární (také: invertibilní, také: isomorfismus), pokud existuje jednoznačně určená matice $\mathbf{A}^{-1}$ taková, že platí rovnosti $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Matici $\mathbf{A}^{-1}$ říkáme inverse matice $\mathbf{A}$.
Matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je singulární, pokud není regulární.

Příklad (rotace o úhel α v $\mathbb{R}^2$ je isomorfismus)

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je regulární (invertibilní) matice.[a]

[a] Inversním zobrazením rotace o úhel α je rotace o úhel $-\alpha$.

Důsledek (isomorfismy prostorů konečné dimense)

Ať $\dim(L_1) = \dim(L_2) = n$. Potom je, pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$, ekvivalentní:

1. $\mathbf{f}$ je monomorfismus.
2. $\mathbf{f}$ je epimorfismus.
3. $\mathbf{f}$ je isomorfismus.

Příklad (důležité a užitečné: Lagrangeova interpolace)

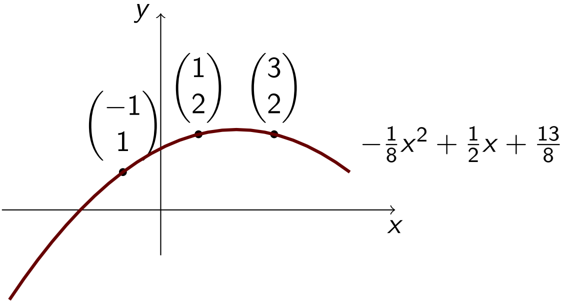
Ať $a_1, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá reálná čísla. Lineární zobrazení

$$\mathbf{ev}_{(a_1,\ldots,a_n)} : \mathbb{R}^{\leq n-1}[x] \to \mathbb{R}^n, \quad p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ \vdots \\ p(a_n) \end{pmatrix}$$

je monomorfismus, tudíž isomorfismus.

Příklad (Lagrangeova interpolace, pokrač.)

$\mathbf{ev}_{(a_1,\dots,a_n)}$ je isomorfismus: pro každou n-tici $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^n$ existuje jediný polynom[a] $p_{(b_1,\dots,b_n)}(x)$ v prostoru $\mathbb{R}^{\leq n-1}[x]$ tak, že platí $p_{(b_1,\dots,b_n)}(a_i) = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$.



[a] Říká se mu Lagrangeův interpolační polynom, viz skripta, Příklad 3.3.9.

Tvrzení (důležité)

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je uspořádaná báze prostoru L. Potom výpočet souřadnic v bázi B

$$\mathbf{coord}_B : L \to \mathbb{F}^n, \quad \vec{x} \mapsto \mathbf{coord}_B(\vec{x})$$

je isomorfismus.

Důkaz.

Přednáška. ■

Poznámka (důležitá)

Protože isomorfní lineární prostory se z abstraktního hlediska nijak neliší, vidíme: až na isomorfismus neexistují jiné konečně dimensionální lineární prostory nad $\mathbb{F}$ než prostory tvaru $\mathbb{F}^n$.

Definice (matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Matice zobrazení $\mathbf{f}$ (vzhledem k B a C) je taková matice $\mathbf{A_f}$, pro kterou platí

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r \\ L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \end{tikzcd}$$

neboli:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{coord}_B(\vec{x}) \arrow[r, mapsto] & \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{x})) \\ \vec{x} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \mathbf{f}(\vec{x}) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

pro každý vektor $\vec{x}$.

Tvrzení (výpočet matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Potom matice $\mathbf{A_f}$ má r řádků a s sloupců. Navíc j-tý sloupec matice $\mathbf{A_f}$ je tvořen souřadnicemi $\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.

Důkaz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_j \arrow[rrr, mapsto] & & & j\text{-tý sloupec } \mathbf{A_f} = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j)) \\
& \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r & \\
& L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] & \\
\vec{b}_j \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & \mathbf{f}(\vec{b}_j) \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

■

Věta (matice složeného zobrazení)

Ať L_1, L_2, L_3 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$, $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_p)$ a $D = (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_r)$. Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ a $\mathbf{g} : L_2 \to L_3$ jsou lineární zobrazení s maticemi $\mathbf{A}_\mathbf{f}$ (vzhledem k B a C) a $\mathbf{A}_\mathbf{g}$ (vzhledem k C a D). Potom $\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} : L_1 \to L_3$ má matici $\mathbf{A}_\mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f}$ (vzhledem k B a D).

Důkaz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_\mathbf{g} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^p \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{g} \cdot \mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \arrow[r, "\mathbf{g}"'] & L_3 \arrow[u, "\mathbf{coord}_D"']
\end{tikzcd}
$$

Věta (matice isomorfismu)

Ať L_1, L_2 mají uspořádané báze $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$, $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$. Ať lineární zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je isomorfismus s maticí zobrazení $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ (vzhledem k B a C). Potom existuje jednoznačně určená matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}^{-1}$ splňující rovnosti $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{f}}^{-1}$. Matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}^{-1}$ je matice $\mathbf{A}_{\mathbf{f}^{-1}}$ inversního zobrazení $\mathbf{f}^{-1}$ (vzhledem k C a B).[a]

[a] Tj. regulární (invertibilní) matice jsou přesně matice isomorfismů.

Důkaz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{A}_{\mathbf{f}^{-1}}) \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{id}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \arrow[r, "\mathbf{f}^{-1}"'] & L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"']
\end{tikzcd}
$$

Proto $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \mathbf{E}_n$. Druhá rovnost analogicky. ∎

Příklad (výpočet matice pro derivování)

$\mathbb{F}^{\leq 3}[x]$ je prostor polynomů stupně ≤ 3 nad tělesem $\mathbb{F}$. Báze $B = (x^3, x^2, x^1, 1)$. Zobrazení

$$\begin{aligned} &\mathbf{der} : \mathbb{F}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{F}^{\leq 3}[x], \\ &(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) \mapsto (3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) \end{aligned}$$

je lineární a má následující matici vzhledem k B:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice pro druhou derivaci: spočítáme součin $\mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}}$, atd.

Příklad (matice zobrazení vzhledem k nekanonické bázi)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení $\mathbf{f}$ tedy:

1. „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
2. „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

Vzhledem k nekanonické bázi $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ má tedy $\mathbf{f}$ matici

$$\mathbf{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jak spočítat matici $\mathbf{B_f}$ zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem ke kanonické bázi K_2?

Příklad (pokrač.)

Myšlenka řešení: hledaná matice $\mathbf{B_f}$ musí splňovat rovnici $\mathbf{B_f} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, kde

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rrr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{R}^2 \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{f}"'] & L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{K_2}"']
\end{tikzcd}
$$

Jak najít matice $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$? Jednoduše: jsou to matice identického zobrazení, navíc evidentně platí $\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Příklad (pokrač.)

Platí (díky tomu, co jsme již dokázali)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\mathbf{B_f} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Příští přednáška (téma 5B)

Konceptuální hledání (analogií) matic **T** a **S**: takzvané matice transformace souřadnic.