Transformace souřadnic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 9.2 a 9.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Lineární zobrazení.
2. Výpočet souřadnic vzhledem k bázi je lineární zobrazení.
3. Matice libovolného lineárního zobrazení mezi lineárními prostory konečné dimense vzhledem k pevně zvoleným bázím.

Dnešní přednáška

1. Matice transformace souřadnic v jedné bázi na souřadnice ve druhé bázi. Jde opět o matici jistého lineárního zobrazení.
2. Uvidíme, že pro stále více problémů je třeba se naučit řešit maticové soustavy.[a]

[a] Řadu příkladů tedy v této přednášce nedopočítáme až do konce.

Příští přednáška

1. Koncepčně čistý a geometricky jasný způsob řešení soustav lineárních rovnic, maticových rovnic, atd.

Připomenutí (výpočet matice lineárního zobrazení)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_r)$ jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Potom matice $\mathbf{A_f}$ má r řádků a s sloupců a j-tý sloupec matice $\mathbf{A_f}$ je tvořen souřadnicemi $\mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j))$, zapsanými do sloupce.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_j \arrow[rrr, mapsto] & & & j\text{-tý sloupec } \mathbf{A_f} = \mathbf{coord}_C(\mathbf{f}(\vec{b}_j)) \\
& \mathbb{F}^s \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^r & \\
& L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] & \\
\vec{b}_j \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & \mathbf{f}(\vec{b}_j) \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

Definice (matice transformace souřadnic)

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ jsou uspořádané báze prostoru L. Matici[a] $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$, která splňuje

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{e}_j \arrow[rrr, mapsto] & & & j\text{-tý sloupec } \mathbf{T}_{B\mapsto C} = \mathbf{coord}_C(\vec{b}_j) \\
& \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{B\mapsto C} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n & \\
& L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] & \\
\vec{b}_j \arrow[uuu, mapsto] \arrow[rrr, mapsto] & & & \vec{b}_j \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

říkáme matice transformace souřadnic z báze B do báze C (také: matice transformace souřadnic v bázi B na souřadnice v bázi C).

[a] Všimněte si značení: v dolním indexu $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$ je šipka s patkou (bázi B „posíláme“ na bázi C).

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace souřadnic)

1. Platí $\mathbf{T}_{B\mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \mathbf{coord}_C(\vec{x})$, pro každý vektor $\vec{x}$ v L. To plyne přímo z definice matice $\mathbf{T}_{B\mapsto C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x}\mapsto \mathbf{T}_{B\mapsto C}\cdot\mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\
L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"']
\end{tikzcd}$$

2. Matice $\mathbf{T}_{B\mapsto C}$ je vždy regulární. Platí $(\mathbf{T}_{B\mapsto C})^{-1} = \mathbf{T}_{C\mapsto B}$. To plyne z toho, že $\mathbf{id} : L \to L$ je isomorfismus.

Poznámky (základní vlastnosti matice transformace, pokrač.)

3. Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto B} = \mathbf{E}_n$. To je triviální:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\ L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"'] \end{tikzcd}$$

4. Platí $\mathbf{T}_{B \mapsto D} = \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C}$. To plyne z vlastností matice složeného zobrazení:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{C \mapsto D} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \\ L \arrow[u, "\mathbf{coord}_B"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_C"'] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L \arrow[u, "\mathbf{coord}_D"'] \end{tikzcd}$$

Příklad (přepočet souřadnic vzhledem k jiné bázi)

V prostoru $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ nad $\mathbb{R}$ máme uspořádané báze $B = (x^3, x^2, x, 1)$ a $C = ((x-1)^3, (x-1)^2, x-1, 1)$.

Pro polynom $p(x) = -3x^2 + 6x + 3$ z $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ hledáme $\mathbf{coord}_C(p(x))$. Víme, že $\mathbf{coord}_C(p(x)) = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{coord}_B(p(x))$.

Protože $\mathbf{coord}_B(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, stačí tedy znát[a] matici $\mathbf{T}_{B \mapsto C}$.

$$\mathbf{T}_{B \mapsto C} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

[a] Uvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1}$ lze využít blokový tvar Gaussovy eliminace:

$$(\mathbf{T}_{C \mapsto B} \mid \mathbf{E}_n) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1})$$

Příklad (přepočet souřadnic vzhledem k jiné bázi)

Jsou dány tři konečné báze B, C a D prostoru L. Spočtěte $\mathbf{coord}_B(4 \cdot \vec{x} + 12 \cdot \vec{y} + 3 \cdot \vec{z})$, pokud znáte $\mathbf{coord}_B(\vec{x})$, $\mathbf{coord}_C(\vec{y})$ a $\mathbf{coord}_D(\vec{z})$.

$$\mathbf{coord}_B(4 \cdot \vec{x} + 12 \cdot \vec{y} + 3 \cdot \vec{z}) =$$

$$4 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + 12 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{y}) + 3 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{z}) =$$

$$4 \cdot \mathbf{coord}_B(\vec{x}) + 12 \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} \cdot \mathbf{coord}_C(\vec{y}) + 3 \cdot \mathbf{T}_{D \mapsto B} \cdot \mathbf{coord}_D(\vec{z}).$$

Poznámka (konceptuální výpočet $\mathbf{T}_{B\mapsto C}$ v prostoru $\mathbb{F}^n$)

Ať $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ a $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ jsou libovolné báze prostoru $\mathbb{F}^n$.

Připomenutí: kanonická (také: standardní) báze $K_n = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{F}^n$.

1. Je snadné nalézt matice $\mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$ a $\mathbf{T}_{C\mapsto K_n}$.
    1. Do j-tého sloupce $\mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice $\mathbf{b}_j$ v kanonické bázi K_n.
    2. Do j-tého sloupce $\mathbf{T}_{C\mapsto K_n}$ napíšeme souřadnice $\mathbf{c}_j$ v kanonické bázi K_n.
2. $\mathbf{T}_{B\mapsto C} = \mathbf{T}_{K_n\mapsto C} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n} = (\mathbf{T}_{C\mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$.

Stačí tedy vyřešit[a] maticovou rovnici $\mathbf{T}_{C\mapsto K_n} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$.

---

[a] Uvidíme později, že pro nalezení matice $(\mathbf{T}_{C\mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}$ lze využít blokový tvar Gaussovy eliminace:

$$(\mathbf{T}_{C\mapsto K_n} \mid \mathbf{T}_{B\mapsto K_n}) \sim \cdots \sim (\mathbf{E}_n \mid (\mathbf{T}_{C\mapsto K_n})^{-1} \cdot \mathbf{T}_{B\mapsto K_n})$$

Příklad (nalezení báze, známe-li matici transformace)

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$. Tedy

$\mathbf{T}_{B \mapsto K_3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, kde K_3 je kanonická báze $\mathbb{R}^3$.

Nalezněte bázi $C = \left(\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} \right)$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby platila rovnost $\mathbf{T}_{B \mapsto C} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad (pokrač.)

Protože C je báze a protože K_3 je kanonická báze, víme, že platí:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{23} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C \mapsto K_3}$$

Protože platí $\mathbf{T}_{C \mapsto K_3} = \mathbf{T}_{B \mapsto K_3} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} = \mathbf{T}_{B \mapsto K_3} \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto C})^{-1}$, dosadíme a spočítáme

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Věta (změna matice zobrazení při změně bází)

Ať $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, $\dim(L_1) = n$, $\dim(L_2) = m$.
Ať B a B' jsou báze prostoru L_1 a ať C a C' jsou báze prostoru L_2.
Jestliže $\mathbf{A_f}$ je matice $\mathbf{f}$ vzhledem k B a C, pak součin
$\mathbf{T}_{C \mapsto C'} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B}$ je matice $\mathbf{f}$ vzhledem k B' a C'.

Důkaz.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{B' \mapsto B} \cdot \mathbf{x}"] \arrow[rrr, bend left, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{C \mapsto C'} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}_{B' \mapsto B} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^m \arrow[r, "\mathbf{x} \mapsto \mathbf{T}_{C \mapsto C'} \cdot \mathbf{x}"] & \mathbb{F}^m \\
L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{B'}"] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] \arrow[rrr, bend right, "\mathbf{f}"'] & L_1 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{B}"'] \arrow[r, "\mathbf{f}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{C}"'] \arrow[r, "\mathbf{id}"'] & L_2 \arrow[u, "\mathbf{coord}_{C'}"']
\end{tikzcd}
$$

$\blacksquare$

Výpočet matice lineárního zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k libovolným bázím

Ať $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ je báze L_1 a $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_m)$ je báze prostoru L_2.

Předpokládejme, že matice $\mathbf{A_f}$ zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k jistým bázím $easy_n = (\vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_n)$ a $easy_m = (\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_m)$ prostorů L_1 a L_2 se snadno určí.

1. Matice transformací souřadnic $\mathbf{T}_{B \mapsto easy_n}$ a $\mathbf{T}_{C \mapsto easy_m}$ se také určí snadno:
    1. Do j-tého sloupce matice $\mathbf{T}_{B \mapsto easy_n}$ napíšeme souřadnice vektoru $\vec{b}_j$ vzhledem k bázi $easy_n$.
    2. Do j-tého sloupce matice $\mathbf{T}_{C \mapsto easy_m}$ napíšeme souřadnice vektoru $\vec{c}_j$ vzhledem k bázi $easy_m$.
2. Platí: $\mathbf{T}_{easy_m \mapsto C} = (\mathbf{T}_{C \mapsto easy_m})^{-1}$.
3. Součin matic $\mathbf{T}_{easy_m \mapsto C} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto easy_n}$ je matice zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k bázím B a C.

Příklad (matice zobrazení vzhledem k nestandardní bázi)

Nalezněte matici **A** zobrazení **der** : $\mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ vzhledem k bázi $C = (x^3 + 3x^2, 3x^2 + 4x - 23, x - 1, 42)$.
Víme, že **der** má následující matici vzhledem k $B = (x^3, x^2, x, 1)$:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{der}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Platí:

$$\mathbf{T}_{C \mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -23 & -1 & 42 \end{pmatrix}$$

Tedy: $\mathbf{A} = \mathbf{T}_{B \mapsto C} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B} = (\mathbf{T}_{C \mapsto B})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{der}} \cdot \mathbf{T}_{C \mapsto B}$.

Závěrečné poznámky k transformaci souřadnic

1. Jakoukoli čtvercovou regulární matici $\mathbf{T}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ lze považovat za matici transformace souřadnic $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$, kde K_n je kanonická báze prostoru $\mathbb{F}^n$ a báze B je tvořena sloupci matice $\mathbf{T}$.

2. Je-li $\mathbf{A_f}$ matice zobrazení $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$ vzhledem k bázím B a C, pak matice zobrazení $\mathbf{f}$ vzhledem k nějakým bázím B' a C' má tvar $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, pro nějaké regulární matice $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$.

   Speciální případ: $L_1 = L_2$, $B = C$ a $B' = C'$. Pak matice $\mathbf{A_f}$ přejde na matici tvaru $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A_f} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Poznámky (pokrač.)

3. Řekneme, že dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ jsou si podobné (značení: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$), pokud platí rovnost $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

   Podobné matice jsou tedy ty, které popisují stejné lineární zobrazení, každá matice jej vyjadřuje v jiné bázi. To využijeme při hledání vlastních hodnot lineárních zobrazení (později).

Příklad (Připomenutí příkladu z minulé přednášky)

Lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dáno hodnotami

$$\mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zobrazení $\mathbf{f}$ tedy:

1. „Prodlužuje“ $2\times$ měřítko v ose druhého a čtvrtého kvadrantu.
2. „Zkracuje“ $3\times$ měřítko v ose prvního a třetího kvadrantu.

Příklad (pokrač.)

Vzhledem k nekanonické bázi $B = (\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ má zobrazení $\mathbf{f}$ matici

$$\mathbf{A_f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Vzhledem ke kanonické bázi K_2 lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ má zobrazení $\mathbf{f}$ matici[a]

$$\mathbf{B_f} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Platí: $\mathbf{A_f} \approx \mathbf{B_f}$.

Matice $\mathbf{A_f}$ je „přehlednější" než matice $\mathbf{B_f}$ (matice $\mathbf{A_f}$ vypovídá okamžitě o geometrické povaze zobrazení $\mathbf{f}$).

[a] Minulá přednáška.