

# GEM a soustavy lineárních rovnic, část 1

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 6 skript  
*Abstraktní a konkrétní lineární algebra.*

## Minulé přednášky

- 1 Matice jako (speciální) lineární zobrazení. Obecná lineární zobrazení lze reprezentovat maticí (vzhledem k zadaným bázím).
- 2 Algebra matic (sčítání matic, násobení matic skalárem, násobení matic mezi sebou).
- 3 Zápis  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  kóduje soustavu lineárních rovnic.

## Dnešní přednáška

- 1 Gaussova eliminační metoda (GEM) jako **universální a systematická metoda** řešení soustav lineárních rovnic (nad  $\mathbb{F}$ ).

## Příští přednáška

- 1 Maticové rovnice.
- 2 Hledání soustav, které mají zadané řešení.

## Připomenutí (maticový zápis soustavy lineárních rovnic)

Zápis  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kde  $\mathbf{A}$  je matice typu  $r \times s$  nad  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbf{x}$  je v  $\mathbb{F}^s$  a  $\mathbf{b}$  je v  $\mathbb{F}^r$ , kóduje **soustavu lineárních rovnic nad  $\mathbb{F}$** .

Terminologie:  $\mathbf{A}$  je **matice soustavy**,  $\mathbf{b}$  je **pravá strana rovnice**,  $\mathbf{x}$  je **vektor neznámých**. Matice  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  (také:  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$ ) je **rozšířená matice soustavy**.

Například

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -42 \end{pmatrix}$$

je zápis soustavy

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & -42 \end{array}$$

nad  $\mathbb{R}$ .

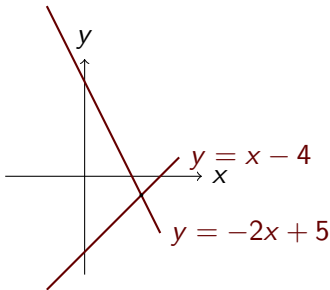
## Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav)

Pro soustavu

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

nad  $\mathbb{R}$  je řešení

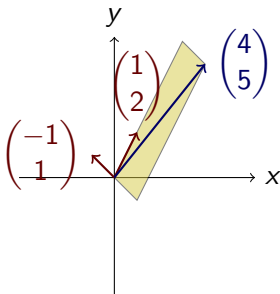
- 1 Průsečík dvou přímek:  $x - y = 4$  a  $2x + y = 5$ :



## Připomenutí (dva pohledy na řešení soustav, pokrač.)

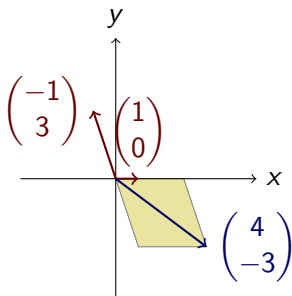
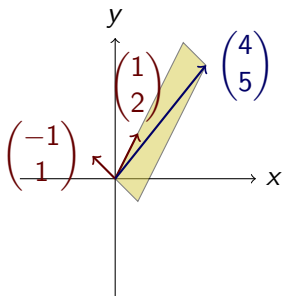
- 2 Pravá strana je lineární kombinací sloupců matice soustavy

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$



Řešení jsou koeficienty této lineární kombinace.

## Výhoda druhého pohledu na řešení soustav



lze převést isomorfismem na

Koeficienty lineární kombinace situace napravo se najdou snadno.

**Gaussova eliminační metoda** je přesně postupně převádění vhodnými isomorfismy do příjemné polohy!

## Ve zbytku přednášky

- 1 Nejprve se zaměříme na problém řešení soustav tvaru  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

**Konvence:** Nebude-li řečeno jinak, je soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  ve zbytku přednášky soustavou  $r$  rovnic o  $s$  neznámých nad  $\mathbb{F}$ .

Soustavy budeme většinou zapisovat rozšířenou maticí  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  nebo  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s \mid \mathbf{b})$ .

Zformulujeme a dokážeme důležitý výsledek: **Frobeniovu větu** o řešitelnosti soustav lineárních rovnic.

- 2 Poté vyřešíme obecný problém maticových rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ .
- 3 Jako technický prostředek použijeme **Gaussovu eliminační metodu** (zkráceně: **GEM**). GEM převádí matice (a tím i soustavy) na „příjemný“ tvar.

## Definice (horní blokový tvar matice)

Matice  $\mathbf{M}$  je v **horním blokovém tvaru**, jsou-li splněny následující dvě podmínky:<sup>a</sup>

- 1 Každý nenulový řádek matice  $\mathbf{M}$  je nad jakýmkoli řádkem samých nul.
- 2 Každý **pivot** (tj. nenulová položka první zleva) jakéhokoli nenulového řádku matice  $\mathbf{M}$  je vždy více napravo než pivot předchozího řádku.

<sup>a</sup>Pozorování:  $\mathbf{M}$  je v horním blokovém tvaru iff  $(\mathbf{M} \mid \mathbf{o})$  je v horním blokovém tvaru.

### Příklad

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 4 & 6 & 1 & 5 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{6} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{12} & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je v horním blokovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{31} & 10 & 14 & 16 & -23 & 15 & 32 \\ 0 & 0 & \mathbf{23} & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{42} & 12 & 2 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

Není v horním blokovém tvaru.



## Věta (Gaussova eliminační metoda (GEM) nad $\mathbb{F}$ )

Jakoukoli matici  $\mathbf{M}$  nad  $\mathbb{F}$  lze konečným počtem tzv. **řádkových elementárních úprav** převést na horní blokový tvar.

Řádkové elementární úpravy jsou tří typů:

- (I) Přičtení skalárního násobku řádku matice k jinému řádku matice.
- (II) Prohození dvou řádků v matici.
- (III) Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem.

### Důkaz.

Nebudeme dělat (viz **skripta**, Věta 6.3.10.). ■

### Poznámky

**GEM**: použití řádkových elementárních úprav dané matice **s cílem** zapsat danou matici v horním blokovém tvaru. Při dosažení tohoto tvaru říkáme, že **GEM skončila**.

## Příklad (Přičtení skalárního násobku řádku k řádku)

$$\text{Ať } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ a ať } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 11 & 11 & 21 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_1 \end{matrix}$$

Tudíž: přičtení skalárního násobku řádku k danému řádku je dáno isomorfismem  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , aplikovaným na čtveřici vektorů  $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$  z  $\mathbb{R}^3$ .

## Příklad (prohození dvou řádků v matici)

$$\text{Ať } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ a ať } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \\ R_2 \\ R_1 \end{matrix}$$

Tudíž: prohození dvou řádků je dáno isomorfismem  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , aplikovaným na čtveřici vektorů  $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$  z  $\mathbb{R}^3$ .

## Příklad (Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem)

$$\text{Ať } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ a ať } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ -20 & -5 & -35 & -15 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ -5R_2 \\ R_3 \end{matrix}$$

Tudíž: vynásobení řádku matice nenulovým skalárem je dáno isomorfismem  $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , aplikovaným na čtveřici vektorů  $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4)$  z  $\mathbb{R}^3$ .

## Definice (ekvivalentní soustavy)

Řekneme, že soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  a  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$   $r$  rovnic o  $s$  neznámých jsou **ekvivalentní**<sup>a</sup> (značení:  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ ), když pro každý vektor  $\mathbf{x}$  z  $\mathbb{F}^s$  platí:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  právě tehdy, když  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ .

<sup>a</sup>Slogan: Ekvivalentní soustavy **stejných** rozměrů mají stejná řešení.

## Tvrzení (základní vlastnosti ekvivalence soustav)

Platí:

- ①  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .
- ② Jestliže  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ , pak  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}') \sim (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .
- ③ Jestliže  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$  a  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}') \sim (\mathbf{A}'' \mid \mathbf{b}'')$ , pak  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}'' \mid \mathbf{b}'')$ .

Ať  $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$  je jakýkoli isomorfismus. Potom platí

- ①  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$ .
- ②  $\text{rank}((\mathbf{A} \mid \mathbf{b})) = \text{rank}((\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}))$ .

## Důkaz.

Přednáška.

## Shrnutí

Ať  $\mathbf{M}$  je jakákoli nad  $\mathbb{F}$  o  $r$  řádcích. Potom platí:

- ① Každá elementární úprava matice  $\mathbf{M}$  je dána součinem  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$  pro vhodný „elementární“ isomorfismus  $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$ .
- ② Je-li matice  $\mathbf{M}'$  horním blokovým tvarem<sup>a</sup> matice  $\mathbf{M}$ , pak
  - ① Existuje isomorfismus  $\mathbf{P} : \mathbb{F}^r \rightarrow \mathbb{F}^r$  tak, že  $\mathbf{M}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$  a  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_1$ , kde  $k$  je nějaké přirozené číslo a  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$  jsou „elementární“ isomorfismy.
  - ② Platí  $\text{rank}(\mathbf{M}) = \text{rank}(\mathbf{M}')$  a  $\text{def}(\mathbf{M}) = \text{def}(\mathbf{M}')$ .

**Speciálně:** pro  $\mathbf{M}$  ve tvaru  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  lze elementárními úpravami převést každou soustavu na horní blokový tvar  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ . Navíc platí  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ .

---

<sup>a</sup>**Důležité:** nikdy jsme neříkali, že při elementárních úpravách lze vyškrtávat nulové řádky. **Vyškrtnout nulové řádky při GEM nebudeme;** matice  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{M}'$  musí mít stejné rozměry!

## Důsledky

- 1 Pro každou matici  $\mathbf{M}$  platí  $\text{rank}(\mathbf{M}) = \text{rank}(\mathbf{M}^T)$ , kde  $\mathbf{M}^T$  je **transponovaná matice**<sup>a</sup> k matici  $\mathbf{M}$ .
- 2 Hodnost matice  $\mathbf{M}$  je rovna počtu nenulových řádků v horním blokovém tvaru po skončení GEM.
- 3 Defekt matice  $\mathbf{M}$  je roven počtu sloupců matice  $\mathbf{M}$  mínus hodnost matice  $\mathbf{M}$ .

---

<sup>a</sup>Matice  $\mathbf{M}^T$  má jako své sloupce původní řádky matice  $\mathbf{M}$  zapsané ve stejném pořadí. Například pro

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

je

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

## Věta (Frobenius)

- 1 Soustava  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  má řešení právě tehdy, když platí rovnost  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .
- 2 Pokud  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  má řešení, potom lze říci následující:<sup>a</sup>  
Zvolme jakékoli  $\mathbf{p}$ , splňující rovnost  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$ .  
Potom  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$  platí právě tehdy, když  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{p} + \mathbf{x}_h$  pro nějaké  $\mathbf{x}_h \in \ker(\mathbf{A})$ .

---

<sup>a</sup>Budeme používat i **zkrácený a přehledný zápis**: množinu všech řešení lze napsat jako  $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{p} + \mathbf{x}_h \mid \mathbf{x}_h \in \ker(\mathbf{A})\}$ , kde  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$ .

### Důkaz.

- 1  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  má řešení právě tehdy, když  $\mathbf{b}$  je v  $\text{im}(\mathbf{A})$ . To nastane právě tehdy, když  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ . Viz str 12, téma 3A.
- 2 Triviální.



## Základní myšlenky řešení soustavy ( $\mathbf{A} \mid \mathbf{b}$ )

- 1  $\ker(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}\}$  je lineární podprostor prostoru  $\mathbb{F}^s$ .  
Tudíž pro vyřešení  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$  stačí najít bázi  $\ker(\mathbf{A})$ . Tato báze má přesně  $\text{def}(\mathbf{A})$  prvků.

Jakékoli bázi prostoru  $\ker(\mathbf{A})$  budeme říkat **fundamentální systém soustavy** s maticí  $\mathbf{A}$ .

- 2 Soustavě  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o})$  budeme říkat **homogenní soustava** příslušná k matici  $\mathbf{A}$ .

Jakékoli řešení homogenní soustavy je tedy lineární kombinací prvků fundamentálního systému.

- 3 Jakékoli řešení soustavy lze vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{p} + \mathbf{x}_h$ , kde  $\mathbf{x}_h$  je v  $\ker(\mathbf{A})$  a  $\mathbf{p}$  je **jakékoli** řešení původní soustavy (takzvané **partikulární řešení**).

## Jak vyřešit homogenní soustavu $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o})$

- 1 GEM:  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{o}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$ .
- 2 Víme:  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}')$  a matice  $\mathbf{A}'$  je v horním blokovém tvaru. Tudíž známe defekt matice  $\mathbf{A}$ :  
 $d = \text{def}(\mathbf{A}) = s - \text{rank}(\mathbf{A}) = s - \text{rank}(\mathbf{A}')$ .
- 3 Báze prostoru  $\ker(\mathbf{A})$  musí mít  $d$  prvků. Tudíž  $d$  hodnot v každém řešení lze zvolit (jde o posice, na kterých nejsou pivoty matice  $\mathbf{A}'$ ). Touto volbou zajistíme lineární nezávislost. Dalších  $s - d$  hodnot lze spočítat z nenulových rovnic v soustavě  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{o})$  zpětným dosazením.

## Jak nalézt partikulární řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$

- 1 GEM:  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ .
- 2  $d$  hodnot v partikulárním řešení lze zvolit (jde o posice, na kterých nejsou pivoty matice  $\mathbf{A}'$ ).
- 3 Zpětné dopočtení z nenulových rovnic soustavy  $(\mathbf{A}' \mid \mathbf{b}')$ .

## Příklad (ukázka systematického řešení soustavy nad $\mathbb{R}$ )

Nad  $\mathbb{R}$  vyřešte:  $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$  (maticově:  $(2 \ 3 \ -4 \mid 2)$ ).  
Pro matici soustavy  $\mathbf{A} = (2 \ 3 \ -4)$  platí rovnosti  $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1$  a  $\text{def}(\mathbf{A}) = 2$ . **Pivot je na první pozici:** volit budeme vždy druhou a třetí položku, první položku **dopočteme**.

- 1 Příslušná homogenní rovnice:  $(2 \ 3 \ -4 \mid 0)$ .

Fundamentální systém:  $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- 2 Partikulární řešení pro  $(2 \ 3 \ -4 \mid 2)$ :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- 3 Celkové řešení:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

## Příklad (geometrický význam postupu řešení soustavy)

Rovnice  $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$  v  $\mathbb{R}^3$  popisuje rovinu  $\rho$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Tato rovina  $\rho$  je v **obecné poloze** (rovina  $\rho$  neprochází počátkem, protože  $2 \neq 0$ ).

- 1 Homogenní rovnice  $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0$  je **paralelní posunutí** roviny  $\rho$  tak, aby výsledná rovina  $\rho_h$  **procházela počátkem**.

Fundamentální systém  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  je **systém souřadnic** v rovině  $\rho_h$ .

- 2 Partikulární řešení rovnice  $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$  je **libovolný bod  $\mathbf{p}$  v původní rovině  $\rho$** .
- 3 Zápis  $\mathbf{p} + \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  obecného řešení vyjadřuje **opětovné paralelní posunutí** roviny  $\rho_h$  zpět do roviny  $\rho$ .

## Poznámka

Stejnou geometrickou představu je třeba mít pro řešení obecné soustavy  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$  nad  $\mathbb{F}$ .

## Příklad (systematické řešení komplikovanější soustavy nad $\mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & 12 \end{array} \right) & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array} \\
 & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} R_1 \\ -1/2R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 \end{array} \\
 & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ 1/2R_3 \\ R_4 - R_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

**Důležité:** povšimněme si značení řádkových úprav; **úpravy budeme vždy takto vyznačovat.**

## Příklad (pokrač.)

Po skončení GEM  $\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$  jsou pivoty na čtvrté,

druhé a první posici. Tyto položky v řešení budeme **dopočítávat**,  
třetí položku řešení budeme **volit**.

Řešení je:  $\begin{pmatrix} \frac{33}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , kde  $a \in \mathbb{R}$ .

Zkrácený zápis:  $\begin{pmatrix} \frac{33}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \text{span}\left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Řešením soustavy je **přímka** v  $\mathbb{R}^4$ .