

GEM a soustavy lineárních rovnic, část 2

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 6 a 7.1
skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

- 1 Gaussova eliminační metoda (GEM) jako **universální a systematická metoda** řešení soustav lineárních rovnic (nad \mathbb{F}).

Dnešní přednáška

- 1 Lineární maticové rovnice.
- 2 Hledání soustav, které mají zadané řešení.

Příklad

Nalezněte všechny matice \mathbf{X} , které splňují rovnost^a

$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$, kde $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je matice rotace o úhel α ,
 $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Rozměrová zkouška: musí platit $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Rešenými jsou například matice \mathbf{E}_2 , $\mathbf{O}_{2,2}$ a \mathbf{R}_α .

Jak nalézt **všechna** řešení? Předvedeme **universální** metodu.

1 Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Potom

$$\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x_{11} - \sin \alpha \cdot x_{21} & \cos \alpha \cdot x_{12} - \sin \alpha \cdot x_{22} \\ \sin \alpha \cdot x_{11} + \cos \alpha \cdot x_{21} & \sin \alpha \cdot x_{12} + \cos \alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x_{11} + \sin \alpha \cdot x_{12} & -\sin \alpha \cdot x_{11} + \cos \alpha \cdot x_{12} \\ \cos \alpha \cdot x_{21} + \sin \alpha \cdot x_{22} & -\sin \alpha \cdot x_{21} + \cos \alpha \cdot x_{22} \end{pmatrix}.$$

^a**Geometrický význam:** hledáme všechny transformace \mathbf{X} roviny, které jsou **záměnné** s rotací o úhel α .

Příklad (pokrač.)

- 2 Rovnost $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha$ je ekvivalentní rovnosti $\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{O}_{2,2}$. Stačí tedy vyřešit soustavu **čtyř** rovnic

$$\begin{array}{rcccc} & -\sin \alpha \cdot x_{21} & -\sin \alpha \cdot x_{12} & & = 0 \\ \sin \alpha \cdot x_{11} & & & -\sin \alpha \cdot x_{22} & = 0 \\ \sin \alpha \cdot x_{11} & & & -\sin \alpha \cdot x_{22} & = 0 \\ & \sin \alpha \cdot x_{21} & +\sin \alpha \cdot x_{12} & & = 0 \end{array}$$

V maticovém zápisu (po skončení GEM) máme řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \sin \alpha & 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

v závislosti na parametru $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Příklad (pokrač.)

- 3 Pro $\sin \alpha = 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a tudíž řešení je tvaru $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, kde x_{11} , x_{21} , x_{12} a x_{22} jsou libovolná reálná čísla.

Závěr: s rotací o úhel 0 nebo π je záměnná libovolná transformace roviny.

Příklad (pokrač.)

- 4 Pro $\sin \alpha \neq 0$ má soustava tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a řešení $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Závěr: s rotací \mathbf{R}_α o úhel $\alpha \notin \{0, \pi\}$ jsou záměnné transformace roviny tvaru $\mathbf{X} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

Poznámky

- 1 Předchozí metoda (rozměrová zkouška pro hledanou matici \mathbf{X} a následné řešení velké soustavy rovnic) je **universální** metodou pro řešení maticových rovnic, kde neznámá matice \mathbf{X} vystupuje pouze v první mocnině.

Jak už to u universálních metod bývá: v některých případech je taková metoda zbytečně zdlouhavá.

- 2 Předvedeme **speciální** metodu řešení maticových rovnic tvaru^a
 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$.

^aProtože rovnost $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ je ekvivalentní rovnosti $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$, získáme tak i metodu pro řešení rovnic tvaru $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Musíme ovšem obezřetně zacházet s transpozicemi matic.

Převod maticové rovnice na více soustav lineárních rovnic

Maticovou rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde matice $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \rightarrow \mathbb{F}^r$, a matice $\mathbf{B} : \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^r$, převedeme na p soustav

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad \dots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_p$$

kde $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_p)$.

- 1 Každou takovou soustavu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ vyřešíme předešlými postupy.^a
- 2 Řešení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ existuje právě tehdy, když každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ má řešení.
- 3 Pokud má každá soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ řešení, pak „sesazením“ všech řešení $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ jednotlivých soustav dostaneme řešení původní maticové rovnice: $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_p)$.

^aJak uvidíme, lze takový systém soustav řešit **simultánně**.

Příklad

Nad \mathbb{R} vyřešte rovnici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Protože $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, máme řešit **dvě** soustavy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Obě soustavy mají stejnou matici soustavy, lze je tedy řešit simultánně:

1 Simultánní GEM:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \end{array}$$

Podle Frobeniovy věty mají **obě** soustavy řešení.

Příklad (pokrač.)

- 2 Zápis $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$ kóduje dvě soustavy s řešeními (v pořadí soustav zleva doprava):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

- 3 „Sesazení řešení dohromady“: celkové řešení je tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 - 7a & -7b \\ a & b \\ -1 + 5a & 1 + 5b \end{pmatrix}$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla.

Poznámka

Víme, že pro **regulární** matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ má soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ jediné řešení, a sice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

Toto jediné řešení lze nalézt postupem, kterému se někdy říká **Gaussova-Jordanova eliminace**: eliminace řádkovými úpravami nekončí po dosažení horní trojúhelníkové matice, ale pokračuje nulováním i nad hlavní diagonálou.

Získáváme tak postup

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \sim \dots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

Speciálně: pro regulární $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ lze nalézt \mathbf{A}^{-1} postupem

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}_n) \sim \dots \sim (\mathbf{E}_n \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Více viz cvičení a **skripta**, Příklad 6.4.12.

Příklad

Nad \mathbb{R} nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

Myšlenky postupu:

- 1 Zadané řešení tvoří rovinu v \mathbb{R}^3 , která prochází bodem $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a

má „směr“ určený vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- 2 Tudíž: hledanou soustavu očekáváme ve tvaru $(a_1 \ a_2 \ a_3 \mid b)$, neboli $a_1x + a_2y + a_3z = b$.

Jak najít soustavu $(a_1 \ a_2 \ a_3 \mid b)$ systematicky?

Příklad, pokrač.

Podle Frobeniovy věty je

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

- 1 Vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ jsou lineárně nezávislé; tvoří tudíž

fundamentální systém soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$, kde $\text{def}(\mathbf{A}) = 2$ a \mathbf{A} má tři sloupce. To umožní nalézt $\mathbf{A} = (a_1 \ a_2 \ a_3)$.

- 2 Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, neboli

$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$. Matici \mathbf{A} známe, můžeme dopočítat $\mathbf{b} = (b)$.

Příklad, pokrač.

3 Nalezení \mathbf{A} :

1 Protože má platit $(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$, musí platit

$$(2 \ 0 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0.$$

2 Protože má platit $(a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$,

$$\text{musí platit } (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Tudíž $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ je fundamentální systém soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ neboli (např.) } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{A} = (2 \ -1 \ -1).$$

Příklad, pokrač.

- ④ Nalezení \mathbf{b} . Protože $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$, je
 $b = -2$.
- ⑤ Závěr: hledaná soustava je (například) $(2 \ -1 \ -1 \ | \ -2)$.

Poznámky

- ① Předchozí příklad našel obecnou rovnici roviny z jejího parametrického zadání. Postup využíval platnosti Frobeniovy věty a základních vlastností matic.
- ② Očekáváme: podobný postup bude fungovat pro nalezení soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nad tělesem \mathbb{F} , která má řešení

$$\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

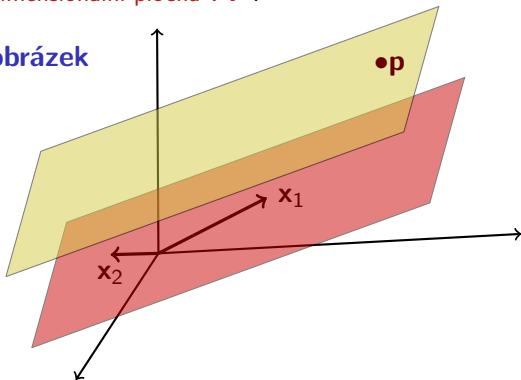
kde vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé.

Definice

Zápisu $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ v \mathbb{F}^s , kde vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ jsou lineárně nezávislé, říkáme **afinní podprostor dimenze d v prostoru \mathbb{F}^s** .^a Seznamu $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ říkáme **směr** (také: **zaměření**) tohoto podprostoru.

^aTaké: d -dimensionální plocha v \mathbb{F}^s .

Ilustrační obrázek



Tvrzení

Ke každému d -dimensionálnímu afinnímu podprostoru $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ v \mathbb{F}^s existuje alespoň jedna soustava tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má $\mathbf{p} + \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ jako množinu řešení.

Důkaz.

Podrobně na přednášce; hlavní myšlenky jsou:

- 1 Musí platit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ pro $i = 1, \dots, d$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.
- 2 Označme $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$. Protože seznam $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$ je lineárně nezávislý, platí $d = \text{rank}(\mathbf{X}) = \text{rank}(\mathbf{X}^T)$.
Soustava^a $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ má $s - d$ prvků ve svém fundamentálním systému. Označme tento systém jako $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-d})$.
- 3 Známe $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{s-d})^T$ a dopočteme \mathbf{b} z rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}$.

^aPozor: matici \mathbf{X}^T známe, neznámá je označena jako \mathbf{a} .

Příklad

Nad \mathbb{R} nalezněte (jakoukoli) soustavu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má řešení

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- 1 Označme $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, potom $\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Platí

$$3 = \text{rank}(\mathbf{X}) = \text{rank}(\mathbf{X}^T).$$

- 2 Matice \mathbf{A} má jako řádky fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$. Protože $\text{rank}(\mathbf{X}^T) = 3$, bude mít matice \mathbf{A} dva lineárně nezávislé řádky.

Příklad (pokrač.)

- 3 Fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$, neboli homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \text{ je například } \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Užitečný trik:^a proto je $i \cdot 4 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 5/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

fundamentální systém soustavy $\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Můžeme tedy psát: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

^aFundamentální systém tvoří bázi jádra matice soustavy. A nenulové skalární násobky prvků jakékoli báze opět tvoří bázi.

Příklad (pokrač.)

4 Dopočteme \mathbf{b} z rovnice $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$.

$$\text{Tudíž } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Odpověď: 3-dimensionální afinní podprostor v \mathbb{R}^5

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

je řešením soustavy $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 5 & 4 & 0 & -13 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 4 & 15 \end{array} \right)$ nad \mathbb{R} .

Závěrečné poznámky

- 1 GEM je sice **universální metodou** řešení soustav lineárních rovnic, nad \mathbb{R} (nebo \mathbb{C}) je však **numericky nestabilní**.

V praxi je pro řešení (zvláště velkých) soustav lineárních rovnic nad \mathbb{R} (nebo \mathbb{C}) nutno **použít jiné metody** (například iterační Gaussovu-Seidelovu metodu,^a a jiné). Tyto metody jsou mimo syllabus standardní přednášky z lineární algebry.

- 2 Jak řešit soustavy s parametrem? GEM je **universální metodou**! Při řešení soustav s parametrem pomocí GEM musíme být velmi opatrní na provádění elementárních úprav.

Pro soustavy se **čtvercovou** maticí vyvineme později další metodu řešení (kombinaci GEM a **Cramerovy věty**).

- 3 **Nepovinné**: Nad \mathbb{R} lze mít i další geometrický pohled na GEM (tzv. **Householderovy reflexe**).

^aViz Poznámku 6.4.7 **skript**.