Determinant: část 1

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 8.1 a 8.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. GEM.
2. Regularita a singularita čtvercových matic.

Dnešní přednáška

1. Determinant čtvercové matice: test regularity matice.
   Determinant má ale především geometrický význam.
2. Bude nutné připomenout základní fakta o permutacích.
   Použijeme grafickou notaci pro permutace: strunové diagramy.
3. Základní metody výpočtu determinantu: z definice a pomocí GEM.

Příští přednáška

1. Hlubší poznatky o determinantech.
2. Aplikace determinantu na řešení čtvercových soustav lineárních rovnic.

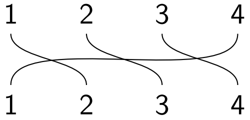
Definice (permutace)

Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je jakákoli bijekce $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Zápisy permutací

1. Výčtem: $\pi : \quad 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 4, \quad 4 \mapsto 1.$
2. Tabulkou:[a] $\pi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
3. Strunovým diagramem:[b]

$\pi =$



Strunový diagram čteme odshora dolů.

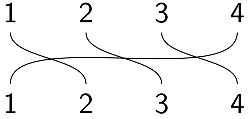
---

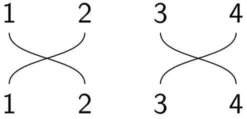
[a] Upozornění: tato tabulka není matice ve smyslu našeho předmětu.

[b] Řešené příklady na strunové diagramy naleznete v kapitole 8.1 skript.

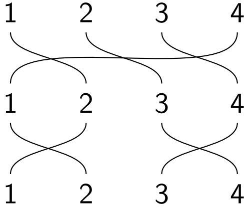
Grafické skládání permutací

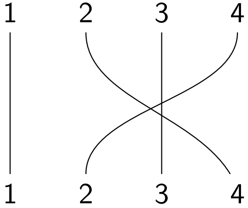
Například:

$\pi =$ 

$\sigma =$ 

Spočteme nejdříve π a potom σ (směrem shora dolů):

$\sigma \cdot \pi =$ 

$=$ 

Definice (symetrická grupa permutací)

Množině všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, spolu s výše uvedenou operací skládání $\cdot$, říkáme symetrická grupa permutací n-prvkové množiny. Značení: S_n.

Tvrzení (vlastnosti skládání permutací)

Skládání $\cdot$ v S_n je asociativní, má neutrální prvek (říkáme mu jednotková (také: triviální) permutace, značíme id_n), každá permutace má inversi vzhledem ke skládání $\cdot$ (značení a terminologie: π^{-1} je inversní permutace k permutaci π).

Důkaz.

Plyne okamžitě z vlastností bijekcí. ∎

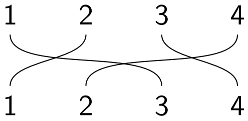
Definice (znaménko permutace)

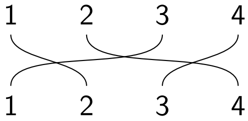
Ať π je permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$. Znaménko permutace π je číslo $\operatorname{sign}\pi$, které je definováno takto:

$$\operatorname{sign}\pi = \begin{cases} +1, & \text{pokud strunový diagram } \pi \\ & \text{obsahuje sudý počet překřížení strun} \\ & \text{(v tomto případě říkáme, že } \pi \text{ je sudá permutace),} \\ & \\ -1, & \text{pokud strunový diagram } \pi \\ & \text{obsahuje lichý počet překřížení strun} \\ & \text{(v tomto případě říkáme, že } \pi \text{ je lichá permutace).} \end{cases}$$

Příklad

Pro permutace

$\pi =$ 

$\pi^{-1} =$ 

platí: $\operatorname{sign}\pi = -1 = \operatorname{sign}(\pi^{-1})$.

Tvrzení (znaménka speciálních permutací)

1. Pro identickou permutaci id_n v S_n platí $\mathrm{sign}(\mathrm{id}_n) = 1$.
2. Pro libovolné permutace σ a π v S_n platí $\mathrm{sign}(\sigma \cdot \pi) = (\mathrm{sign}\,\sigma) \cdot (\mathrm{sign}\,\pi)$.
3. Ať π je permutace v S_n. Pak platí $\mathrm{sign}\,\pi = \mathrm{sign}(\pi^{-1})$.
4. Ať π je permutace v S_n. Označte jako σ permutaci v S_n vzniklou z π prohozením dvou hodnot. Potom $\mathrm{sign}\,\sigma = -\,\mathrm{sign}\,\pi$.

Důkaz.

Přednáška (strunové diagramy). ∎

Definice (determinant čtvercové matice)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ definujeme determinant jako skalár

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$$

Často se píše i $|\mathbf{A}|$ místo $\det(\mathbf{A})$.

„Šachový význam“ součinu $a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$

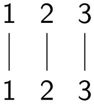
1. Ať π je permutace v S_n.
   Pokud na políčka $a_{\pi(1),1}$, $a_{\pi(2),2}$, ..., $a_{\pi(n),n}$ rozestavíme věže, pak se navzájem neohrožují.[a]
2. Obráceně: n navzájem se neohrožujících věží na „šachovnici“ $(a_{i,j})$ určuje permutaci π v S_n a tím i jeden součin $a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$.

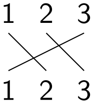
---

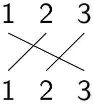
[a] Připomenutí: Položka $a_{\pi(j),j}$ matice $\mathbf{A}$ je položka v j-tém sloupci na $\pi(j)$-tém řádku.

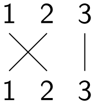
Příklad (Sarrusovo pravidlo pro matice 3×3)

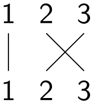
Na množině $\{1, 2, 3\}$ existuje přesně šest následujících permutací:

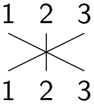
$\pi_0 =$ 

$\pi_2 =$ 

$\pi_4 =$ 

$\pi_1 =$ 

$\pi_3 =$ 

$\pi_5 =$ 

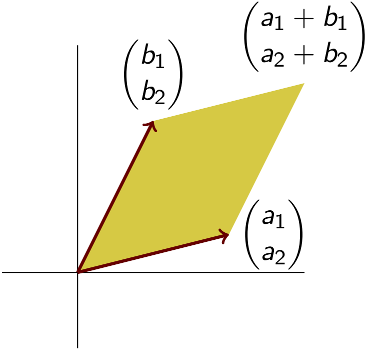
Tudíž:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$

$$- a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

Geometrický význam determinantu matice 2×2 nad $\mathbb{R}$

Determinant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ je velikost $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ orientované plochy

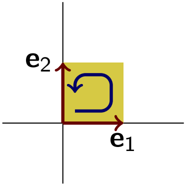


kde $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Geometrie determinantu (pokrač.)

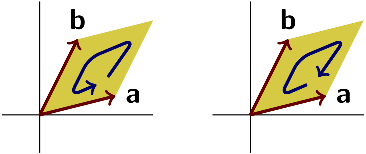
Vlastnosti velikosti $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ orientované plochy jsou:

1. $P(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$. Tato rovnost zavádí jednotku plochy a orientaci prostoru $\mathbb{R}^2$: při pohybu kolem počátku jsme zvolili směr proti směru hodinových ručiček — první je vektor $\mathbf{e}_1$, vektor $\mathbf{e}_2$ je druhý.



Geometrie determinantu (pokrač.)

2. $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Tato rovnost vystihuje, jak chápeme orientaci velikosti plochy: změnou pořadí vektorů **a**, **b** změníme znaménko velikosti plochy.



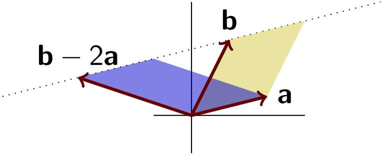
$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad = \quad -P(\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

Geometrie determinantu (pokrač.)

3. Výpočet hodnoty $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ je lineární v každé položce, tj. pro libovolná reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 a libovolné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ platí rovnosti

$$\begin{aligned} P(a_1 \cdot \mathbf{a}_1 + a_2 \cdot \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) &= a_1 \cdot P(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}) + a_2 \cdot P(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) \\ P(\mathbf{a}, b_1 \cdot \mathbf{b}_1 + b_2 \cdot \mathbf{b}_2) &= b_1 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1) + b_2 \cdot P(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2) \end{aligned}$$

Důležitý důsledek: platí rovnosti $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}, \mathbf{b} + a \cdot \mathbf{a})$ a $P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a} + b \cdot \mathbf{b}, \mathbf{b})$ pro a, b reálná.
Například:



$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}, \mathbf{b} - 2\mathbf{a})$$

Zobecnění (geometrický význam determinantu)

Determinant $\det(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ je velikost $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ orientovaného objemu rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{F}^n$. Rovnoběžnostěn je určen vektory $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$ (v tomto pořadí).

Platí:

1. $V(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.
2. $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \operatorname{sign} \pi \cdot V(\mathbf{a}_{\pi(1)}, \ldots, \mathbf{a}_{\pi(n)})$, kde π je libovolná permutace v S_n.
3. $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ je lineární v každé souřadnici zvlášť.

Výše uvedené tři vlastnosti funkce

$$V : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n}_{n\text{-krát}} \to \mathbb{F}$$

určují pojem determinantu jednoznačně.

Tvrzení (determinant transponované matice)

Platí: $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n} \\
&= \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sign} \pi^{-1} \cdot a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdot a_{2,\pi^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign} \pi \cdot a_{1,\pi(1)} \cdot a_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\pi(n)} \\
&= \det(\mathbf{A}^T)
\end{aligned}$$

Využili jsme jednoduchého faktu: platí rovnosti $\{\pi \mid \pi \in S_n\} = S_n = \{\pi^{-1} \mid \pi \in S_n\}$. ∎

Důsledky (výpočet determinantu a GEM)

1. Prohození dvou řádků mění znaménko determinantu.
2. Vynásobení jednoho řádku nenulovým skalárem a změní determinant a-krát.
3. Přičtení lineární kombinace ostatních řádků k řádku nezmění hodnotu determinantu.

Tvrzení (determinant horní trojúhelníkové matice)

Ať $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková matice. Potom $\det(\mathbf{A}) =$ součin prvků na hlavní diagonále matice.

Důsledek (opatrný výpočet determinantu pomocí GEM)

$\det(\mathbf{A})$ lze počítat pomocí GEM: je nutné si ovšem poznamenat typy úprav (a tudíž i případné změny hodnoty determinantu).

Příklad (výpočet determinantu pomocí GEM)

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix}
= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & -8 \\ -2 & 16 & 3 \end{vmatrix}
\begin{matrix} R_1 \\ -2R_2 \\ R_3 \end{matrix} =
$$

$$
= -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 19 & 4 \end{vmatrix}
\begin{matrix} R_1 \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + R_1 \end{matrix} =
$$

$$
= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & -133 & -28 \end{vmatrix}
\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ -7R_3 \end{matrix} =
$$

$$
= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & -123 \end{vmatrix}
\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 19R_2 \end{matrix} =
$$

$$
= \frac{2\cdot 7\cdot(-123)}{2\cdot 7} = -123
$$

Věta (invertibilita matice pomocí determinantu)

Pro matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ platí: $\mathbf{A}$ je regulární právě tehdy, když $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Důkaz.

Bez důkazu (viz např. Důsledek 8.4.4 skript). ■

Poznámky k výpočtu $\det(\mathbf{A})$

1. Výpočet z definice: časově náročný. Je zapotřebí se vyznat v S_n (má $n!$ prvků).
2. Výpočet pomocí GEM: méně náročný (řádově n^3 kroků). Pozor! Nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ je GEM numericky nestabilní. Navíc (při ručním výpočtu) je zapotřebí GEM provádět opatrně.
3. Jiný způsob výpočtu? Ano: rozvoj podle řádku nebo sloupce (rekursivní výpočet). Příště.

Jiný způsob zavedení determinantu (nepovinné)

Determinant lze zavést pomocí vnější mocniny[a] lineárního prostoru, viz kapitolu 5 skript.

Výhody tohoto přístupu:

1. Okamžitý geometrický vhled do pojmu determinant a snadné důkazy vlastností determinantu.
2. Determinant je možno počítat pro libovolná lineární zobrazení, ne jen pro matice.
3. Pojem vnější mocniny vede rychle ke geometrické algebře, která umožňuje elegantní a rychlé výpočty v počítačové grafice, viz například knihu

   L. Dorst, D. Fontijne, S. Mann, *Geometric algebra for Computer Science*, Elsevier, 2007

---

[a] Na první pohled myšlenka vnější mocniny vypadá velmi divoce. Tato myšlenka je ale velmi přirozená a je stejně stará jako lineární algebra: v roce 1844 s ní přišel Hermann Grassmann (1808–1887).