Diagonalisace matic

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 10.1, 10.3 a 10.4 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Pojmy vlastní hodnota a vlastní vektor lineárního zobrazení.
2. Věta o diagonalisovatelnosti čtvercových matic nad $\mathbb{C}$.

Dnešní přednáška

1. Diagonalisovatelnost matic nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.
2. Dvě aplikace: řešení rekurentních rovnic a funkce matic.[a]

[a] Tyto dvě aplikace nebudou zkoušeny!

Připomenutí důležité vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$

Každý polynom $p(x)$ v $\mathbb{C}[x]$ stupně n má přesně n kořenů (počítaných i s násobnostmi).[a]

[a] Této vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$ se říká algebraická uzavřenost.

1. Komplexní číslo λ je kořen polynomu $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ násobnosti k, pokud platí rovnost $p(x) = (x - \lambda)^k \cdot q(x)$ pro $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ a $q(\lambda) \neq 0$.
2. Speciálně: číslo λ má jako kořen $p(x)$ násobnost nula právě tehdy, když λ není kořenem polynomu $p(x)$.

Důsledek (téma 8B, tvar věty o diagonalisaci pro $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{C}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Matice $\mathbf{A}$ diagonalisovatelná.
2. Pro každé komplexní číslo λ platí: násobnost λ jako kořene polynomu $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ je rovna $\dim(\mathrm{eigen}(\lambda, \mathbf{A}))$.

Příklad

Pauliho matice[a] jsou následující tři matice nad $\mathbb{C}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Všechny tyto matice jsou diagonalisovatelné:

1. Matice Z již diagonální je.

---

[a] Jde o důležitý příklad v kvantové mechanice a kvantovém počítání. Matice X, Y a Z jsou operátory spinu ve směrech os x, y, z a značívají se též

$$\sigma_x \text{ (také: } \sigma_1) \qquad \sigma_y \text{ (také: } \sigma_2) \qquad \sigma_z \text{ (také: } \sigma_3)$$

Užitečná početní cvičení: platí rovnosti

1. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -i \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \mathbf{E}_2$.
2. $\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{E}_2$, kde $\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j$ je tzv Poissonova závorka a δ_{jk} je Kroneckerův symbol.
3. $[\sigma_j, \sigma_k] = \sum_{l=1}^{3} 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$, kde $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j$ je tzv komutátor a ϵ_{jkl} je Levi-Civitův symbol.

Příklad (pokrač.)

2. Diagonalisace matice $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Platí $\mathrm{char}_X(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$.

   Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice X jsou: $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Tudíž
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   a operátor X je diagonální v bázi $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$.

Příklad (pokrač.)

3. Diagonalisace matice $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

   Platí $\mathrm{char}_Y(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$.

   Vlastní hodnoty a vlastní vektory matice Y jsou: $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Tudíž
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   a operátor Y je diagonální v bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Jordanův tvar čtvercové matice

Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ taková, že polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$ lze rozložit na součin lineárních faktorů.[a]

Potom lze dokázat, že $\mathbf{A}$ je „téměř diagonalisovatelná“. Přesněji: platí $\mathbf{A} \approx \mathbf{J}$, kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}$$

O Jordanově tvaru budeme mluvit na příští přednášce (téma 9A).

[a] To platí například pro libovolnou matici nad $\mathbb{C}$.

Jordanův tvar čtvercové matice (pokrač.)

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Matici $\mathbf{J}_i$ říkáme Jordanova buňka. Na diagonále je vlastní hodnota λ_i matice $\mathbf{A}$. Rozměr matice $\mathbf{J}_i$ je roven násobnosti vlastní hodnoty λ jako kořene $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x)$.

Existenci Jordanova tvaru budou věnovány další přednášky.

Příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ je regulární matice nad $\mathbb{R}$. Potom platí:

1. $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = (a-x)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$.
   Diskriminant tohoto výrazu je $-4b^2$.

   Matice $\mathbf{A}$ je tedy nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná pouze v případě $b = 0$.

   V tomto případě ale $\mathbf{A}$ už je diagonální: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ a musí platit $a \neq 0$, protože $\mathbf{A}$ je regulární.

   Matice $\mathbf{A}$ je tedy maticí změny měřítka (změna je stejná na obou souřadnicových osách).

Příklad (pokrač.)

2. V případě $b \neq 0$ matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ není nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná.

   Matice $\mathbf{A}$ (chápaná jako matice nad $\mathbb{C}$) má vlastní hodnoty $\lambda_1 = a + bi$ a $\lambda_2 = a - bi$, protože
   $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib))$.

   Označme $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále označme jako α úhel[a] mezi vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

   Potom
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
   To jest: $\mathbf{A}$ je rotace o úhel α, následovaná změnou měřítka.

---

[a] Úhlu α se říká argument komplexního čísla $a + bi$. Platí tedy rovnost $a + bi = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha) = r \cdot e^{i\alpha}$.

Tvrzení (klasifikace regulárních transformací roviny)

Ať $\mathbf{M} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je regulární a ať nemá 2-násobnou vlastní hodnotu. Pak $\mathbf{M}$ je podobná buď

1. matici $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \neq b$ jsou z $\mathbb{R}$ a $a \cdot b \neq 0$,

nebo

2. matici $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, kde $r > 0$ a $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Slogan

Regulární transformace roviny bez 2-násobných vlastních hodnot jsou pouze dvou typů:

1. Změny měřítka (změna měřítka je na každé souřadnicové ose jiná).
2. Rotace následované změnou měřítka stejnou na obou souřadnicových osách.

Důkaz (klasifikace regulárních transformací roviny).

1. V případě, kdy $\mathbf{M}$ je diagonalisovatelná nad $\mathbb{R}$, má $\mathbf{M}$ dvě různé reálné vlastní hodnoty a, b. Tudíž $\mathbf{M} \approx \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, kde $a \cdot b \neq 0$, protože $\mathbf{M}$ je regulární.
2. V případě, kdy $\mathbf{M}$ nad $\mathbb{R}$ diagonalisovatelná není, má $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ komplexní kořen $\lambda = a + bi$, kde $b \neq 0$.
   Označme jako $\mathbf{v}$ komplexní vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ. Označme jako $\mathbf{T}$ matici se sloupci $\mathbf{t}_1 = \mathrm{Re}(\mathbf{v})$ (vektor reálných částí položek vektoru $\mathbf{v}$) a $\mathbf{t}_2 = \mathrm{Im}(\mathbf{v})$ (vektor imaginárních částí položek vektoru $\mathbf{v}$).
   Potom platí rovnost $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1}$.
   Nyní stačí použít předchozí příklad. ∎

Výpočet mocnin diagonalisovatelné matice

Pro diagonalisovatelnou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ platí:
$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{T}$.

Tudíž: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{T}$.

Obecně: $\mathbf{A}^k = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{T}$, pro všechna přirozená čísla $k \geq 0$.

Protože mocniny diagonální matice lze počítat velmi rychle, lze rychle počítat i mocniny diagonalisovatelných matic.

Ukážeme dvě aplikace umocňování:

1. Řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic.
   To je důležité při analýze složitosti rekursivních algoritmů.
2. Základní myšlenku funkcí matice.
   To je důležité ve fyzice, grafice, kvantovém počítání, ...

Příklad (Fibonacciho posloupnost)

Hledáme posloupnost čísel $F(n)$, splňující lineární rekurentní rovnici $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$, pro všechna př. č. $n \geq 0$.

Cíl: chceme explicitní vzorec pro $F(n)$, $n \geq 0$.

Evidentně: známe-li $F(0)$ a $F(1)$, známe všechna $F(n)$.[a]

1. Vytvoříme generující matici $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pro kterou platí:
$$\mathbf{F} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(1) \\ F(2) \end{pmatrix}, \text{ obecně } \mathbf{F}^n \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix}.$$
2. Matice $\mathbf{F}$ je diagonalisovatelná nad $\mathbb{R}$: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

[a] Požadavkům $F(0) = x_0$ a $F(1) = x_1$ se říká počáteční podmínka. Pro klasickou Fibonacciho posloupnost jde o $F(0) = 1$, $F(1) = 1$.

Příklad (Fibonacciho posloupnost, pokrač.)

3. $\begin{pmatrix} F(n) \\ F(n+1) \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \end{pmatrix}$

Takže: $F(n) = \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(0) + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot F(1)$

V klasickém případě (tj když $F(0) = F(1) = 1$), je

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{\lambda_1^n \cdot \lambda_2 - \lambda_2^n \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{-\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} = \\ &= \lambda_1^n \cdot \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \lambda_2^n \cdot \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

Poznámky (lineární homogenní rekurence k-tého řádu)

Obdobným způsobem lze řešit jakoukoli homogenní lineární rekurentní rovnici k-tého řádu: hledáme posloupnost $X(n)$ prvků $\mathbb{F}$, které splňují

$$X(n+k) = a_1 X(n+k-1) + a_2 X(n+k-2) + \ldots a_k X(n)$$

pro všechna přirozená čísla $n \geq 0$, kde $a_1, \ldots, a_k$ jsou v $\mathbb{F}$.

Jediné, co potřebujeme, je diagonalisovatelnost generující matice.

1. Řešení rekurentních rovnic hraje zásadní úlohu při analýze složitosti rekursivních algoritmů.
2. Podobné postupy fungují i pro lineární homogenní diferenciální rovnice k-tého řádu. Viz Dodatek O skript.

Příklad (exponenciála matice)

Víme, že funkce e^x má Taylorův rozvoj $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Pro čtvercovou diagonalisovatelnou matici $\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}$ definujeme

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}}{n!} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n}{n!} \right)}_{=e^{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{T}$$

Konvergenci této řady musíme chápat ve smyslu normy.[a]

Lze ukázat, že matice $e^{\mathbf{D}}$ je diagonální, a že platí $e^{\mathbf{D}} = (\delta_{ij} \cdot e^{d_{ij}})$.

[a] To je velmi technický pojem, nebudeme o něm mluvit. Více například v knize Roger A. Horn, Charles J. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2012, nebo v přednášce A0B01PAN (Pokročilá analýza), nebo v kapitole 13.2 skript. Analogicky exponenciále lze postupovat pro obecnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (případně $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$), která má Taylorův rozvoj.