Jordanův tvar

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 11.1 a 11.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulé přednášky

1. Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí lze (za určitých předpokladů) diagonalisovat.
2. Matice některých lineárních zobrazení mezi prostory konečných dimensí diagonalisovat nelze.

Dnešní přednáška

1. Budeme studovat obecná lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, kde L má konečnou dimensi.
   Vysvětlíme, co je Jordanův tvar zobrazení $\mathbf{f}$.[a]
   Půjde o tvar: $\mathbf{f}$ = diagonální + nilpotentní.
   Nilpotentní = „téměř nulové zobrazení".
   To znamená: Jordanův tvar = „téměř diagonální tvar".

[a] Jde o velmi technickou partii lineární algebry. Některé důkazy tudíž neuvedeme. Důkazy všech tvrzení naleznete v Kapitole 11 skript.
Zkouška: výpočet Jordanova tvaru nebude v písemné části (mohou tam ale být nilpotentní matice), u ústní části mohou být vyžadovány pouze hlavní myšlenky Jordanova tvaru (viz str 9 tohoto tématu).

Příklad (direktní rozklad rotace v rovině xy)

Pro

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

je

1. $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \vee \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cap \mathrm{span}(\mathbf{e}_3) = \{\mathbf{o}\}$. Tento fakt budeme značit $\mathbb{R}^3 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \oplus \mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ a budeme mluvit o direktním rozkladu $\mathbb{R}^3$ na $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$.
2. Direktně rozložit lze i celé lineární zobrazení:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \oplus (1)$$
protože podprostory $\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\mathrm{span}(\mathbf{e}_3)$ jsou invariantní na dané zobrazení.

Příklad (diagonalisovatelná matice a direktní rozklad)

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je diagonalisovatelná matice:
$D(\lambda_1; \ldots ; \lambda_n) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{T} = ({}_{\mathtt{1}}, \ldots , {}_{\mathtt{n}})$.
Potom pro $W_i = \operatorname{span}({}_{\mathtt{i}})$ platí:

1.
   1. $\mathbb{F}^n = W_1 \vee \ldots \vee W_n$,
   2. $W_i \cap \bigvee_{j \neq i} W_j = \{\mathbf{o}\}$ pro všechna i.

   Tato dvě fakta budeme značit $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ a budeme říkat, že W_1, ..., W_n tvoří direktní rozklad prostoru $\mathbb{F}^n$.
2. Pro každé $\mathbf{x}$ z W_i je $\mathbf{Ax}$ opět z W_i. To jest: každé W_i je $\mathbf{A}$-invariantní podprostor prostoru $\mathbb{F}^n$.
   Můžeme tedy psát: $\mathbf{A} \approx \mathbf{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_n$.

Příklad

Ať $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ je matice nad $\mathbb{R}$.

Potom $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.

1. Pro dvojnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 3$:

   $$\mathrm{eigen}(3, \mathbf{A}) = \mathrm{ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}_3) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

2. Pro jednonásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 2$:

   $$\mathrm{eigen}(2, \mathbf{A}) = \mathrm{ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}_3) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$$

Platí $\mathbb{R}^3 = \mathrm{eigen}(3, \mathbf{A}) \oplus \mathrm{eigen}(2, \mathbf{A})$ a $\mathbf{A} \approx \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (2)$.

Příklad (diagonalisovatelná matice a direktní rozklad, pokrač)

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ je diagonalisovatelná matice: $D(\lambda_1; \ldots; \lambda_n) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{T} = ({}_{1}, \ldots, {}_{\mathtt{n}})$.

Direktní rozklad lze zlepšit: pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{A}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$, potom

$$\mathbb{F}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_p, \quad \mathbf{A} \approx \mathbf{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{B}_p$$

To jest: $\mathbf{A}$-invariantní podprostory V_i můžeme zvolit tak, že $\dim(V_i) = m_i$.

Poznámka

Kdy $\mathbf{A}$ diagonalisovat nelze? Když $\dim(V_i) < m_i$ pro alespoň jedno i. Budeme muset vylepšit pojem invariantního podprostoru.

Příklad (neexistence direktního rozkladu pro nediagonalisovatelnou matici)

Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{R}$ je $\mathrm{char}_{\mathbf{B}}(x) = -(x-3)^2 \cdot (x-2)$.

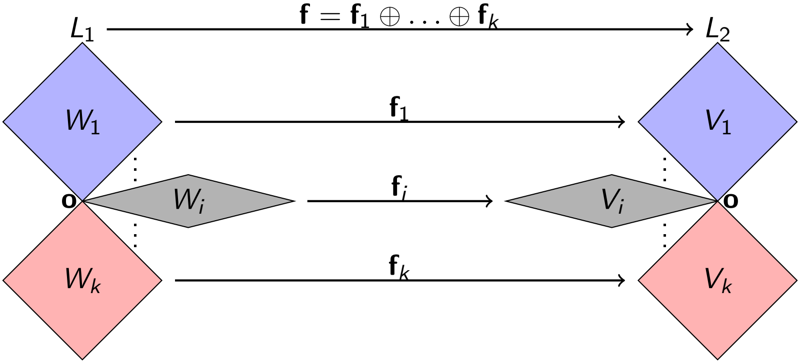
Ale $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B}) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$.

To znamená:

1. Prostory $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B})$ a $\mathrm{eigen}(2, \mathbf{B})$ jsou $\mathbf{B}$-invariantní.
2. $\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{eigen}(3, \mathbf{B}) \oplus \mathrm{eigen}(2, \mathbf{B})$.
   Prostor $\mathrm{eigen}(3, \mathbf{B})$ vlastních vektorů příslušných hodnotě 3 má malou dimensi.

Direktní rozklad lineárního prostoru a lineárního zobrazení

Pro $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$, kde $L_1 = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, $L_2 = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ a $\mathbf{f}(\vec{x})$ je z V_i, jakmile $\vec{x}$ je z W_i, píšeme



To znamená: $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) + \ldots + \mathbf{f}_k(\vec{x}_k)$, kde $\vec{x} = \vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_k$.

Cíl této přednášky (hlavní myšlenky Jordanova tvaru)

1. Pro lineární zobrazení $\mathbf{f}$ chceme psát $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$, kde
   1. $\mathbf{f}_{\mathrm{diag}}$ je diagonalisovatelné.
   2. $\mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$ se „příliš neliší“ od nulového zobrazení $\mathbf{o}$. Přesněji: $(\mathbf{f}_{\mathrm{nil}})^k = \mathbf{o}$ pro nějaké k.
   3. $\mathbf{f}_{\mathrm{nil}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} = \mathbf{f}_{\mathrm{diag}} \cdot \mathbf{f}_{\mathrm{nil}}$.

   Tomuto součtu budeme říkat Jordanův tvar $\mathbf{f}$.

   K čemu je to dobré? Budeme moci počítat mocniny[a]

   $$\mathbf{f}^m = (\mathbf{f}_{\mathrm{diag}} + \mathbf{f}_{\mathrm{nil}})^m = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\mathrm{diag}})^j}_{\text{snadné}} \cdot \underbrace{(\mathbf{f}_{\mathrm{nil}})^{m-j}}_{=\mathbf{o} \text{ pro } m-j \geq k}$$

2. Namísto Jordanova tvaru lineárního zobrazení hledáme většinou Jordanův tvar jeho matice.
   V určité bázi (které se říká Jordanova báze) bude tedy matice mít „příjemný tvar“.

[a] To je v nejrůznějších aplikacích velmi důležité.

Cíl této přednášky (pokrač.)

3. Většinu výsledků nedokážeme, pouze uvedeme příklady.

   Navíc: nenaučíme se hledat Jordanovu bázi. Je to velmi technické, více se lze dočíst v Kapitole 11 skript.

Značení

Pro lineární zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$ značíme $\mathbf{f}^0 = \mathbf{id}$ a $\mathbf{f}^{k+1} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^k$ pro $k \geq 0$.

Definice (nilpotentní zobrazení)

Lineárnímu zobrazení $\mathbf{f} : L \to L$, pro které existuje k tak, že $\mathbf{f}^k = \mathbf{o}$, říkáme nilpotentní. Nejmenšímu takovému k říkáme index nilpotence a značíme jej $\mathrm{nil}(\mathbf{f})$.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní, platí $\mathrm{nil}(\mathbf{N}) = 3$.
Pojďme „stopovat" cestu vektorů kanonické báze při postupné aplikaci matice $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}, \quad \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{o}$$

Všechny čtyři bázové vektory se nakonec zobrazí na nulový vektor, protože matice $\mathbf{N}$ je nilpotentní. Navíc $\mathrm{nil}(\mathbf{N})$ je zjevně rovna největší z délek jednotlivých řetězců, tj. $\mathrm{nil}(\mathbf{N})$ je maximální z čísel 1, 2, 3, 1.

Příklad (nilpotentní matice)

Matice

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ je nilpotentní: její řetězce jsou

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} & & & & \\ \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} & & \\ \mathbf{e}_3 & \mapsto & 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 & \mapsto & \mathbf{e}_1 & \mapsto & \mathbf{o} \end{array}$$

a proto platí $\operatorname{nil}(\mathbf{N}) = 3$.

Definice

Čtvercové matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

říkáme Jordanova buňka.[a]

[a] Buňka v této definici má rozměry $n \times n$.

Pozorování

Každá Jordanova buňka je nilpotentní matice. Index nilpotence je roven rozměrům buňky.

Nalezení Jordanova tvaru matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Postupujeme takto:

1. Spočteme charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ matice $\mathbf{M}$.
   1. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x)$ nelze v $\mathbb{F}[x]$ rozložit na součin kořenových faktorů, výpočet končíme. Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ neexistuje.
   2. Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ existuje a my postupujeme podle dalších bodů.
2. Jordanův tvar bude mít p Jordanových segmentů $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, p$. Segment $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$ má rozměry $m_i \times m_i$.
3. Nalezení i-tého segmentu $\mathbf{B}_i(\lambda_i)$:
   1. Utvoříme nilpotentní matici $\mathbf{M} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}_n$. a nalezneme její Jordanův tvar $\mathbf{N}_i$.
   2. Platí $\mathbf{B}_i(\lambda_i) = \mathbf{N}_i + \lambda_i \cdot \mathbf{E}_{m_i}$.
4. Z Jordanových segmentů utvoříme Jordanův tvar matice $\mathbf{M}$ jakožto blokově diagonální matici.

Praktický význam Jordanova tvaru matice $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$

Pokud $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = a \cdot (x - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_p)^{m_p}$ v $\mathbb{F}[x]$, pak platí

$$\mathbf{M} \approx \mathbf{M}_{\mathrm{diag}} + \mathbf{M}_{\mathrm{nil}}$$

kde $\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}$ je diagonální, $\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}$ je nilpotentní a platí rovnost

$$\mathbf{M}_{\mathrm{diag}} \cdot \mathbf{M}_{\mathrm{nil}} = \mathbf{M}_{\mathrm{nil}} \cdot \mathbf{M}_{\mathrm{diag}}$$

To je velmi důležitý výsledek v aplikacích!

Příklad

Připomenutí: pro čtvercovou matici $\mathbf{X}$ nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$) lze definovat

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{X}^n}{n!}$$

a výsledkem je opět čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$). Navíc: pro funkci $t \mapsto \exp(t\mathbf{X})$ reálné proměnné platí rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(t\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \exp(t\mathbf{X})$$

a to umožňuje elegantně řešit soustavy lineárních diferencálních prvního řádu s konstantními koeficienty, viz Dodatek O skript. Matici $\exp(t\mathbf{X})$ lze snadno spočítat, známe-li Jordanův tvar matice $\mathbf{X}$.

Příklad

Pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{R}$ nalezneme její Jordanův tvar.

1. Platí $\mathrm{char}_{\mathbf{M}}(x) = (x-2)^4(x+1)^2$.
   Jordanův tvar $\mathbf{M}$ bude mít dva Jordanovy segmenty:
   1. Segment $\mathbf{B}_1(2)$ velikosti 4×4, protože násobnost 2 jako kořene charakteristické rovnice je 4.
   2. Segment $\mathbf{B}_2(-1)$ velikosti 2×2, protože násobnost -1 jako kořene charakteristické rovnice je 2.

Příklad (pokrač.)

2. Celkově: Jordanův tvar matice **M** je

$$\mathbf{M} \approx B_1(2) \oplus B_2(-1) = \left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Příklad (pokrač.)

Například: víme, že platí

$$t\mathbf{M} \approx t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}}$$

pro každé t z $\mathbb{R}$.

Příklad (pokrač.)

To znamená, že[a]

$$\exp(t\mathbf{M}) \approx \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}} + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}) \cdot \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}})$$

$$= \exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{diag}}) \cdot (\mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}^2)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

[a] Exponenciála diagonální matice se počítá snadno. Exponenciála nilpotentní matice se počítá v konečně krocích. V našem případě platí $\mathrm{nil}(\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = 3$, proto $\exp(t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}) = \mathbf{E}_6 + t\mathbf{M}_{\mathrm{nil}} + \frac{t^2}{2}\mathbf{M}_{\mathrm{nil}}^2$.