Charakterisace skalárních součinů v $\mathbb{R}^n$

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 12.1, 12.2 a 12.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

1. V této přednášce (a ve všech přednáškách týkajících se skalárního součinu) se zaměříme na lineární prostory nad $\mathbb{R}$.
2. Charakterisace matic, které zadávají skalární součiny v prostoru $\mathbb{R}^n$.
3. Konstrukce skalárních součinů požadovaných vlastností.

Příští přednášky ke skalárnímu součinu

1. Ortogonální báze a ortonormální báze.
2. Ortogonalisační proces a ortonormalisační proces.
3. Ortogonální projekce a ortogonální rejekce.

Připomenutí (dva různé skalární součiny v $\mathbb{R}^2$)

1. Standardní skalární součin:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}_2} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2. „Nezvyklý“ skalární součin:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2 x_2 y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

V obou případech je součin zadán jistou maticí typu 2×2. Je to náhoda?

Co dál?

Ukážeme, že skalární součiny v $\mathbb{R}^n$ odpovídají přesně těm čtvercovým maticím, kterým říkáme positivně definitní.

Definice (positivně definitní matice)

Řekneme, že matice $\mathbf{G}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ je positivně definitní, když existuje matice $\mathbf{R}$ s lineárně nezávislými sloupci tak, že $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

Poznámky

1. Protože $\mathbf{G}^T = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R})^T = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{G}$, je každá positivně definitní matice $\mathbf{G}$ symetrická.

Poznámky (pokrač.)

2. Positivně definitní matice **G** zobecňují kladná reálná čísla: matice **R** je „druhá odmocnina“[a] matice **G**.

   Opravdu: Matice $\mathbf{G} = (g)$ typu 1×1 je positivně definitní právě tehdy, když $g > 0$.

   1. Ať $\mathbf{G} = (g) = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$. Pak $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ a platí $g = r_1^2 + \cdots + r_n^2$.

      Protože jediný sloupec **R** musí být lineárně nezávislý, je $g > 0$.
   2. Je-li $g > 0$, platí $(g) = (\sqrt{g})^T \cdot (\sqrt{g})$. Protože $\sqrt{g} > 0$, je jediný sloupec matice $\mathbf{R} = (\sqrt{g})$ lineárně nezávislý. Matice **G** je tudíž positivně definitní.

---

[a] Jde jen o slogan: matice **R** není určena jednoznačně. Například platí
$$(4) = (2)^T \cdot (2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Věta (charakterisace positivně definitních matic)

Pro matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ nad $\mathbb{R}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\mathbf{G}$ je positivně definitní.
2. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a determinanty všech matic $\mathbf{G}_k = (g_{ij})_{i=1,\dots,k,j=1,\dots,k}$, kde $1 \leqslant k \leqslant n$, jsou kladné.[a]
3. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a nerovnost $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \geqslant 0$ platí pro všechna $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^n$ (rovnost platí pouze pro $\mathbf{x} = \mathbf{o}$).
4. Matice $\mathbf{G}$ je symetrická a $\mathrm{char}_{\mathbf{G}}(x)$ má všechny kořeny reálné a kladné.
5. Existuje regulární matice $\mathbf{R}$ tak, že platí $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$.

[a] Tento test positivní definitnosti budete využívat v analýze pro určování lokálních minim funkcí více proměnných.

Důkaz.

Bez důkazu (je těžký, pro zájemce: Tvrzení 12.3.4 skript). ■

Poznámka o Choleskyho faktorisaci — nepovinné

1. Připomenutí definice: $\mathbf{G}$ je positivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ má lineárně nezávislé sloupce.
2. Předchozí věta: $\mathbf{G}$ je positivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je regulární.
3. Zesílení věty: $\mathbf{G}$ je positivně definitní právě tehdy, když $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$, kde $\mathbf{R}$ je regulární v horním blokovém tvaru.

Rovnosti $\mathbf{G} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$ pro regulární matici $\mathbf{R}$ v horním blokovém tvaru se říká Choleskyho faktorisace matice $\mathbf{G}$. Příklad Choleskyho faktorisace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 12 \\ 8 & 12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Choleskyho faktorisaci lze nalézt algoritmem, viz skripta, Příklad 12.3.6. Tento algoritmus je nepovinný.

Příklady

1. Protože $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n^T \cdot \mathbf{E}_n$, je jednotková matice $\mathbf{E}_n$ positivně definitní.

   Připomeňme: $\mathbf{E}_n$ zadává standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^n$.

2. Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ je positivně definitní podle předchozí věty: $\mathbf{G}$ je symetrická a platí nerovnosti $\det(\mathbf{G}_1) = \det(1) > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) > 0$.

   Připomeňme: $\mathbf{G}$ zadává „nezvyklý“ skalární součin $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ v $\mathbb{R}^2$.

Příklady (pokrač.)

3. Matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

není positivně definitní podle předchozí věty: platí $\det(\mathbf{G}_1) > 0$, $\det(\mathbf{G}_2) < 0$, $\det(\mathbf{G}_3) > 0$, $\det(\mathbf{G}_4) < 0$.

Připomeňme (minulá přednáška): $\mathbf{G}$ zadává „skalární součin“ $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$ v Minkowského časoprostoru $\mathbb{R}^4$.

Věta (obecný tvar skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$)

1. Ať $\mathbf{G}$ je positivně definitní matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{R}$. Potom maticový součin

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$$

   definuje skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

2. Každý skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ definuje positivně definitní[a] matici $\mathbf{G} = (g_{ij})_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,n}$, kde $g_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle$. Potom platí rovnost $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$.

[a] Matici $\mathbf{G}$ říkáme metrický tensor (také: Gramova matice) skalárního součinu $\langle - \mid - \rangle$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Příklad (popis všech skalárních součinů v $\mathbb{R}^2$)

Matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je positivně definitní právě tehdy, když platí:

1. $\mathbf{G}$ je symetrická matice, tj. když platí $c = b$.
2. $\det(\mathbf{G}_1) = a > 0$ a $\det(\mathbf{G}_2) = \det(\mathbf{G}) = ad - b^2 > 0$.

To znamená: výraz

$$ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + dx_2y_2$$

zadává skalární součin $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ v $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí nerovnosti $a > 0$ a $ad - b^2 > 0$.

Příklad (jednotková kružnice pro skalární součin v $\mathbb{R}^2$)

Pro positivně definitní[a] matici $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ a příslušný skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ je množina[b]

$$\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \| = 1 \}$$

jednotková kružnice. Rovnice této kružnice je

$$a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + d x_2^2 = 1$$

a my ukážeme, že v bázi vlastních vektorů matice $\mathbf{G}$, jde o elipsu.

[a] Připomenutí: platí $a > 0$ a $ad - b^2 > 0$.

[b] Připomenutí: $\| - \|$ je norma vytvořená skalárním součinem $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Příklad (jednotková kružnice, pokrač.)

1. Positivně definitní matice $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ má charakteristický polynom $\mathrm{char}_{\mathbf{G}}(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - b^2)$ s diskriminantem $D = (a-d)^2 + 4b^2 \geqslant 0$.
2. V případě $D = (a-d)^2 + 4b^2 = 0$ platí $b = 0$ a $a = d > 0$.

   Pak matice $\mathbf{G}$ je diagonální, vlastní vektory jsou $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ a v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ má rovnice jednotkové kružnice tvar

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

Příklad (jednotková kružnice, pokrač.)

3. V případě $D = (a-d)^2 + 4b^2 > 0$ rozlišíme dva případy:
   1. $b = 0$. Pak $\mathbf{G}$ je diagonální a $a \neq d$. Vlastní vektory $\mathbf{G}$ jsou $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ a v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ má rovnice jednotkové kružnice tvar
   $$\left(\frac{x_1}{\sqrt{d}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{ad}}\right)^2$$
   protože $d > 0$, neboť $\mathbf{G}$ je positivně definitní. Jde tedy o elipsu.
   2. $b \neq 0$. Matice $\mathbf{G}$ pak má dvě různé kladné vlastní hodnoty
   $$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{D}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{D}}{2}$$
   V bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vlastních vektorů má rovnice jednotkové kružnice tvar
   $$\left(\frac{t_1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2$$
   Jde tedy o elipsu.

Připomenutí

Minulá přednáška: každý skalární součin vytváří normu.
Je-li $\langle - \mid - \rangle$ skalární součin na $\mathbb{R}^n$, pak

1. vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou ortogonální (také: navzájem kolmé), pokud $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = 0$,
2. norma (také: velikost) vektoru $\mathbf{x}$ je $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle}$,
3. vektor $\mathbf{x}$ je normovaný, pokud $\|\mathbf{x}\| = 1$.

Tvrzení (kanonická báze $\mathbb{R}^n$ a standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$)

Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y}$ a kanonickou bázi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{R}^n$ platí:[a] $\langle \mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j \rangle = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j \\ 1, & \text{pro } i = j \end{cases}$.

[a] Takovým bázím budeme říkat ortonormální a obecně je budeme studovat příště. To jest: vektory takové báze jsou na sebe navzájem kolmé a každý vektor takové báze má normu 1.

Věta (každou bázi $\mathbb{R}^n$ lze považovat za ortonormální)

Ať $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ je jakákoli uspořádaná báze $\mathbb{R}^n$. Potom existuje jediný skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ takový, že $\langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Důkaz.

Označme $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$, připomenutí (téma 5B):
$\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$, čili $\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$, pro vš $i = 1, \ldots, n$.

1. Existence hledaného skalárního součinu.
   Definujte $\mathbf{G} = (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T \cdot \mathbf{T}_{K_n \mapsto B}$. Potom matice $\mathbf{G}$ je positivně definitní a platí

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}_i \mid \mathbf{b}_j \rangle &= \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b}_j \\
&= \underbrace{\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{K_n \mapsto B})^T}_{=(\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_i)^T = \mathbf{e}_i^T} \cdot \underbrace{\mathbf{T}_{K_n \mapsto B} \cdot \mathbf{b}_j}_{=\mathbf{e}_j} \\
&= \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Důkaz (pokrač.)

2. Jednoznačnost hledaného skalárního součinu.
   Ať $\mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$. Ukážeme $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.

   Opravdu: platí $\mathbf{b}_i^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{b}_j = 0$ pro vš. i, j.

   To znamená $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_i)^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j) = 0$ pro vš. i, j, neboli $\mathbf{e}_i^T \cdot (\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} \cdot \mathbf{e}_j = 0$ pro vš. i, j.

   Ukázali jsme rovnost $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T \cdot (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{T}_{B \mapsto K_n} = \mathbf{O}_{n,n}$.

   Protože $\mathbf{T}_{B \mapsto K_n}$ i $(\mathbf{T}_{B \mapsto K_n})^T$ jsou regulární, platí $\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2 = \mathbf{O}_{n,n}$.

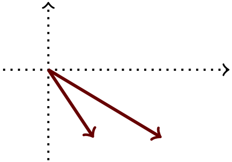
   Tudíž $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$.

■

Příklad

Najděte skalární součin v $\mathbb{R}^2$ takový, aby vektory $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ byly navzájem kolmé a každý měl normu 1.

Obrázek:



Skalární součin nalezneme podle předchozího tvrzení:

1. Pro $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ je[a] $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Tudíž

   $$\mathbf{G} = (\mathbf{B}^{-1})^T \cdot \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{81} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 29 \end{pmatrix}.$$

[a] Matici $\mathbf{B}^{-1}$ nalezneme nejrychleji pomocí adjungované matice.

Příklad (pokrač.)

2. Hledaný skalární součin je
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{18}{81} \cdot x_1 y_1 + \frac{21}{81} \cdot x_1 y_2 + \frac{21}{81} \cdot x_2 y_1 + \frac{29}{81} \cdot x_2 y_2.$$

3. $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$
$$\frac{18}{81} \cdot 2 \cdot 5 + \frac{21}{81} \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 0.$$

4. $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$
$$\frac{18}{81} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{21}{81} \cdot 2 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 2 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 1.$$

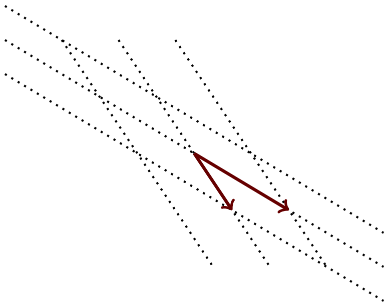
5. $\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle =$
$$\frac{18}{81} \cdot 5 \cdot 5 + \frac{21}{81} \cdot 5 \cdot (-3) + \frac{21}{81} \cdot (-3) \cdot 5 + \frac{29}{81} \cdot (-3) \cdot (-3) = 1.$$

K čemu jsou takové výpočty dobré?

Skalární součin

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{18}{81} \cdot x_1 y_1 + \frac{21}{81} \cdot x_1 y_2 + \frac{21}{81} \cdot x_2 y_1 + \frac{29}{81} \cdot x_2 y_2$$

z předchozího příkladu „vidí“



jako jednotkovou pravoúhlou síť.

Co zatím v $\mathbb{R}^n$ umíme

Pro zadanou bázi $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ umíme sestrojit skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ tak, že $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ je ortonormální báze vzhledem k $\langle - \mid - \rangle$.

Příště se v $\mathbb{R}^n$ naučíme

Pro zadanou bázi $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ a zadaný skalární součin $\langle - \mid - \rangle$ v $\mathbb{R}^n$ nalezneme novou bázi $(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$, která je ortonormální vzhledem k $\langle - \mid - \rangle$.

Hledaná báze bude navíc splňovat rovnost $\mathrm{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k)$ pro všechna $k = 1, \ldots, n$.

K tomu bude zapotřebí zavedení nových pojmů: ortogonální projekce a ortogonální rejekce.