Matice ortogonální projekce a metoda nejmenších čtverců

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 12.4 a Dodatku C skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Minulá přednáška

1. Ortogonalisační proces (Gram-Schmidt).
2. Ortogonální projekce a ortogonální rejekce.
3. Ortogonální projekce na podprostor s ortogonální bází.

Dnešní přednáška

V této přednášce se zaměříme pouze na lineární prostory $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.

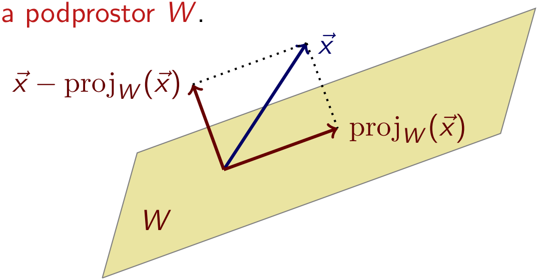
1. Výpočet matice ortogonální projekce na podprostor (s libovolnou bází) v $\mathbb{R}^n$.
2. Charakterisace matic ortogonálních projekcí v $\mathbb{R}^n$.
3. Aplikace projekcí na řešení soustav lineárních rovnic (metoda nejmenších čtverců).[a]

---

[a] Budeme se věnovat pouze nejjednodušší formě metody nejmenších čtverců v $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Vše je podrobně popsáno v tomto výtahu z přednášky.

Připomenutí: projekce na podprostor a rejekce podprostorem

Ať W je podprostor lineárního prostoru L se skalárním součinem, ať $\vec{x}$ je libovolný vektor v L.
Vektoru $\mathrm{proj}_W(\vec{x})$, který leží ve W a pro který je $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$ kolmý na všechny vektory z W, říkáme ortogonální projekce vektoru $\vec{x}$ na podprostor W.

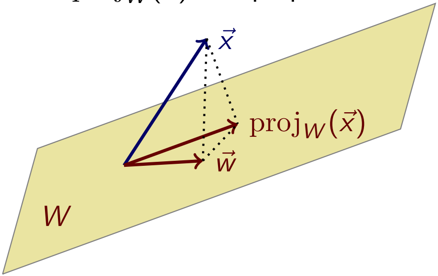


Vektoru $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$ říkáme ortogonální rejekce vektoru $\vec{x}$ podprostorem W a značíme jej $\mathrm{rej}_W(\vec{x})$.[a]

[a]Slovník: projekce=promítnutí, rejekce=odmítnutí.

Ortogonální rejekce je „nejkratší“ ze všech rejekcí

Pro jakýkoli vektor $\vec{x}$, který neleží ve W, a pro jakýkoli vektor $\vec{w}$, který ve W leží, vzniká pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $\mathrm{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}$ a $\vec{x} - \mathrm{proj}_W(\vec{x})$, a s přeponou $\vec{x} - \vec{w}$.



Díky Pythagorově větě tedy pro všechny vektory $\vec{w}$ z W platí[a]

$$\|\vec{x}-\mathrm{proj}_W(\vec{x})\|^2 \leq \|\vec{x}-\mathrm{proj}_W(\vec{x})\|^2+\underbrace{\|\mathrm{proj}_W(\vec{x}) - \vec{w}\|^2}_{\geq 0} = \|\vec{x}-\vec{w}\|^2$$

[a]Na této nerovnosti je založena metoda nejmenších čtverců, viz cvičení a druhá část této přednášky.

Projekce na podprostor, u kterého neznáme ortogonální bázi

1. V obecném případě je vždy možno nejprve obecnou bázi ortogonalisovat (Gram-Schmidt) a poté použít vzorec pro projekci na podprostor s ortogonální bází.
2. V případě $\mathbb{R}^n$ lze využít znalosti metrického tensoru, viz níže.

Tvrzení

Ať W je podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem zadaným metrickým tensorem $\mathbf{G}$. Ať vektory $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ tvoří jakoukoli bázi podprostoru W. Označme jako $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ příslušnou matici. Potom[a]

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x}$$

[a] Tento divoký vzorec má krotkou podobu pro standardní skalární součin: platí $\mathrm{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}$, protože $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$.

Důkaz.

Přednáška. ■

Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním[a] skalárním součinem nalezněte matici projekce na rovinu $W = \mathrm{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix})$. Víme: pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, je $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$ matice ortogonální projekce na W.

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru $\begin{pmatrix}-20\\4\\6\end{pmatrix}$ na W spočítáme součinem

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-20\\4\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-8\\6\end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + (-14) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

[a] Metrický tensor tedy je $\mathbf{G} = \mathbf{E}_3$.

Příklad (výpočet matice ortogonální projekce)

V prostoru $\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem s metrickým tensorem[a] $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ spočtěte matici projekce na přímku $W = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Víme: pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, je $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G}$ matice ortogonální projekce.

Tudíž je

$$\mathbf{P}_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot ((1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})^{-1} (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Například projekci vektoru $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ na W spočítáme součinem

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{26}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

[a] Jde o nestandardní skalární součin: to znamená, že jde o ortogonální projekci vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y}$.

Věta (charakterisace matic ortogonálních projekcí)

Ať $\mathbb{R}^n$ je vybaven skalárním součinem $\langle - \mid - \rangle$ s metrickým tensorem $\mathbf{G}$. Pro matici $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je ekvivalentní:

1. $\mathbf{P}$ je matice ortogonální projekce na podprostor $\mathrm{im}(P)$ dimense k.
2. $\mathrm{rank}(\mathbf{P}) = k$ a platí $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ a $\langle \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} \rangle$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Poznámka

Pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ (tj. pro $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$) lze druhou podmínku přeformulovat takto:

2. $\mathrm{rank}(\mathbf{P}) = k$ a platí $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ a $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$.

Úvaha o bodech na přímce

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň dvouprvková množina reálných čísel. Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ leží na přímce tvaru $y = ax + b$ právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

nad $\mathbb{R}$ má řešení $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Důležité pozorování: protože $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň dvouprvková množina reálných čísel, má matice výše uvedené soustavy hodnost 2.

Úvaha o bodech na přímce (pokrač.)

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň dvouprvková množina reálných čísel. Co dělat, když body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ na přímce tvaru $y = ax + b$ neleží?

Lze nalézt přímku tvaru $y = ax + b$, která je (pro zadané body) nejlepší možnou volbou?[a]

Důležité pozorování: soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & y_1 \\ x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

řešení mít nemůže, hodnost matice soustavy je ale stále 2.

[a] Zatím nevíme, co myslíme slovem nejlepší. Pravděpodobně chceme minimalisovat chybu, které se dopustíme.

Příklad

Tři body $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$ na přímce neleží.[a]

Označme soustavu $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array}\right)$ jako $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Víme:

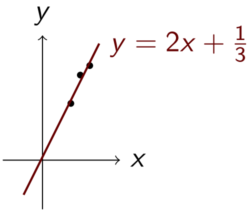
1. $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ nemá řešení, tj. vektor $\mathbf{b}$ neleží v prostoru $W = \mathrm{im}(\mathbf{A})$.
2. Sloupce matice $\mathbf{A}$ tvoří bázi prostoru W.
3. Soustava $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$ má právě jedno řešení, protože $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ je positivně definitní (tudíž regulární). Označme toto řešení $\widehat{\mathbf{x}}$. Platí tedy $\widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$.
4. Matice $\mathbf{P}_W$ ortogonální projekce na W je tvaru $\mathbf{P}_W = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$. Tudíž $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_W \cdot \mathbf{b}$.
5. Takže: $\|\mathrm{rej}_W(\mathbf{b})\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$ pro vš $\mathbf{x}$. To je ono: minimalisovali jsme čtverec chyby $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|$.

[a] Body na první pohled „téměř“ leží na přímce $y = 2x$.

Příklad (pokrač.)

Vyřešíme tedy soustavu $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array}\right)$ metodou nejmenších čtverců.[a]

1. Soustava $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$ má tvar $\left(\begin{array}{cc|c} 50 & 12 & 104 \\ 12 & 3 & 25 \end{array}\right)$ a má jediné řešení $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.
2. Hledaná přímka má tvar $y = 2x + \frac{1}{3}$.



[a] Řešením získáme „nejlepší možnou“ přímku, kterou lze proložit zadanými body. Říká se jí regresní přímka.

Příklad (pokrač.)

Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ není řešením soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 10 \end{array}\right)$.

Platí $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix}$.

Čtverec chyby, které jsme se dopustili, je

$$\| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19/3 \\ 25/3 \\ 31/3 \end{pmatrix} \|^2 = \| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \|^2 = 2/3$$

a jde o nejmenší čtverec chyby.

Řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců

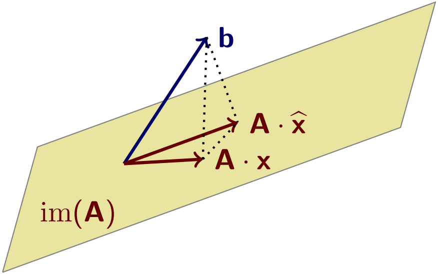
Ať $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ je soustava nad $\mathbb{R}$, kde matice $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce. Řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců probíhá následovně:

1. Protože $\mathbf{A}$ má lineárně nezávislé sloupce, je matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ positivně definitní, tedy regulární.
2. Soustava $(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})$ má tedy jediné řešení, označme toto řešení $\widehat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$.
   Tomuto jedinému řešení $\widehat{\mathbf{x}}$ se říká řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců.

   Má to následující důvod:

   1. Platí rovnost $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$. To znamená, že $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{b}$ na $\mathrm{im}(\mathbf{A})$.
   2. Protože ortogonální rejekce $\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}$ vektoru $\mathbf{b}$ podprostorem $\mathrm{im}(\mathbf{A})$ je „nejkratší“ rejekcí vektoru $\mathbf{b}$ podprostorem $\mathrm{im}(\mathbf{A})$, platí $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$, pro každé $\mathbf{x}$.

Ilustrace řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců



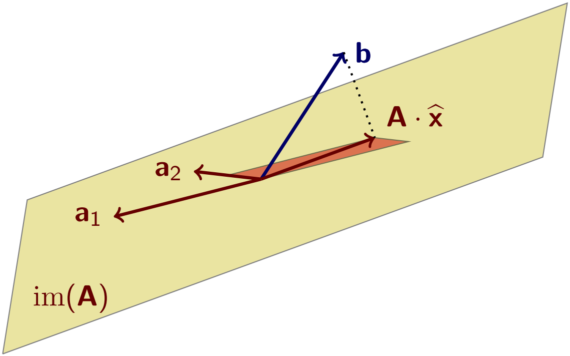
Pokud má matice soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ lineárně nezávislé sloupce, potom platí:

1. Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má právě jedno řešení $\widehat{\mathbf{x}}$ metodou nejmenších čtverců.
2. Pro každé $\mathbf{x}$ platí nerovnost $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$.

Další pohled na řešení soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců

Pro matici $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ s lineárně nezávislými sloupci tvoří seznam $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ uspořádanou bázi podprostoru $W = \mathrm{im}(\mathbf{A})$.

Řešení $\widehat{\mathbf{x}}$ soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ metodou nejmenších čtverců je vektor souřadnic vektoru $\mathbf{P}_W \cdot \mathbf{b}$ vzhledem k uspořádané bázi $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$.



Příklad (řešení soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců)

Soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$ nemá řešení (Frobeniova věta).

V našem případě: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soustava $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$ má jediné řešení $\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Protože $\mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$, vektor $\widehat{\mathbf{x}}$ není řešením soustavy $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Ovšem jakýkoli jiný vektor $\mathbf{x}$ by „dopadl ještě hůře“. Pro všechny vektory $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^2$ totiž platí nerovnost

$$0.5 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \widehat{\mathbf{x}}\|^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|^2$$

Příklad (proložení paraboly)

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel. Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ leží na parabole tvaru $y = ax^2 + bx + c$ právě tehdy, když soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

má řešení $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Příklad (proložení paraboly, pokrač.)

Důležité pozorování: protože $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel, má matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

hodnost 3.

Opravdu: ať x_i, x_j, x_k jsou tři navzájem různé hodnoty z množiny $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Potom

$$\begin{vmatrix} x_i^2 & x_i & 1 \\ x_j^2 & x_j & 1 \\ x_k^2 & x_k & 1 \end{vmatrix} = (x_i - x_k) \cdot (x_i - x_k) \cdot (x_j - x_k) \neq 0$$

Příklad (proložení paraboly, pokrač.)

Ať $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je alespoň tříprvková množina reálných čísel. Body

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

v $\mathbb{R}^2$ lze proložit parabolu $y = ax^2 + bx + c$, kde $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ je řešením soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 & y_n \end{array}\right)$$

metodou nejmenších čtverců.

Závěrečná poznámka

Řešení soustav metodou nejmenších čtverců má řadu aplikací. Je základem regresních metod v matematické statistice, viz například knihu

- Douglas C. Montgomery a George C. Runger, *Applied statistics and probability for engineers*, 3.ed, John Wiley & Sons, New York, 2003.

Historická poznámka

Autorem metody nejmenších čtverců je německý matematik Karl Friedrich Gauss (1777–1855). V roce 1801 Gauss tuto metodu použil pro predikci dráhy planetky Ceres, která 40 dní po objevení zmizela evropským astronomům za Sluncem. Gauss předpověděl polohu, kde se planetka za 10 měsíců opět objeví.