SVD rozklad a pseudoinverse

Odpřednesenou látku naleznete v kapitole 14 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Cíle této přednášky

1. Každá symetrická matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ má pouze reálné vlastní hodnoty a je diagonalisovatelná.[a]
   Navíc: vlastní vektory symetrické matice tvoří „hezkou bázi“ prostoru $\mathbb{R}^n$.
2. Jako důsledek předchozího ukážeme, že každou matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ lze napsat jako[b]
   $$\mathbf{M} = \underbrace{\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T}_{\text{SVD rozklad } \mathbf{M}}$$
   kde $\mathbf{S}$ je „diagonální“ a $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ a $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$.
3. Ukážeme aplikace SVD rozkladu.

---

[a] Tento výsledek nebudeme dokazovat, vyžaduje hlubší znalosti z reálné analýzy.

[b] Výpočty z této přednášky jsou časově velmi náročné. U ústní zkoušky může být vyžadováno základní pochopení teorie (str 7 a 8 tohoto tématu), nikoli výpočty.

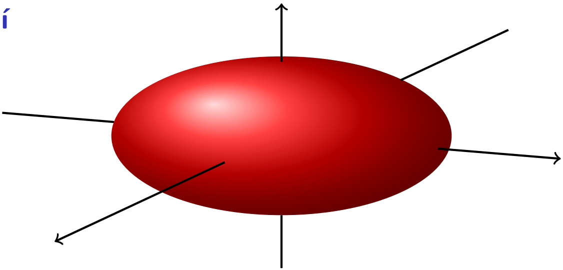
Věta o hlavních osách (pro standardní skalární součin)

Pro každou symetrickou reálnou matici $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Navíc matice $\mathbf{A}$ má pouze reálné vlastní hodnoty.

Důkaz.

Bez důkazu (je těžký). Viz Důsledek 14.1.5 skript. ■

Vysvětlení



$\mathbf{A}$ zobrazuje jednotkovou kouli na (případně degenerovaný) elipsoid.

Důsledek — SVD rozklad matice pro stand. skalární součin

Libovolnou matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ lze zapsat ve tvaru $\mathbf{USV}^T$, kde

1. $\mathbf{V} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ a $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ jsou ortogonální, tj. $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$ a $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$.
2. $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ má na hlavní diagonále kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_h$ (tzv. singulární hodnoty matice $\mathbf{M}$), kde $h = \operatorname{rank}(\mathbf{M})$. Všude jinde má matice $\mathbf{S}$ nuly.

Myšlenka důkazu.

1. Matice $\mathbf{A} = \mathbf{M}^T\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ je symetrická. Její vlastní hodnoty jsou nezáporné. Seřaďte je: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_s \geq 0$. Označte příslušnou ortonormální bázi jako $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$.
2. Definujte $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sigma_s = \sqrt{\lambda_s}$. Vyberte nenulová σ_i: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_h > 0$ a definujte $\mathbf{u}_i = \mathbf{M}\mathbf{v}_i/\sigma_i$ pro $i = 1, \ldots, h$ a doplňte na ortonormální bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$.

Příklad (SVD rozklad)

Nalezneme SVD rozklad pro $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

1. $\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 4 & 8 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 40 & 140 \\ 40 & 80 & 100 \\ 140 & 100 & 170 \end{pmatrix}$
2. Vlastní hodnoty $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ jsou $\lambda_1 = 360$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 0$. Příslušná ortonormální báze vlastních vektorů je $\left(\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}\right)$. Tudíž $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.
3. Singulární hodnoty $\mathbf{M}$ jsou $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 6\sqrt{10}$,

   $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 3\sqrt{10}$.

Příklad (SVD rozklad, pokrač.)

4. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{M}\mathbf{v}_1/\sigma_1$ a $\mathbf{u}_2 = \mathbf{M}\mathbf{v}_2/\sigma_2$:

$$\frac{1}{6\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

5. Plný SVD rozklad $\mathbf{M}$ je:

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

Geometrie SVD rozkladu $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$

Matice $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s)$ a $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$ jsou tvořeny vektory nových ortonormálních bází V a U prostorů $\mathbb{R}^s$ a $\mathbb{R}^r$, ve kterých se $\mathbf{M} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ jeví jako změna měřítka $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.

$$\mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{T}_{K_s \mapsto V}} \mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathbb{R}^r \xrightarrow{\mathbf{T}_{U \mapsto K_r}} \mathbb{R}^r$$

Protože $\mathbf{T}_{K_s \mapsto V} = (\mathbf{T}_{V \mapsto K_s})^{-1} = \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ a $\mathbf{T}_{U \mapsto K_r} = \mathbf{U}$, znázorňuje vrchní obrázek opravdu

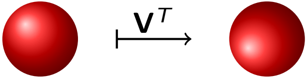
$$\mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{V}^T} \mathbb{R}^s \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathbb{R}^r \xrightarrow{\mathbf{U}} \mathbb{R}^r$$

A to je přesně SVD rozklad matice $\mathbf{M}$.

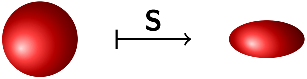
Geometrie SVD rozkladu $\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ (pokrač.)

Obraz jednotkové koule v $\mathbb{R}^s$ při zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{M}\mathbf{x}$:

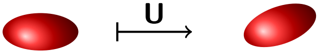
1. Rotace (případně nevlastní) $\mathbf{V}^T : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$:



2. Změna měřítka (případně i s degenerací) $\mathbf{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$:



3. Rotace (případně nevlastní) $\mathbf{U} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$:



Redukce SVD rozkladu a aproximace SVD rozkladem

Plný SVD rozklad $\mathbf{USV}^T$ matice $\mathbf{M}$ hodnosti h lze psát jako

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^{h} \sigma_j \cdot \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T$$

kde $\mathbf{u}_j$ jsou sloupce $\mathbf{U}$ a $\mathbf{v}_j$ jsou sloupce $\mathbf{V}$.

Částečné součty

$$\mathbf{M}_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \cdot \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T$$

pro $k \leq h$ mají hodnost k a platí

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F = \min \{ \|\mathbf{M} - \mathbf{X}\|_F \mid \mathbf{X} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r,\ \mathrm{rank}(\mathbf{X}) \leq k \}$$

kde

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{s} \mathbf{x}_j^T \cdot \mathbf{x}_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} x_{ij}^2}$$

je Frobeniova norma matice $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s) = (x_{ij})$.

Příklad

Pro $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ lze psát její SVD rozklad

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

jako

$$\mathbf{M} = 6\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + 3\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{M}_1 = 6\sqrt{10} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18/15 & 9/15 & 18/15 \\ 6/15 & 3/15 & 6/15 \end{pmatrix}$$

Platí
$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{450}} \approx 0.477$$

Chyba při nahrazení částečným součtem SVD rozkladu

Platí rovnost:

$$\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_h^2}$$

Speciálně:

$$\|\mathbf{M}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_h^2}$$

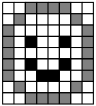
Podílu

$$\frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}_k\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} = \sqrt{\frac{\sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_h^2}{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_h^2}}$$

říkáme relativní změna matice $\mathbf{M}$ (při nahrazení $\mathbf{M}$ k-tým částečným součtem jejího SVD rozkladu).

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat

Obrázek



lze zadat maticí

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kde $0 =$ bílá, $0.5 =$ šedá, $1 =$ černá.

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat (pokrač.)

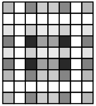
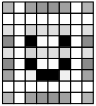
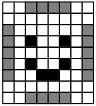
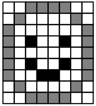
SVD rozklad matice $\mathbf{M}$ má tvar $\mathbf{USV}^T$, kde matice $\mathbf{S}$ je:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2.57 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ke kompresi stačí použít první čtyři singulární hodnoty (prvky na hlavní diagonále $\mathbf{S}$) matice $\mathbf{M}$, protože pátá až osmá singulární hodnota je rovna nule.

SVD rozklad matice lze použít ke kompresi dat (pokrač.)

Obrázky pro první čtyři aproximace matice **M** vypadají takto:

Relativní změny matice **M** jsou následující:

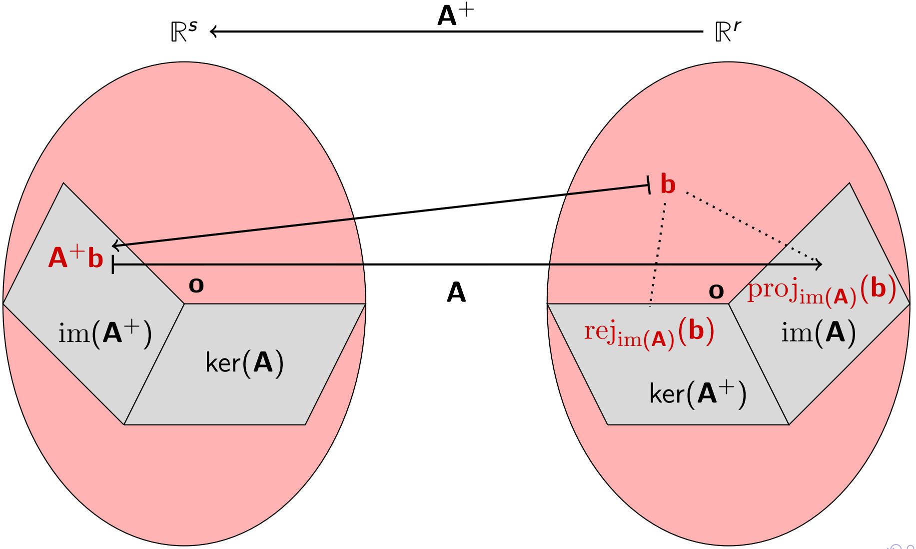
$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_1\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.61^2+1.13^2+1.00^2}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} \approx 0.65$$

$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_2\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.13^2+1.00^2}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} \approx 0.45$$

$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_3\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{1.00^2}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} \approx 0.30$$

$$\frac{\|\mathbf{M}-\mathbf{M}_4\|_F}{\|\mathbf{M}\|_F} \approx \sqrt{\frac{0}{2.57^2+1.61^2+1.13^2+1.00^2}} = 0.00$$

Co dělat, když matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ nemá inversi?



Tvrzení

Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$ je matice. Potom existuje nanejvýš jedna matice $\mathbf{A}^+ : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$, která splňuje následující čtyři podmínky[a]

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+, \quad (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$$

[a] Matici $\mathbf{A}^+$, která tyto čtyři podmínky splňuje, říkáme pseudoinverse matice $\mathbf{A}$.

Důkaz.

Bez důkazu (není těžký, ale není zajímavý). Pro zájemce, viz Tvrzení 14.4.1 skript. ■

Příklady pseudoinversí

1. Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je regulární matice. Potom $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

   Platí totiž rovnosti:

   1. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}$
   2. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$
   3. $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
   4. $(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{E}_n = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$

2. Ať $\mathbf{O}_{s,r} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$. Potom $(\mathbf{O}_{s,r})^+ = \mathbf{O}_{r,s}$.

   Platí totiž rovnosti:

   1. $\mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r} = \mathbf{O}_{s,r}$
   2. $\mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s} = \mathbf{O}_{r,s}$
   3. $(\mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r})^T = \mathbf{O}_{s,s} = \mathbf{O}_{r,s}\mathbf{O}_{s,r}$
   4. $(\mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s})^T = \mathbf{O}_{r,r} = \mathbf{O}_{s,r}\mathbf{O}_{r,s}$

Příklady pseudoinversí (pokrač.)

3. Ať $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ má hodnost k. Potom $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$.

   Platí totiž rovnosti:

   1. $\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}$
   2. $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$
   3. $((\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A})^T = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
   4. $(\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$

   Pozorování: v tomto případě platí

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathrm{proj}_{\mathrm{im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$$

   To nás nepřekvapuje: tak jsme pseudoinversi vymysleli!

Věta (nalezení pseudoinverse pomocí SVD rozkladu)

Ať $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ je plný SVD rozklad matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$. Potom platí:

1. Matice
$$\mathbf{S}^+ = (\frac{1}{\sigma_1}\mathbf{e}_1, \ldots, \frac{1}{\sigma_h}\mathbf{e}_h, \underbrace{\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{o}}_{(r-h)\text{-krát}})$$
je pseudoinverse matice $\mathbf{S}$.
2. Matice
$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{S}^+\mathbf{U}^T$$
je pseudoinverse matice $\mathbf{A}$.

Důkaz.

Bez důkazu. Viz Důsledek 14.4.5 skript. ∎

Příklad (výpočet pseudoinverse pomocí SVD rozkladu)

Nalezneme $\mathbf{M}^+$ pro matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 11 \\ -2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Plný SVD rozklad matice $\mathbf{M}$ je roven

$$\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

a proto

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^+ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/(6\sqrt{10}) & 0 \\ 0 & 1/(3\sqrt{10}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{1}{180} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 7 & 13 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Další aplikace SVD rozkladu — nepovinné

1. Pseudoinverse matic souvisí s metodou nejmenších čtverců, viz Dodatek C skript.
   Metoda nejmenších čtverců slouží k „proložení optimální křivky" naměřenými daty s nejmenší kvadratickou chybou.
2. Latentní sémantické indexování databází (také: LSI), viz Dodatek G skript.
   Pro databáze lze vytvořit vektorový model a SVD rozklad lze použít k vyhledání skrytých sémantických konceptů v databázi.
3. Analýza hlavní komponenty (také: PCA), viz Dodatek G skript.
   Při analýze multidimensionálních dat lze objevit „hlavní komponenty dat", tj. lze nalézt podstatné naměřené veličiny.
4. A mnoho dalších aplikací...