Vzájemná poloha afinních podprostorů

Odpřednesenou látku naleznete v kapitolách 7.1, 7.2 a 7.3 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Co již víme? (přednášky z teorie soustav lineárních rovnic)

1. Pro $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ a $\mathbf{b}$ z $\mathbb{F}^r$ je obecné řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tvaru $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$.
   Množina $\mathbf{p} + \ker(\mathbf{A})$ je d-dimensionální afinní podprostor (kde $d = \mathrm{def}(\mathbf{A})$) v prostoru $\mathbb{F}^s$. Tato plocha prochází bodem $\mathbf{p}$.
2. Jakoukoli podmnožinu prostoru $\mathbb{F}^s$ tvaru $\mathbf{p} + W$, kde W je lineární podprostor prostoru $\mathbb{F}^s$ a $\mathbf{p}$ je bod $\mathbb{F}^s$, lze považovat za množinu řešení nějaké vhodné soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Dnešní přednáška

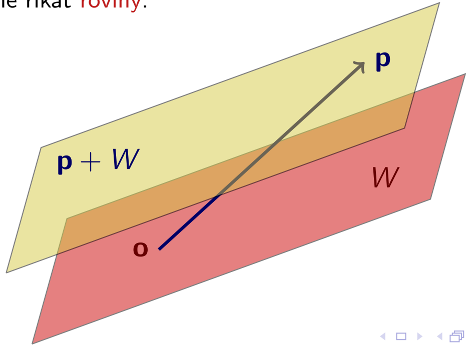
1. Zaměříme[a] se na afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$.
2. Budeme studovat vzájemnou polohu afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.
3. Porovnáme dva popisy afinních podprostorů: parametrický zápis a rovnicový zápis.

[a] Celá dnešní přednáška projde v prostorech typu $\mathbb{F}^n$ nad $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F}$ je těleso.

Definice

Množině $\mathbf{p} + W = \{\mathbf{p} + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W\}$, kde W je lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{p}$ je bod z $\mathbb{R}^n$, říkáme afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Dimense[a] afinního prostoru $\mathbf{p} + W$ je číslo $\dim(W)$. Lineárnímu prostoru W říkáme směr afinního podprostoru $\mathbf{p} + W$.

[a] Afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 0 budeme říkat body, afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 1 budeme říkat přímky, afinním podprostorům v $\mathbb{R}^n$ dimense 2 budeme říkat roviny.



Příklady afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^4$

Množiny

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\6\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}10\\9\\3\\-1\end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}), \quad \begin{pmatrix}1\\7\\-3\\9\end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix}1\\6\\0\\1\end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix})$$

jsou afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^4$. Jejich dimense jsou postupně 0, 1, 2 a 3. A jejich směry jsou:

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\}, \quad \operatorname{span}(\begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}), \quad \operatorname{span}(\begin{pmatrix}2\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\\0\end{pmatrix}), \quad \operatorname{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix})$$

Příklad (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, intuitivní výpočet)

1. Přímky $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ jsou rovnoběžné.

   Obě přímky mají stejný směr, je jím vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Přímky $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ jsou různoběžné.

   To zjistíme následujícím způsobem: přímky nejsou rovnoběžné: rovnost $\operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ neplatí. Navíc mají obě přímky společný bod, je jím vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Příklad (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

3. Přímky $\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix})$ a $\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix})$ jsou mimoběžné.

   To zjistíme následujícím způsobem: přímky nejsou rovnoběžné: rovnost $\mathrm{span}(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix})$ neplatí. Navíc obě přímky nemají společný bod: neexistují reálná čísla s, t tak, že

$$\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

   O tom se lze snadno přesvědčit řešením příslušné soustavy rovnic.

Jak postupovat v $\mathbb{R}^n$?

Potřebujeme dobré definice a dobrá kritéria vzájemné polohy!

Definice (vzájemná poloha afinních podprostorů)

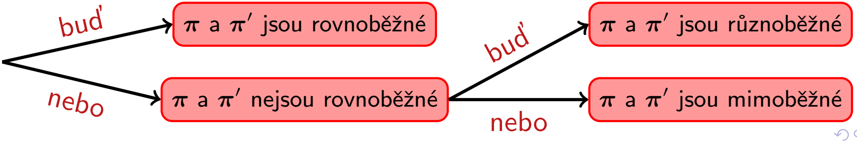
Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že

1. $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné, pokud platí $W \subseteq W'$ nebo $W' \subseteq W$.
2. $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou různoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a mají alespoň jeden společný bod.
3. $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Dimensi lineárního podprostoru $W \cap W'$ budeme říkat stupeň rovnoběžnosti afinních podprostorů $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$.

Poznámka

Pro dva afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ prostoru $\mathbb{R}^n$ platí:



Tvrzení (charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Ať $W' \subseteq W$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou disjunktní.
2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v $\boldsymbol{\pi}$ a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v $\boldsymbol{\pi}'$ vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ neleží ve W.
3. Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ neleží ve W.
4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v $\boldsymbol{\pi}$ a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v $\boldsymbol{\pi}'$ tak, že vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ neleží ve W.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení (charakterisace různoběžných afinních podprostorů)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou různoběžné.
2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v $\boldsymbol{\pi}$ a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v $\boldsymbol{\pi}'$ vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ leží ve $W \vee W'$.
3. Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ leží ve $W \vee W'$.
4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v $\boldsymbol{\pi}$ a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v $\boldsymbol{\pi}'$ tak, že vektor $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ leží ve $W \vee W'$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení (charakterisace mimoběžných afinních podprostorů)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné.
2. Vektor $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ neleží ve $W \vee W'$.

Důkaz.

Přednáška. ■

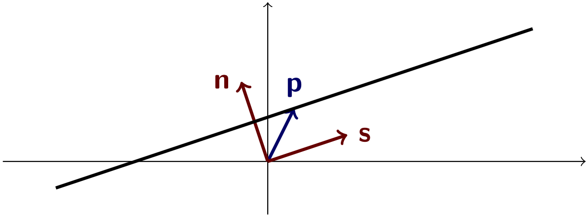
Příklad (dva různé zápisy jedné přímky)

Dva zápisy téže přímky v $\mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot t,\quad t\in\mathbb{R}}_{\text{parametrický zápis}} \qquad \underbrace{-x+3y=5}_{\text{rovnicový zápis}}$$

Oba typy zápisu jsme již potkali při úvahách o řešitelnosti soustav lineárních rovnic a zapisovali jsme je jako

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \qquad (-1\ 3 \mid 5)$$



Získáváme informace o směrovém vektoru a normálovém vektoru.

Tvrzení (Existence parametrického a rovnicového zápisu)

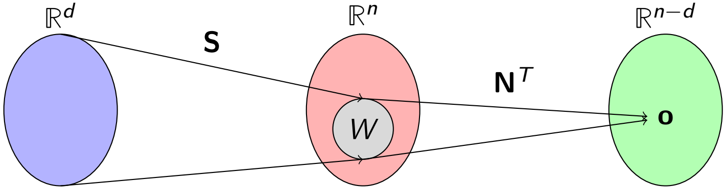
Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ je d-dimensionální afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom existují dvě matice $\mathbf{S} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{N}^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ tak, že platí:

1. Platí $\mathrm{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$, $\mathrm{rank}(\mathbf{N})^T = n - d$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = d$.
2. Vektor $\mathbf{x}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ pro nějaké $\mathbf{t}$. Tomuto zápisu říkáme parametrický zápis afinního podprostoru $\boldsymbol{\pi}$.
3. Vektor $\mathbf{x}$ leží v $\boldsymbol{\pi}$ právě tehdy, když platí rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$. Tomuto zápisu říkáme rovnicový zápis afinního podprostoru $\boldsymbol{\pi}$.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Poznámky

1. 

$$\mathrm{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$$

Pozor: musí platit rovnosti $\mathrm{rank}(\mathbf{S}) = d$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{N}^T) = n - d$.

2. Proč je rovnicový zápis ve tvaru $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$?
   1. Bod $\mathbf{p}$ vyhovuje rovnici $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$. Ihned vidíme, že afinní podprostor prochází bodem $\mathbf{p}$.
   2. Pokud označíme jako $\mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_{n-d})$, pak rovnost $\mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \mathbf{o}$ je ekvivalentní rovnostem
   $\langle \mathbf{n}_1 \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{n}_2 \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0, \quad \ldots, \quad \langle \mathbf{n}_{n-d} \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$
   To znamená, že sloupce matice $\mathbf{N}$ si lze přestavit jako seznam lineárně nezávislých „normál“ příslušného afinního podprostoru.

Tvrzení (charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$.

1. Následující podmínky jsou ekvivalentní:
   1. Platí $W' \subseteq W$.
   2. Platí $\mathrm{span}(\mathbf{s}'_1, \ldots, \mathbf{s}'_{d'}) \subseteq \mathrm{span}(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_d)$, kde $\mathbf{S}' = (\mathbf{s}'_1, \ldots, \mathbf{s}'_{d'})$ a $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_d)$.
   3. Simultánní soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{S}')$ má řešení.
2. Ať $W' \subseteq W$. Následující podmínky ekvivalentní:
   1. Afinní podprostory π a π' jsou disjunktní.
   2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v π a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v π' soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ nemá řešení.
   3. Soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ nemá řešení.
   4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v π a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v π' tak, že soustava $(\mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ nemá řešení.

Důkaz.
Přednáška.

Tvrzení (charakterisace různoběžných afinních podprostorů)

Ať $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + W$ a $\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Ať $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. Afinní podprostory $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou různoběžné.
2. Pro jakýkoli vektor $\mathbf{x}$ v $\boldsymbol{\pi}$ a jakýkoli vektor $\mathbf{x}'$ v $\boldsymbol{\pi}'$ soustava $(\mathbf{S}',\ \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ má řešení.
3. Soustava $(\mathbf{S}',\ \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ má řešení.
4. Existuje vektor $\mathbf{x}$ v $\boldsymbol{\pi}$ a existuje vektor $\mathbf{x}'$ v $\boldsymbol{\pi}'$ tak, že soustava $(\mathbf{S}',\ \mathbf{S} \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}')$ má řešení.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Tvrzení (charakterisace mimoběžných afinních podprostorů)

Ať $\pi = \mathbf{p} + W$ a $\pi' = \mathbf{p}' + W'$ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$, které nejsou rovnoběžné. Ať π a π' zadány parametricky jako $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}$ a $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{t}'$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

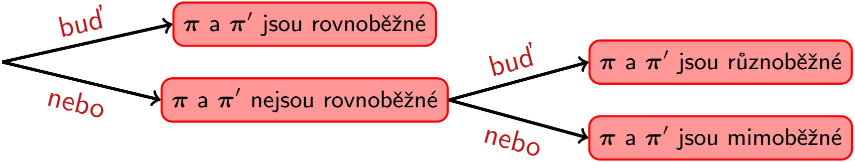
1. Afinní podprostory π a π' jsou mimoběžné.
2. Soustava $(\mathbf{S}', \ \mathbf{S} \mid \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ nemá řešení.

Důkaz.

Přednáška. ∎

Důležitá poznámka

Při rozhodování o vzájemné poloze afinních podprostorů π a π' je velmi rozumné postupovat podle obrázku



Povšiměte si, že tak tomu bude ve všech následujících příkladech.

Příklad 1 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^5$)

V $\mathbb{R}^5$ rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

1. Rovnoběžnost: ani jedna ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

nemá řešení. Takže π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 1 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^5$, pokrač.)

1. Různoběžnost: stačí zjistit, zda soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   má řešení. Protože řešení neexistuje, jsou $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ mimoběžné.

Závěr: roviny $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou mimoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 2 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

1. Rovnoběžnost: obě simultánní soustavy

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

   mají zjevně řešení; $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ jsou rovnoběžné.

2. Jsou $\boldsymbol{\pi}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ disjunktní? Stačí zjistit, zda soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

   má řešení. Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 2 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

Soustava

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

evidentně řešení nemá; přímky π a π' jsou disjunktní.

Závěr: přímky π a π' jsou rovnoběžné a disjunktní.

Příklad 3 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a

$\pi' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Příklad 3 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

1. Rovnoběžnost: žádná ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

   řešení nemá; přímky π a π' nejsou rovnoběžné.

2. Různoběžnost: protože soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

   má řešení, jsou přímky π a π' různoběžné.

Závěr: přímky π a π' jsou různoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 4 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$)

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek $\pi = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ a $\pi' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

1. Rovnoběžnost: žádná ze simultánních soustav

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

řešení nemá; přímky π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 4 (vzájemná poloha přímek v $\mathbb{R}^3$, pokrač.)

2. Různoběžnost: soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

nemá řešení, přímky π a π' jsou mimoběžné.

Závěr: přímky π a π' jsou mimoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$)

V $\mathbb{R}^4$ rozhodněte o vzájemné poloze afinních podprostorů

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \boldsymbol{\pi}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

1. Rovnoběžnost: řešíme simultánní soustavy

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Roviny budou rovnoběžné, pokud alespoň jedna simultánní soustava má řešení.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

1. Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array}$$

Simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

tedy řešení nemá.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

1. Pomocí Gaussovy eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_4 \\ R_2 \\ R_1 \\ R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 - 3R_1 \end{array}$$

Ani simultánní soustava

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

tedy řešení nemá.

Ukázali jsme, že π a π' nejsou rovnoběžné.

Příklad 5 (vzájemná poloha dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, pokrač.)

2. Různoběžnost: stačí zjistit, zda soustava[a]

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

má řešení.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ 3R_4 - R_3 \end{array}$$

Řešení existuje, π a π' jsou různoběžné.

Závěr: roviny π a π' jsou různoběžné.

[a] Pravá strana je $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Závěrečná poznámka

Tvrzení o rovnoběžnosti, různoběžnosti, mimoběžnosti, existenci parametrického zápisu a rovnicového zápisu lze stejným způsobem dokázat v prostoru $\mathbb{F}^n$, kde $\mathbb{F}$ je jakékoli těleso.[a]

[a] To znamená: rozumíme například pojmům rovnoběžnosti, různoběžnosti, mimoběžnosti afinních podprostorů prostoru $\mathbb{C}^6$ nad $\mathbb{C}$.

Co příště a přespříště?

1. Zavedeme vektorový součin v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 2$.
2. Naučíme se počítat vzájemné vzdálenosti afinních podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tyto výsledky budou podstatně využívat existenci standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$.