

Vektorový součin

Odpřednesenou látku naleznete v dodatcích B.1 a B.2 skript *Abstraktní a konkrétní lineární algebra*.

Dnešní přednáška

Budeme pracovat v \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} se **standardním** skalárním součinem.

- 1 Naučíme se spočítat **objem k -rovnoběžnostěnu** pro $k \leq n$.^a
- 2 V \mathbb{R}^n , pro $n \geq 2$, zavedeme **vektorový součin** libovolného seznamu vektorů $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$. Dokážeme některé vlastnosti vektorového součinu. Tím si připravíme půdu pro příští přednášku.

^aPřipomeňme, že umíme spočítat (dokonce orientovaný) objem n -rovnoběžnostěnu v \mathbb{R}^n .

Příští přednáška

Budeme pracovat v \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} se **standardním** skalárním součinem, a tím pádem se **standardním** pojmem vzdálenosti.

Výsledky dnešní (a minulé) přednášky využijeme ke stanovení **vzdálenosti dvou afinních podprostorů** prostoru \mathbb{R}^n .

Problém

V \mathbb{R}^n je zadán seznam vektorů $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$. Jak nalézt **neorientovaný objem**

$$V_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$$

rovnoběžnostěnu, určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$?

Řešení

Označme $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

- ① Jestliže $k = n$, potom

$$V_n(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \text{absolutní hodnota } \det(\mathbf{A})$$

- ② Jestliže $k < n$, potom $\det(\mathbf{A})$ **není definován**, protože matice \mathbf{A} **není čtvercová!**

Matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ale čtvercová je (má rozměry $k \times k$). Uvidíme, že platí

$$V_n(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \sqrt{\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

Definice (Gramova matice a Gramův determinant)

Ať matice $\mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ má sloupcový zápis $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, kde $k \leq n$.

- 1 Matici $\mathbf{A}^T \mathbf{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ budeme říkat **Gramova matice** seznamu vektorů $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.
- 2 Determinantu $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ budeme říkat **Gramův determinant** seznamu $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ a značit jej $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

Pozorování

V j -tém sloupci a i -tém řádku matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je hodnota **standardního** skalárního součinu $\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = \mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{a}_j$.

Tento jednoduchý fakt umožní dát Gramově determinantu $\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ jasný **geometrický význam**.

Tvrzení (význam Gramova determinantu)

Ať $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ je seznam vektorů v \mathbb{R}^n , $1 \leq k \leq n$. Potom platí:

- 1 Gram $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) \geq 0$.
- 2 Gram $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) > 0$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou lineárně nezávislé.
- 3 Hodnota^a $\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)}$ udává **k -dimensionální objem rovnoběžnostěnu v \mathbb{R}^n** , určeného seznamem $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$.

^aSlogan: Gramova matice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ je „druhá mocnina“ matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$. Proto je $\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ „druhá mocnina“ „determinantu“ \mathbf{A} . Absolutní hodnota „determinantu“ \mathbf{A} je tudíž $\sqrt{\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)}$. **Jde ale pouze o slogan, který slouží k zapamatování; matice \mathbf{A} obecně není čtvercová, proto o determinantu matice \mathbf{A} obecně nemůžeme mluvit!**

Důkaz.

Bez důkazu. Důkaz není těžký, ale je zdlouhavý, viz Tvrzení B.1.3 skript.

Příklad

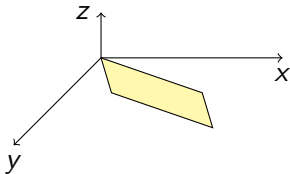
Určete 2-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v \mathbb{R}^3 , určeného

vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = 16$$

Hledaný 2-dimensionální objem je $\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = 4$.



Příklad

Určete 3-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v \mathbb{R}^4 , určeného

vektory $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Gramova matice a Gramův determinant seznamu $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ jsou

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \det \begin{pmatrix} 15 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 72$$

Hledaný 3-dimensionální objem je

$$\sqrt{\text{Gram}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} = \sqrt{72} \approx 8.485$$

Připomenutí známých faktů a **definice vektorového součinu**

- 1 Pro **každé** lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existuje **jediný** vektor \mathbf{a} v \mathbb{R}^n tak, že

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$

Jednoduché: f „je“ **matice** s 1 řádkem a n sloupci, označme ji \mathbf{a}^T , pro \mathbf{a} z \mathbb{R}^n .

- 2 Pro libovolný seznam $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ vektorů z \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, je zobrazení

$\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, -) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$
lineární.

- 3 To znamená, že **pro zadaný seznam** $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ existuje **jednoznačně** určený vektor \mathbf{a} z \mathbb{R}^n tak, že platí

$$\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \rangle$$

pro všechna \mathbf{x} z \mathbb{R}^n .

Místo \mathbf{a} budeme psát $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ a budeme mu říkat **vektorový součin** seznamu $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$.

Přepis definice vektorového součinu seznamu $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$
v \mathbb{R}^n , $n \geq 2$

$\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x} \rangle = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x})$ pro všechna \mathbf{x} z \mathbb{R}^n .

Základní vlastnost vektorového součinu seznamu

$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ v \mathbb{R}^n , $n \geq 2$

Pro jakékoli $j = 1, \dots, n - 1$ platí

$$\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x}_j \rangle = 0$$

tj. vektor $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ je **kolmý** na všechny vektory \mathbf{x}_j ,
 $j = 1, \dots, n - 1$.

To je snadné:

$$\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mid \mathbf{x}_j \rangle = \underbrace{\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_j)}_{\text{determinant se dvěma shodnými sloupci}} = 0$$

Tvrzení (výpočet vektorového součinu v \mathbb{R}^n , $n \geq 2$)

Platí rovnost $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$.

Důkaz.

Platí $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{e}_i \rangle}_{=i\text{-tá souřadnice vektoru } \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})} \cdot \mathbf{e}_i$,

protože $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je **ortonormální báze** pro standardní skalární součin v prostoru \mathbb{R}^n . Ale

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\langle \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) | \mathbf{e}_i \rangle}_{=\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i)} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i$$

podle definice vektorového součinu. ■

Výpočet vektorového součinu v \mathbb{R}^2

$$\times(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i = \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2$$

Takže

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-x_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=x_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

a to je **známý** výpočet vektoru, kolmého na vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Například } \times\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Výpočet vektorového součinu v \mathbb{R}^3 (je zvykem psát $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ místo $\times(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$)

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 + \det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3$$

Takže

$$\begin{aligned} \times\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}\right) &= \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=\det\left(\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=-\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=\det\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22} \\ x_{31}x_{12} - x_{11}x_{32} \\ x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a to je **nezapamatovatelné**.

Mnemotechnická pomůcka (nejde o definici vektorového součinu)

$$\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-2,n-1} & \mathbf{e}_{n-1} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n,n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

Jde o ryze formální^a zápis, ale užitečný. Například

$$\times\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & \mathbf{e}_1 \\ x_2 & \mathbf{e}_2 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \mathbf{e}_2 \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

a tak dále. A takové vzorce se již zapamatovat dají.

^aNapravo od rovnítka totiž mezi značkami pro determinant není zapsána matice. Počítejte ale, jako by to determinant byl. Viz následující příklady.

Příklad (výpočet vektorového součinu v \mathbb{R}^3)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ -1 & 0 & \mathbf{e}_2 \\ 2 & 4 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_3 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot \mathbf{e}_1 \\ &\quad - 2 \cdot 0 \cdot \mathbf{e}_1 - (-1) \cdot 1 \cdot \mathbf{e}_3 - 4 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot 3 \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Příklad (výpočet vektorového součinu v \mathbb{R}^4)

$$\begin{aligned} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tvrzení (další vlastnosti vektorového součinu v \mathbb{R}^n , $n \geq 2$)

- 1 Funkce $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \mapsto \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ je lineární v každé položce.
- 2 $\times(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$, pro $\pi \in S_{n-1}$.
- 3 $\times(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n-1)}) = \text{sign}(\pi) \cdot \mathbf{e}_{\pi(n)}$, pro $\pi \in S_n$.
- 4 $\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\|^2 = \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}))$.
- 5 $\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{o}$ platí právě tehdy, když vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ jsou lineárně závislé.
- 6 $\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\| = \sqrt{\text{Gram}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})}$. To jest: norma $\|\times(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\|$ je rovna $(n-1)$ -dimensionálnímu objemu rovnoběžnostěny určeného vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$.

Poznámky k důkazu na přednášce. Všechny vlastnosti plynou okamžitě z vlastností determinantu a z definice vektorového součinu.