PROLOG: Metrické prostory

11. února 2024

Definice 1 *Metrický prostor je dvojice (M, d), kde M je neprázdná množina a $d : M \times M \to [0, \infty]$ je zobrazení, takové že jsou splněny následující podmínky:*

(i) $d(x, y) = 0$ *právě tehdy když* $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *pro všechna* $x, y, z \in M$. *(Trojúhelníková nerovnost).*

Zobrazení d se nazývá metrika na M.

- Trojúhelníková nerovnost má zobecnění pro $x_1, \ldots, x_n$ in M:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)\,.$$

Příklady:

(i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ s $d(x, y) = |x - y|$.

(ii) $\mathbb{R}^n$

$$d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

eukleidovská metrika.

Další metrika

$$d(x, y) = \max_{i=1,\ldots n} |x_i - y_i|\,.$$

(iii) Diskrétní metrika na množině M:

$$d(x, y) = 1$$

pro všechna $x \neq y$.

(iv) $C[a, b]$ spojité reálné funkce na intervalu $[a, b]$

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \,.$$

Ať M je metrický prostor a $x \in M$. Definujme ε- okolí bodu x jako množinu

$$U_\epsilon(x) = \{y \in M \ : \ d(y, x) < \epsilon\} \,.$$

Terminologie a přirozené zobecnění pojmů z $\mathbb{R}^n$:

- Diameter množiny $S \subset M$ je číslo

$$diam(S) = \sup_{x,y \in S} d(x, y) \,.$$

- Množina $S \subset M$ je omezená, jestliže existuje $K \geq 0$ tak, že

$$d(x, y) \leq K \qquad \text{pro všechna } x, y \in S \,.$$

Tedy jestliže $diam(S) < \infty$.

S je omezená právě tehdy když existuje $K \geq 0$ a $x \in S$ tak že

$$d(x, s) \leq K \text{ pro všechna } s \in S\,.$$

(Dokažte z trojúhelníkové nerovnosti.)

• Množina $S \subset M$ je otevřená, jestliže s každým bodem $x \in S$ obsahuje nějaké jeho okolí: $U_\varepsilon(x) \subset S$.

• Hranice množiny $S \subset M$:

$$\partial S = \{x \in M \; : \; U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset, U_\varepsilon(x) \cap (M \setminus S) \neq \emptyset \qquad \forall \varepsilon > 0\,.\}$$

• Uzávěr množiny $S \subset M$:

$$\overline{S} = S \cup \partial S\,.$$

• $S \subset M$ je uzavřená $\Leftrightarrow \partial M \subset M \Leftrightarrow M = \overline{M}$.

• S je otevřená právě tehdy když $S \cap \partial S = \emptyset$.

• Pozorování: $\partial S = \partial(M \setminus S)$. To okamžitě implikuje, že

Tvrzení 2 *Množina $S \subset M$ je uzavřená právě tehdy když $M \setminus S$ je otevřená.*

Definice 3 *Množina $S \subset M$ je hustá v M, jestliže $S \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ pro každé okolí $U_\varepsilon(x)$. Prostor M je separabilní, jestliže má hustou spočetnou podmnožinu.*

Příklad 4 *Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v prostoru $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou. Prostory $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ s eukleidovskou metrikou jsou separabilní.*

Definice 5 *Posloupnost* $(x_n) \subset M$ *má limitu* $x \in M$, $\lim_n x_n = x$, *jestliže*

$$\lim_n d(x, x_n) = 0 .$$

V tomto případě říkáme, že posloupnost (x_n) *je konvergentní.*

Posloupnost (x_n) *je cauchyovská jestliže pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0 *tak že*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ pro všechna } n, m \geq n_0 .$$

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu: Když $x_n \to x$ and $x_n \to y$, pak

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \to 0 .$$

Tedy $d(x, y) = 0$, a proto $x = y$.

Platí, že posloupnost (x_n) je cauchyovská právě tehdy když

$$\lim_{n\to\infty} diam\{(x_m)_{m \geq n}\} = 0 .$$

Základní vlastnosti:

Tvrzení 6 *Ať* M *je metrický prostor. Platí následující tvrzení.*

(i) *Každá cauchyovská posloupnost je omezená.*

(ii) *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz:

(i) Dle cauchyovskosti, pro $\varepsilon = 1/2$ existuje n_0 tak, že pro $n, m \geq n_0$ platí $d(x_n, x_m) < 1/2$. Pokud je tedy $n, m \geq n_0$ je

$$d(x_n, x_m) \leq 1/2 .$$

Pokud je $n \leq n_0 \leq m$ je

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + 1/2\,.$$

In summary,

$$diam(x_n) \leq 1/2 + \max_{n,m \leq n_0} d(x_n, x_m)\,.$$

(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $n, m \geq n_0$, pak máme

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

- $S \subset M$:

$$\overline{S} = \{x \in M : \exists\,(x_n) \subset S \text{ tak, že } \lim x_n = x\}\,.$$

Tedy $S \subset M$ je uzavřená množina právě tehdy když

$$x_n \to x \in M, (x_n) \subset S \Rightarrow x \in S\,.$$

Definice 7 *Metrický prostor M je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.*

Tvrzení 8 *Kartézské mocniny $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ s eukleidovskou metrikou jsou úplné.*

Příklad 9 *Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ s eukleidovskou metrikou není úplný prostor. Například, posloupnost (q_n) racionálních čísel, která konverguje k $\sqrt{2}$, je cauchyovská, ale nemá limitu v $\mathbb{Q}$.*

Definice 10 *Bijektivní zobrazení* $T : (M_1, d_1) \to (M_2, d_2)$ *mezi metrickými prostory se nazývá izometrie jestliže*

$$d(T(x), T(y)) = d(x, y) \qquad \forall x, y \in M_1 \,.$$

Prostory mezi kterými existuje izometrie se nazývají izometrické.

Věta 11 *Pro každý metrický prostor* (M, d) *existuje metrický prostor* $(\tilde{M}, \tilde{d})$ *takový, že (i)* M *je hustá podmnožina množiny* $\tilde{M}$ *(ii)* $d(x, y) = \tilde{d}(x, y)$ *pro všechna* $x, y \in M$*. Všechny prostory s vlastnostmi (i) a (ii) jsou izometrické.*

Definice 12 *Prostor* $\tilde{M}$ *z předchozí věty se nazývá zúplnění prostoru* M*. Zúplnění je jediné až na izometrii.*

Příklad 13 $\mathbb{R}^n$ *s eukleidovskou metrikou je zúplněním prostoru* $\mathbb{Q}^n$*.*

Definice 14 *Nechť* (M_1, d_1) *a* (M_2, d_2) *jsou metrické prostory a* $T : M_1 \to M_2$*.*

(i) *Zobrazení* T *je spojité jestliže*

$$x_n \to x \text{ implikuje } T(x_n) \to T(x) \,.$$

(ii) *Zobrazení* T *je spojité v bodě* $x_0 \in M_1$ *jestliže*

$$x_n \to x_0 \text{ implikuje } T(x_n) \to T(x_0) \,.$$

- Zobrazení T je spojité jestliže je spojité v každém bodě.

- Zobrazení $T : M_1 \to M_2$ je spojité v bodě $x_0 \in M_1$ právě tehdy když

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $d(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ kdykoliv $d(x, x_0) < \delta$.

Úplnost a Věta o pevném bodě

Definice 15 *Ať (M, d) je metrický prostor. Ať $T : M \to M$ je zobrazení. Pak se $x \in M$ nazývá **pevným bodem** zobrazení T jestliže platí*

$$T(x) = x\,.$$

Značení: pro zobrazení $T : X \to Y$ označme n-násobnou kompozici

$$T^n = \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{n\text{krát}}$$

Pozorování: Ať $T : M \to M$ je spojité zobrazení na metrickém prostoru M. Jestliže je pro dané $x_0 \in M$ posloupnost $(T^n(x_0))_{n=0}^{\infty}$ konvergentní, pak konverguje k pevnému bodu zobrazení T.

Odvození: Označme $x_n = T^n(x_0)$ a její limitu x. Pak platí, že

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

a limitním předchodem máme díky spojitosti T

$$x = T(x)\,.$$

Definice 16 *Ať M je metrický prostor. Zobrazení $T : M \to M$ se nazývá* ***kontraktivní****, jetliže existuje $0 \leq \alpha < 1$ tak, že*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha\, d(x, y) \qquad \forall x, y \in M\,.$$

Věta 17 ***Banachova věta o pevném bodě:*** *Nechť M je metrický prostor. Ať $T : M \to M$ je kontraktivní zobrazení. Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení T.*

Důkaz: Zvolme $x_0 \in M$ a ukažme, že posloupnost daná $x_n = T^n(x_0)$ je cauchyovská.

Předpokádejme, že $0 \leq \alpha < 1$ je koeficient kontrakce zobrazení T. Platí odhady

$$d(x_2, x_1) = d(T(x_1), T(x_0)) \leq \alpha\, d(x_1, x_0)\,.$$

$$d(x_3, x_2) = d(T(x_2), T(x_1)) \leq \alpha d(x_2, x_1) \leq \alpha^2\, d(x_1, x_0)\,.$$

Opakováním dostaneme

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k d(x_1, x_0)\,.$$

Ať je $m \geq n$. Pak máme (využíváme součet geometrické řady).

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n)\, d(x_1, x_0) = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0)\,.$$

Vzhledem k tomu, že $|\alpha| < 1$, máme že odhad napravo konverguje k nule pro $n, m \to \infty$. Tím jsme dokázali, že je posloupnost cauchyovská v M. Dle úplnosti má tedy limitu $x \in M$. Dle předchozí úvahy je x pevným bodem zobrazení T. Tím je dokázána existence pevného bodu. Každé kontraktivní zobrazení má nejvýše jeden pevný bod, což dokazuje jednoznačnost. $\square$

Nejjednodušší aplikace věty o pevném bodě:

Mějme zobrazení $F : [a,b] \to [a,b]$ tak že

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y| \qquad \forall x, y \in [a,b]\,,$$

kde $K < 1$. Pak F má jediný pevný bod na intervalu $[a,b]$. Postačující podmínka pro předchozí nerovnost je existence spojité derivace f' s $|f'(x)| < 1$ na intervalu $[a,b]$.

Konkrétní situace:

$$F(x) = 0$$

$F : [a,b] \to [a,b]\,,\ F(a) < 0,\ F(b) > 0,\ F$ je spojitě diferencovatelná. Ať dále $0 < K_1 \leq F'(x) \leq K_2$ na $[a,b]$. Ekvivalentní rovnice:

$$f(x) = x - \lambda F(x)\,,$$

$\lambda \neq 0$. Vhodně se zvolí λ aby $f(x)$ byla kontrakce. Například, je-li $\lambda K_2 < 2$ a $\lambda > 0$ pak

$$f'(x) = 1 - \lambda F'(x) \in (-1, 1)\,.$$

a tedy f je kontraktivní.