KAPITOLA 4: Normované prostory

11. února 2024

X, Y vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice: **Norma** na X je funkce $\|\cdot\| : X \to \langle 0, \infty)$ splňující pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Dvojici $(X, \|.\|)$ nazýváme **normovaný prostor**.

$\|x\|$ – „velikost vektoru x"

$d(x, y) = \|x - y\|$ – „vzdálenost x a y" – splňuje trojúhelníkovou nerovnost a je invariantní vůči posunu, protože

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

$$d(x+z, y+z) = \|(x+z) - (y+z)\| = \|x - y\| = d(x,y)$$

(X, d) je metrický prostor.

Platí: **a)** $\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$.

b) Pro $x \neq 0$ je $\frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} x$ jednotkový vektor (tj. má normu rovnou 1).

c) $\|x\| = \|-x\|$.

d) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$.

Důkaz: **a)** $\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| = \|x_1 + (x_2 + \ldots + x_n)\| \leq \|x_1\| + \|x_2 + (x_3 + \ldots + x_n)\| \leq \ldots \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|$,

b) a **c)** jsou zřejmé. **d)** Z (N4) máme $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, odkud $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Záměna

x a y dá $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Celkem tedy dostáváme $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|$. $\square$

Značení: $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\} \Big(= \{x \in X \mid d(\mathbf{0}, x) \leq 1\} \Big)$ – **jednotková** (uzavřená) **koule** v X

Definice: Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v X.

(i) Řekneme, že posloupnost (x_n) **konverguje k** $x \in X$, jestliže

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0 .$$

Značíme $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

(ii) Řekneme, že posloupnost (x_n) je **cauchyovská**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n, m \geq n_0 : \;\; \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon .$$

Pozorování: Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Pro každé $\varepsilon > 0$ totiž existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $\|x_n - x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pro $n, m \geq n_0$ pak máme

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Z cauchyovskosti ale obecně konvergence nevyplývá.

Definice : Normovaný prostor $(X, \|.\|)$ je **úplný (Banachův) prostor**, jestliže je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní.

Příklad : $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ jsou úplné prostory.

Definice : Nechť X je normovaný prostor, $x \in X$, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. Řekneme, že x je **součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, jestliže

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n \,.$$

Definice : Nechť X je normovaný prostor. Množina $A \subset X$ se nazývá **omezená**, jestliže existuje $K \geq 0$ tak, že

$$\|x\| \leq K \qquad \forall x \in A.$$

Tvrzení : Každá cauchyovská posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ je omezená.

Důkaz: Z definice cauchyovskosti posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ existuje k $\varepsilon = 1$ přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna $n, m \geq n_0$ platí $\|x_n - x_m\| \leq 1$. Tedy pro $n \geq n_0$ máme

$$\|x_n\| = \|x_n - x_{n_0} + x_{n_0}\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \leq 1 + \|x_{n_0}\|.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x_n\| \leq \max\left\{ \max_{i=1,\ldots,n_0-1} \|x_i\| \,, \quad 1 + \|x_{n_0}]| \right\}.$$

$\square$

Definice: Nechť X a Y jsou normované prostory (nad stejným tělesem). Pak zobrazení $f : X \to Y$ definované na $D(f) \subset X$ je **spojité**, jestliže pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ a $x \in D(f)$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)\,,$$

neboli

$$x_n \to x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x)\,.$$

Tvrzení: Nechť X, Y jsou normované prostory, $f : X \to Y$ a $\tilde{x} \in D(f)$. Pak jsou ekvivalentní tvrzení:

(i) Pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\tilde{x})\,.$$

(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové,

$$\|x - \tilde{x}\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(\tilde{x})\|_Y < \varepsilon \text{ pro všechna } x \in D(f).$$

Důkaz proveďte jako cvičení. $\square$

• Nechť $(X, \|\cdot\|_1)$ and $(Y, \|\cdot\|_2)$ jsou normované prostory. Pak na kartézském součinu $X \times Y$ můžeme zavést normu

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}\,.$$

Pro konvergenci pak platí, že

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \Leftrightarrow x_n \to x \text{ a } y_n \to y\,.$$

Vlastnosti a příklady : Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor. Pak

- složení dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení. (Plyne přímo z definice).
- $\|\,.\,\| : X \to \langle 0, \infty) \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Jestliže totiž $x_n \to x$, pak $0 \leq \big|\,\|x_n\| - \|x\|\,\big| \leq \|x_n - x\| \to 0$ a podle věty o sevření $\|x_n\| - \|x\| \to 0$.
- Zobrazení $+ : X \times X \to X : (x, y) \mapsto x + y$ je spojité, tj. jestliže $x_n \to x$ a $y_n \to y$, pak $x_n + y_n \to x + y$. (Dokažte jako cvičení.)
- Zobrazení $\cdot : \mathbb{C} \times X \to X : (\alpha, x) \mapsto \alpha\, x$ je spojité, tj. jestliže $\alpha_n \to \alpha$ a $x_n \to x$, pak $\alpha_n x_n \to \alpha\, x$. (Dokažte jako cvičení.)
- Pro pevně zvolené vektory $x_1, \ldots, x_n$ v X je zobrazení

  $$T : \mathbf{C}^n \to X : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

  spojité. (Dokažte z předchozích tvrzení.)

Příklad: Uveďme některé často používané normy na $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.

Pro $x = (x_1, \ldots, x_n)$ definujeme

- $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$,
- $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.

(Nakreslete si, jak vypadají v $\mathbb{R}^2$ jednotkové „koule" odpovídající každé z těchto norem.)

Konvergence ve všech těchto prostorech je konvergence po složkách. Ať totiž uvažujeme kteroukoliv z norem $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, máme

$$x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \to x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad x_i^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Pro uvedené normy platí (dokažte jako cvičení)

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$,
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

Příklad: $M_{m\times n}$ – matice typu $m \times n$. Pro

$$A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \;\in\; M_{m\times n}$$

definujeme např.

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_r = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(tedy $\|A\|_r$ je maximální řádkový součet matice A).

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}\,.$$

(Hilbert-Schmidtova norma.)

Konvergence ve všech těchto normách je opět konvergence po složkách.

Definice : Mějme dvě normy $\|.\|_1$ a $\|.\|_2$ na prostoru X. Řekněme, že tyto normy jsou **ekvivalentní**, jestliže existují konstanty K_1, $K_2 > 0$ tak, že

$$K_2\|x\|_2 \ \le \ \|x\|_1 \ \le \ K_1\|x\|_2 \qquad \forall x \in X \,.$$

Tvrzení : Relace ekvivalence norem na množině všech norem prostoru X je ekvivalence (tj. reflexivní, symetrická, tranzitivní relace).

Poznámka: Ekvivalentní normy mají stejnou konvergenci a stejné cauchyovské posloupnosti. Radikálně se však může změnit geometrie.

Příklad: Normy $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

Princip maxima:

Každá spojitá funkce na uzavřené omezené množině v $\mathbb{C}^n$ (a tedy i v $\mathbb{R}^n$) je omezená a nabývá svého maxima a minima.

Věta : Každé dvě normy na prostoru X konečné dimenze jsou ekvivalentní.

Důkaz: Nechť X je reálný lineární prostor (pro komplexní bychom postupovali analogicky), $\dim X = n$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je lineární báze prostoru X. Využijeme toho, že každý prvek z X je jednoznačně určen svými souřadnicemi vzhledem k bázi (máme tedy lineární bijekci mezi X a $\mathbb{R}^n$).

Ukážeme, že libovolná norma na X je ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_c$ na X definovanou

$$\|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\|_c = \underbrace{\|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\|_1}_{\text{norma v } \mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\,,$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Jsou-li pak $\|.\|_a$, $\|.\|_b$ normy na X, jsou každá ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_c$ a z tranzitivity ekvivalence je též $\|\cdot\|_a$ ekvivalentní s $\|\cdot\|_b$.

Nechť je tedy dána norma $\|.\|$ na X. Pro libovolná $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ platí

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \leq |\alpha_1|\,\|x_1\| + \cdots + |\alpha_n|\,\|x_n\| \leq (|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|) \underbrace{\max_{i=1,\cdots,n} \|x_i\|}_{\text{ozn. } K_1 > 0}$$

$$= K_1 \|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\|_c.$$

Tím jsme získali jeden odhad normy $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|$ potřebný pro důkaz ekvivalence norem $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_c$.

Odhad z druhé strany najdeme nejdřív pro $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S$, kde

$$S = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ukážeme, že existuje $K_2 > 0$ takové, že

$$\|\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\| \geq K_2 \qquad \forall\, \alpha \in S.$$

Uvažujme funkci $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|.$$

Funkce F je funkcí n reálných proměnných $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Je to funkce spojitá neboť je složením dvou spojitých zobrazení: normy a zobrazení

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \,.$$

Množina S je omezená a uzavřená v $\mathbb{R}^n$, a tedy podle principu maxima (minima), aplikovaného na funkci F a množinu S, nabývá tato funkce svého minima, řekněme K_2 na S. Toto minimum musí být nezáporné. Navíc platí, že je nenulové. To dokážeme sporem. Je-li $K_2 = 0$ existuje $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in S$ tak, že $F(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = 0$. To ovšem implikuje

$$\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n = 0 \,.$$

Vzhledem k tomu, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislé, máme že $\gamma = 0$, což je ve sporu s $\gamma \in S$.

Pro obecná $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, ne všechna nulová, položme

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^n |\alpha_j|} \,.$$

Pak $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$ a podle předchozí části důkazu je

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots \beta_n x_n\| \geq K_2.$$

Tedy

$$K_2 \leq \left\| \frac{\alpha_1}{\sum_{j=1}^n |\alpha_j|} \; x_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\sum_{j=1}^n j|\alpha_j|} \; x_n \right\| = \frac{1}{\sum_{j=1}^n |\alpha_j|} \, \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|.$$

Odtud dostáváme

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \;\geq\; K_2 \sum_{j=1}^n |\alpha_j| = K_2 \, \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|_c.$$

Je-li $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, pak tato nerovnost platí také. Máme tak

$$K_2 \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|_c \le \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \qquad \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Zkombinujeme-li tento odhad normy $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|$ s odhadem, který jsme dostali na začátku důkazu, zjistíme, že pro každá $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ platí

$$K_2 \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|_c \le \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \le K_1 \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|_c.$$

Tedy

$$K_2 \|x\|_c \le \|x\| \le K_1 \|x\|_c \qquad \forall\, x \in X$$

a normy $\|.\|_c$ a $\|.\|$ jsou ekvivalentní. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Důsledky :

- Každý konečně dimenzionální prostor je úplný. Například předchozí důkaz říká, že každá norma je ekvivalentní normě $\|\cdot\|_c$, která dá úplný prostor (kopii $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_1)$).
- Všechny konvergence na konečně dimenzionálním prostoru jsou ekvivalentní a rovnají se konvergenci po souřadnicích vzhledem k dané bázi.

Poznámka : Ekvivalence norem na prostoru nekonečné dimenze „zdaleka“ neplatí. Uvažujme např. prostor

$$Y = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \,\big|\, x_j \in \mathbb{C},\ \text{nenulových členů je konečně mnoho}\}$$

a na něm normy

$$
\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|,\\
\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} &= \sup_n |x_j|,\\
\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2}.
\end{aligned}
$$

Podívejme se na normy posloupností $x^n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots) \in Y$. Máme

$$
\begin{aligned}
\|x^n\|_1 &= n,\\
\|x^n\|_{\infty} &= 1,\\
\|x^n\|_2 &= \sqrt{n}.
\end{aligned}
$$

Kdyby bylo na Y např. $\|.\|_1 \le K_1 \|.\|_2$, pak by pro každé n muselo platit $n \le K_1 \sqrt{n}$, tj. $\sqrt{n} \le K_1$. To ale pro $K_1 \in \mathbb{R}$ není možné. Podobně dostaneme, že nemohou existovat reálné konstanty K_2 a K_3 takové, že na Y platí $\|.\|_1 \le K_2 \|.\|_{\infty}$ a $\|.\|_2 \le K_3 \|.\|_{\infty}$.

Tvrzení :

(i) Nechť Y je podprostor prostoru X, který je úplný. Pak Y je uzavřený.

(ii) Nechť Y je uzavřený podprostor úplného prostoru X. Pak Y je úplný.

Důkaz:

(i) Ať $(x_n) \subset Y$ a $\lim_n x_n = x \in X$. Pak (x_n) je cauchyovská (v X i Y) a dle úplnosti Y má limitu $y = \lim x_n$. Z jednoznačnosti limity pak plyne

$y = x$. To dokazuje uzavřenost Y.

(ii) Je-li Y uzavřený podprostor úplného prostoru X pak každá cauchyovská posloupnost v Y má limitu v X, která podle uzavřenosti Y musí ležet v X. Tedy Y je úplný.

$\square$

Jako důsledek máme

Důsledek : Každý konečně dimenzionální podprostor normovaného prostoru je uzavřený.

Příklad: Uvažujme prostor

$$l^\infty \;=\; \{(x_i)_{i=1}^\infty \,\big|\, \sup_{i=1,2,\dots} |x_i| < \infty\}$$

s normou

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_\infty \;=\; \sup_{i=1,2,\dots} |x_i|.$$

1) Ukážeme, že $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ je úplný prostor. Nechť $(\xi^n)_{n=1}^\infty \subset l^\infty$ je cauchyovská posloupnost. Podle dříve dokázané věty je tato posloupnost omezená. Existuje tedy $K > 0$ takové, že

$$\|\xi^n\|_\infty \le K \text{ pro každé } n\,.$$

Pišme $\xi^n = (\xi_i^n)_{i=1}^\infty$. Protože

$$|\xi_i^n - \xi_i^m| \le \|\xi^n - \xi^m\|_\infty\,,$$

je pro každé $i \in \mathbb{N}$ posloupnost $(\xi_i^n)_{n=1}^{\infty}$ (posloupnost i tých souřadnic) cauchyovská, a tedy existuje ξ_i takové, že $\xi_i^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi_i$. Položme $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$. Jelikož pro každé n, i je $|\xi_i^n| \leq K$, máme $|\xi_i| \leq K$ pro každé i, a tedy $\xi \in l^{\infty}$.

Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \xi^n = \xi$. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Protože je posloupnost $(\xi^n)_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská, existuje n_0 tak, že

$$\|\xi^n - \xi^m\|_{\infty} \leq \varepsilon \qquad \forall\, n,\, m \geq n_0,$$

tj.

$$|\xi_i^n - \xi_i^m| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n,\, m \geq n_0,\ i = 1, 2, \dots .$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme

$$|\xi_i^n - \xi_i| \leq \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0,\ i = 1, 2, \dots ,$$

což znamená, že

$$\underbrace{\sup_i |\xi_i^n - \xi_i|}_{\|\xi^n - \xi\|_{\infty}} < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Tedy $\xi^n \to \xi$ v l^{∞}.

2) Podprostor

$$Y = \left\{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^{\infty} \,\middle|\, (x_i)_{i=1}^{\infty} \text{ má konečně mnoho nenulových souřadnic}\right\}$$

prostoru l^{∞} není úplný. K tomu stačí dokázat že není uzavřený. Uvažujme posloupnost $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$, kde $x^n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$. Označíme-li $x = \left(\frac{1}{i}\right)_{i=1}^{\infty} \notin Y$, pak $\|x^n - x\|_{\infty} = \frac{1}{n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tedy $x^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. To ale znamená, že podprostor Y není uzavřený, a tedy ani úplný.

Příklad: Uvažujme nyní prostor

$$C\langle a,\, b\rangle = \left\{f \,\middle|\, f \text{ je spojitá funkce na omezeném intervalu } \langle a,\, b\rangle\right\}$$

(používá se též označení $C(\langle a,\, b\rangle)$) s normou

$$\|f\|_\infty \;=\; \max_{\langle a,\, b\rangle} |f(x)|.$$

(Uvědomme si, že definice normy je korektní, protože na základě principu maxima pro absolutní hodnotu absolutní hodnoty funkcí z $C\langle a,\, b\rangle$ nabývají na $\langle a,\, b\rangle$ své největší hodnoty.) Do okolí funkce f o poloměru $\varepsilon > 0$ patří právě ty funkce g, pro které platí

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in \langle a,\, b\rangle.$$

Konvergence je tu tedy ve smyslu maximálních odchylek. Této konvergnci se říká stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí.

Ukážeme, že $(C\langle a,\, b\rangle, \|.\|_\infty)$ je úplný prostor. Vezměme cauchyovskou posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C\langle a,\, b\rangle$. Pak pro každé $x \in \langle a,\, b\rangle$ je $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ cauchyovská posloupnost v úplném prostoru reálných čísel. Tedy existuje funkce $f : \langle a,\, b\rangle \to \mathbb{R}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro každé x. Potřebujeme ukázat, že funkce f je spojitá a že $f_n \to f$ v normě $\|.\|_\infty$. Podívejme se nejdřív na spojitost. Volme $x_0 \in \langle a,\, b\rangle$ a ukažme spojitost v tomto bodě. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. K němu existuje n_0 takové, že pro všechna $n, m \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, x \in \langle a,\, b\rangle.$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ odtud dostáváme

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\, n \geq n_0 \;\forall\, x \in \langle a,\, b\rangle. \tag{1}$$

Protože je funkce f_{n_0} spojitá v x_0, existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Pro $x \in U_\delta(x_0)$ tak máme

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tím jsme ukázali, že je funkce f v x_0 spojitá. Protože $x_0 \in \langle a,\, b\rangle$ bylo libovolné, je f spojitá na $\langle a,\, b\rangle$. Potřebujeme ještě ověřit, že $f_n \to f$ v normě. To ale vyplývá okamžitě z (1). Tedy každá cauchyovská posloupnost v $C\langle a,\, b\rangle$ má v $C\langle a,\, b\rangle$ limitu, a proto je prostor $C\langle a,\, b\rangle$ úplný.

Poznámka: Analogicky jako v předcházejícím příkladu lze dokázat úplnost prostoru $(C(M), \|.\|_\infty)$ všech spojitých funkcí na obecné uzavřené omezené množině $M \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.

Příklad: Na $C\langle 0,\, 1\rangle$ uvažujme normu

$$\|f\|_1 \ = \ \int_0^1 |f(x)| \; \mathrm{d}x.$$

V této normě není prostor $C\langle 0,\, 1\rangle$ úplný, a tedy normy $\|.\|_\infty$ a $\|.\|_1$ na něm nejsou ekvivalentní. Abychom to dokázali, vezměme např. funkce f_n $(n \ge 2)$ spojité na $\langle 0,\, 1\rangle$ takové, že $f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle 0,\, \frac{1}{2}\rangle$, $f_n(x) = 1$ pro $x \in \langle \frac{1}{2} + \frac{1}{n},\, 1\rangle$ a f_n je lineární na $\langle \frac{1}{2},\, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\rangle$. (Nakreslete si obrázek.) Protože se pro $n < m$ liší funkce f_n a f_m jen na intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$, a jejich rozdíl je na tomto intervalu menší než 1, máme

$$\|f_n - f_m\|_1 \le \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 1\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,.$$

Pokud tedy k danému $\varepsilon > 0$ zvolíme n_0 tak, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, budeme mít

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \ge n_0.$$

To ale znamená, že je posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je v normě $\|.\|_1$ cauchyovská.
Předpokládejme, že v $C\langle 0,\, 1\rangle$ existuje limita g posloupnosti $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Pak

$$\|g - f_n\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} |g(x)|\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |g(x) - f_n(x)|\, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{1} |1 - g(x)|\, \mathrm{d}x.$$

Protože podle předpokladu $\|g - f_n\|_1 \to 0$ a všechny integrály vpravo jsou nezáporné, musí mít tyto integrály (důležité jsou pro nás první a poslední) pro $n \to \infty$ také nulovou limitu. Z vlastností Lebesgueova integrálu tak dostáváme, že

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \quad \text{na} \quad \langle 0,\, \tfrac{1}{2}\,), \\ g(x) &= 1 \quad \text{na} \quad (\tfrac{1}{2}\,,\, 1\rangle. \end{aligned}$$

To ale znamená, že funkce g není na intervalu $\langle 0,\, 1\rangle$ spojitá. Tím jsme došli ke sporu, tedy posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá v $C\langle 0,\, 1\rangle$ limitu. Prostor $(C\langle 0,\, 1\rangle, \|.\|_1)$ tak není úplný.

Definice: Množina S v normovaném prostoru X je **hustá**, jestliže každá neprázdná otevřená množina O v X obsahuje alespoň jeden bod z množiny S.
(Ekvivalentně: Pro každé $x \in X$ existuje posloupnost $(s_n) \subset S$ tak, že $x = \lim_n s_n$.)
Normovaný prostor X se nazývá **separabilní** jestliže má spočetnou hustou podmnožinu

• Každý prostor konečné dimenze je separabilní. (Návod: Množina všech linárních kombinací prvků báze s racionálními koeficenty je hustá spočetná množina.)

Každý normavaný prostor se dá efektivně „zabalit“ do úplného prostoru. Uvedeme si bez důkazu tento princip:

Věta o zúplnění: Pro každý normovaný prostor X existuje Banachův prostor $\tilde{X}$ takový, že X je hustým podprostorem prostoru $\tilde{X}$.

Prostor $\tilde{X}$ se nazývá **zúplněním prostoru** X. Zúplnění je jedniné až na lineární bijekci zachovávající normu.

Příklad : Prostor $L^1(\langle a, b\rangle)$ lebesgueovsky integrovatelných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ je zúplněním prostoru spojitých funkcí $C\langle a, b\rangle$ s integrální normou danou Riemannovým integrálem

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Tedy Riemann → Lebesgue odpovídá zúplnění a přechodu sopjité funkce → lebesgueovsky integrovatelné funkce.

Jednou z aplikací konceptu úplnosti jsou věty o pevném bodě.

Definice: Ať K je podmnožina normovaného prostoru X. Ať $T : K \to X$ je zobrazení. Pak se $x \in K$ nazývá **pevným bodem** zobrazení T jestliže platí

$$T(x) = x\,.$$

Značení: pro zobrazení $T : X \to Y$ označme n-násobnou kompozici

$$T^n = \overbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}^{n\text{krát}}$$

Pozorování: Ať $T : X \to X$ je spojité zobrazení na normovaném prostoru X. Jestliže je pro dané $x_0 \in X$ posloupnost $(T^n(x_0))_{n=0}^{\infty}$ konvergentní, pak konverguje k pevnému bodu zobrazení T.

Odvození: Označme $x_n = T^n(x_0)$ a její limitu x. Pak platí, že

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

a limitním předchodem máme díky spojitosti T

$$x = T(x)\,.$$

Definice: Ať K je podmnožina normovaného prostoru X. Zobrazení $T : K \to K$ se nazývá **kontraktivní**, jetliže existuje $0 \leq \alpha < 1$ tak, že

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \qquad \forall x, y \in K\,.$$

Banachova věta o pevném bodě: Nechť K je uzavřená množina v Banachově prostoru X. Ať $T : K \to K$ je kontraktivní zobrazení. Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení T.

Důkaz: Zvolme $x_0 \in K$ a ukážeme, že posloupnost daná $x_n = T^n(x_0)$ je cauchyovská.
Předpokádejme, že $0 \leq \alpha < 1$ je koeficient kontrakce zobrazení T. Platí odhady

$$\|x_2 - x_1\| = \|T(x_1) - T(x_0)\| \leq \alpha\, \|x_1 - x_0\|$$
$$\|x_3 - x_2\| = \|T(x_2) - T(x_1)\| \leq \alpha \|x_2 - x_1\| \leq \alpha^2\, \|x_1 - x_0\|\,.$$

Opakováním dostaneme

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \alpha^k \|x_1 - x_0\|\,.$$

Ať je $m \geq n$. Pak máme (využíváme součet geometrické řady)

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n)\, \|x_1 - x_0\| = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|\,. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $|\alpha| < 1$, máme že odhad napravo konverguje k nule pro $n, m \to \infty$. Tím jsme dokázali, že je posloupnost cauchyovská v X.

Dle úplnosti má tedy limitu $x \in X$. Tato limita musí ležet v K neboť K je uzavřená. Dle předchozí úvahy je x pevným bodem zobrazení T. Tím je dokázána existence pevného bodu. Každé kontraktivní zobrazení musí mít nejvýše jeden pevný bod, což dokazuje jednoznačnost. $\square$

Důkaz dává součaně návod na numerický výpočet pevného bodu. Startujeme s x_0 a děláme iterace $T(x_0)$, $T(T(x_0))$, $T(T(T(x_0)))$, ...

Na této větě je založen důkaz existence řešení parciálnách diferenciálních rovnic, metody prosté iterace řešení nelineárnách rovnic a jejich soustav, atd.

Ilustrační příklad: Řešíme rovnici

$$F(x) = 0$$

(1) Snažíme se převést ji na úlohu o pevném bodě, např. přepisem rovnice

$$f(x) = x - \lambda F(x) = x\,.$$

kde $\lambda \neq 0$.

(2) snažíme se volit λ tak, aby $f(x)$ byla kontrakce na dané množině.

(3) Aplikujeme iterace

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0))\ \ldots$$