Cvičení: Skalární součin

1. V je reálný prostor se skalárním součinem. Ukažte, že $\|x\| = \|y\|$ implikuje $\langle x+y, x-y\rangle = 0$. Geometrický význam? Komplexní případ?

2. Ukažte, že v prostoru se skalárním součinem platí, že $\|x_n\| \to \|x\|$ a $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$ implikuje, že $x_n \to x$.

3. Ukažte, že v prostoru se skalárním součinem platí
$$x \perp y \iff \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| \text{ pro všechna } \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

4. V prostoru se skalárním součinem dokažte Appoloniovu identitu:
$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{1}{2}(x+y)\|^2\,.$$

5. V prostoru $H = l^2$ stanovte $\|(2^{-n/2})_{n=1}^{\infty}\|,\ \|(1/n)_{n=1}^{\infty}\|$.

6. V je prostor se skalárním součinem. Ukažte, že každý vektor je jednoznačně určen skalárními součiny s prvky lineární báze.

7. Ať H je Hilbertův prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že H obsahuje podprostor V tak, že $V \neq H$ a přitom $V^{\perp} = \{0\}$. Návod: Volte $V = \operatorname{Ker} f$, kde f je nespojitý funkcionál na H.

8. Pro data $(\,(x_i, y_i)\,, z_i)_{i=1,\dots m}$ (vše reálná čísla) nalezněte funkci dvou proměnných, $ax + by$, nejlépe aproximující data ve smyslu metody nejmenších čtverců.

9. Ukažte, že množina
$$M = \{y = (\nu_j)_{j=1}^n \mid \sum_{j=1}^{n} \nu_j = 1\}$$
v $\mathbb{C}^n$ je uzavřená a konvexní. Nalezněte její element s minimální normou.

10. Nechť (e_n) je ortonormální báze Hilbertova prostoru H. Ukažte, že pro všechna $x, y \in H$ platí
$$\langle x, y\rangle = \sum_n \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}\,.$$

11. Pro $f \in L^2\langle 0, 2\pi\rangle$ platí
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt\,.$$
Stanovte $\|f\|^2$.

12. Ukažte, že $(e^{2\pi\, ikt}\mathbf{1}_{\langle l, l+1\rangle})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální báze prostoru $L^2(\mathbb{R})$. (Zde $\mathbf{1}_M$ označuje charakteristickou funkci množiny M.)

13. V je prostor se skalárním součinem. Ukažte, že pro nenulové vektory $x, y \in V$ platí:
$$\|x - y\| = \left\| \tfrac{\|y\|}{\|x\|} x - \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y \right\|,$$
a tedy také
$$\|x + y\| = \left\| \tfrac{\|y\|}{\|x\|} x + \tfrac{\|x\|}{\|y\|} y \right\|.$$
Jaký mají rovnosti geometrický význam?

14. Nechť V je lineární prostor a zobrazení $[\,.\,,.\,] : V \times V \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ splňuje pro všechna $x, y, z \in V,\ \alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$:

    (a) $[x, y] = \overline{[y, x]}$,
    (b) $[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$,
    (c) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$,
    (d) $[x, x] \geq 0$.

    Potom pro každé $x, y \in V$ platí
$$\big|[x, y]\big| \leq [x, x]^{1/2}[y, y]^{1/2}.$$
(Tedy Schwarzova nerovnost platí i v případě, kdy součin na V je pouze pozitivně *semi*definitní.) Návod: Pro $[x, x] = [y, y] = 0$ ukažte, že $[x+y, x+y] = 0$, $[x - y, x - y] = 0$ (zkoumejte jejich součet). Přímo z první rovnosti dostanete Re$[x, y] = 0$. Je-li V komplexní, použijte první rovnost ještě pro $x := x, y := iy$.