KAPITOLA 6: Hilbertovy prostory

15. května 2020

Definice : **Prostor se skalárním součinem** je dvojice $(V, \langle . , . \rangle)$, kde V je lineární prostor a $\langle . , . \rangle : V \times V \to \mathbb{C}\,(\mathbb{R})$ splňuje pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ následující podmínky

(i) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

(iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$

(v) $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \mathbf{0}$.

Na základě bodu **(i)** je skalární součin v reálném prostoru symetrický.

Poznámka : Jako jednoduché důsledky axiomů dostáváme

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle .$$

Poznámka: Skalární součin je speciální případ seskvilineární formy, což je zobrazeni $b : V \times V \to \mathbb{C}$ splňující pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$ a $x, y, z \in V$:

(i) $b(x + y, z) = b(x, z) + b(y, z)$

(ii) $b(z, x + y) = b(z, x) + b(z, y)$

(iii) $b(\alpha x, y) = \alpha\, b(x, y)$

(iv) $b(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\, b(x, y)$

Značení: $\|x\| = \sqrt{\langle x,\, x\rangle}$ (později ukážeme, že $\|.\|$ je norma na V)

Příklady: **1)** • $\mathbb{R}^n$: Pro $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x,\, y\rangle = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \qquad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

• $\mathbb{C}^n$: Pro $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\langle x,\, y\rangle = x_1\, \overline{y_1} + \cdots + x_n\, \overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y_i}\,, \qquad \|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}\,.$$

2) $\ell^2 = \{(x_n)_{n=1}^\infty \,\big|\, \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty\}$: Pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty$, $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in l^2$

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, \overline{y_i}\,, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}\,.$$

Je potřeba ukázat, že v definici skalárního součinu řada vpravo konverguje. K tomu si uvědomíme, že z nerovnosti $0 \le (a-b)^2$, které platí pro reálná a, b, dostáváme $2ab \le a^2 + b^2$. Tedy pro každé i platí $|x_i\, \overline{y_i}| = |x_i|\cdot|y_i| \le \frac{1}{2}\,(|x_i|^2 + |y_i|^2)$. Absolutní hodnoty členů řady vpravo tak máme shora odhadnuté součtem členů dvou konvergentních řad, a tedy tato řada (absolutně) konverguje.

3) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – prostor s mírou, $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \,\big|\, f$ je měřitelná, $\int_X |f(x)|^2\, \mathrm{d}\mu(x) < \infty\}$:

Pro $f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\langle f,\, g\rangle = \int_X f(x)\, \overline{g(x)}\; \mathrm{d}\mu(x)\,, \qquad \|f\| = \sqrt{\int_X |f(x)|^2\; \mathrm{d}\mu(x)}\,.$$

4) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – pravděpodobnostní prostor, V = prostor náhodných veličin s konečným druhým momentem: Pro $X, Y \in V$

$$\langle X,\, Y\rangle = E(X\, \overline{Y})\,.$$

Pak např.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \langle X - EX,\, Y - EY\rangle, \quad \sigma(X,Y) = \sqrt{\langle X - EX,\, Y - EY\rangle}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \|X - EX\|^2 .$$

Definice : Prvky $x, y \in V$ jsou **kolmé (ortogonální)** (značíme $x \perp y$), jestliže

$$\langle x,\, y\rangle \;=\; 0.$$

Věta (Pythagorova) : Pro $x,\, y \in V$ platí

$$x \perp y \quad \Rightarrow \quad \|x + y\|^2 \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Důkaz: $\|x+y\|^2 \;=\; \langle x+y,\, x+y\rangle \;=\; \langle x,\, x\rangle + \underbrace{\langle x,\, y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,\, x\rangle}_{=0} + \langle y,\, y\rangle \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2.$ $\square$

Věta (Geometrický rozklad) : Pro $x, y \in V$, $y \neq \mathbf{0}$ existují jediná $z \in V$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ tak, že

$$z \perp y \qquad \text{a} \qquad x \;=\; z + \lambda\, y.$$

(Jde o rozklad x do dvou kolmých směrům, přičemž jeden z nich je zadán.)

Důkaz: Nejdřív ukážeme jednoznačnost rozkladu. Nechť $x = z + \lambda y$, kde $z \perp y$. Vynásobme rovnost $x = z + \lambda y$ skalárně vektorem y. Dostaneme

$$\langle x,\, y\rangle \;=\; \langle z,\, y\rangle \;+\; \lambda\,\langle y,\, y\rangle \;=\; \lambda\,\|y\|^2.$$

Odtud je zřejmé, že pro λ musí platit

$$\lambda \;=\; \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|y\|^2}\,. \tag{1}$$

Pak ale nutně

$$z \; = \; x \; - \; \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|y\|^2}\, y.$$

Nyní se podívejme na existenci rozkladu. Zvolme λ podle (1) a položme $z = x - \lambda y$. Pak $x = z + \lambda\, y$. Ukážeme ještě, že $z \perp y$:

$$\langle z,\, y\rangle \; = \; \langle x - \lambda y,\, y\rangle \; = \; \langle x,\, y\rangle \; - \; \lambda\, \|y\|^2 \; = \; \langle x,\, y\rangle \; - \; \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|y\|^2}\, \|y\|^2 \; = \; 0.$$

□

Věta (Schwarzova nerovnost) : Pro každé dva prvky $x,\, y$ prostoru se skalárním součinem V platí

$$|\langle x,\, y\rangle| \; \leq \; \|x\|\, \|y\|\, .$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $x,\, y$ jsou lineárně závislé.

Důkaz: Je-li $y = 0$, pak x a y jsou lineárně závislé a $|\langle x,\, y\rangle| \; = \; 0 \; = \; \|x\|\, \|y\|$. Předpokládejme tedy, že $y \neq 0$. Zapišme x ve tvaru $x = z + \lambda\, y$, kde $z \in V,\; z \perp y,$ a $\lambda = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|y\|^2}$. Pak podle Pythagorovy věty

$$\|x\|^2 \; = \; \|z\|^2 + |\lambda|^2\|y\|^2 \; \geq \; |\lambda|^2\|y\|^2 \; = \; \frac{|\langle x,\, y\rangle|^2}{\|y\|^4}\, \|y\|^2 \; = \; \frac{|\langle x,\, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\, , \qquad (2)$$

tedy

$$\|x\|^2\|y\|^2 \; \geq \; |\langle x,\, y\rangle|^2.$$

Z (2) rovnost nastává přává tehdy, když $\|z\| = 0$, tj. v případě, že $z = 0$ a $x = \lambda y$.

□

Geometrická a statisická interpretace skalárního součinu:

Pro nenulové vektory $x, y \in V$ máme dle Schwarzovy nerovnosti:

$$\frac{|\langle x,\, y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

V případě reálného prostoru tedy existuje úhel φ tak, že

$$\frac{\langle x,\, y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = \cos\varphi$$

a φ můžeme chápat jako úhel mezi x a y.

Mezní případy:

$\varphi = 0$ ... kolineární stejně orientované vektory

$\varphi = \pi$ ... kolineární opačně orientované vektory

$\varphi = \pi/2$ ... kolmé vektory

korelační koeficient

$$\varrho(x, y) = \frac{\langle x,\, y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = \cos\varphi$$

vyjadřuje stupeň lineární závislosti x a y.

aplikace ve statistice:

$$\varrho(X, Y) = \frac{\langle X - EX,\, Y - EY\rangle}{\sqrt{\operatorname{Var}(X - EX)}\cdot\sqrt{\operatorname{Var}(Y - EY)}}$$

korelace náhodných veličin X a Y. (Testuje zda data leží v jedné přímce.)

Příklad :

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$ a $f \in L^2\langle a,\, a + T\rangle$. Položme $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Fourierův koeficient c_n funkce f je definován vztahem

$$c_n = \langle f,\, \frac{1}{T}\, \mathrm{e}^{in\omega t}\rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, \mathrm{e}^{-in\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

Protože

$$\|\, \mathrm{e}^{in\omega t}\|^2 = \int_a^{a+T} |\, \mathrm{e}^{in\omega t}|^2\, \mathrm{d}t = T,$$

máme pro c_n podle Schwarzovy nerovnosti odhad

$$|c_n| \le \|f\|_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}}\,.$$

Rovnost přitom nastává, právě když f je ,,čistá frekvence", tj. násobek $\mathrm{e}^{in\omega t} = \cos n\omega t + i \sin n\omega t$.

Důsledek: Pro prostor V se skalárním součinem platí

$$\|x+y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\|$$

a $\|.\|$ je norma na V.

Důkaz: Ze Schwarzovy nerovnosti máme

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle y,\, x\rangle + \langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,\, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Tím pro $\|.\|$ platí trojúhelníková nerovnost. Splnění zbylých vlastností normy dostáváme přímo z definice skalárního součinu. $\square$

Tvrzení (Rovnoběžníkové pravidlo):
Pro $x,\, y \in V$ máme

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \;=\; 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Důkaz: Použijeme-li podobné přepisy jako v předchozím důkazu, dostaneme

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y,\, x+y\rangle + \langle x-y,\, x-y\rangle = \\ = \|x\|^2 + \langle y,\, x\rangle + \langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \langle y,\, x\rangle - \langle x,\, y\rangle + \|y\|^2 &= \\ &= 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 . \end{aligned}$$

$\square$

Tvrzení: Skalární součin je spojitá funkce, tj.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle x_n,\, y_n\rangle \to \langle x,\, y\rangle .$$

Důkaz: Máme

$$\langle x_n, y_n\rangle = \langle x+(x_n-x), y+(y_n-y)\rangle = \langle x, y\rangle+\langle x, y_n-y\rangle+\langle x_n-x, y\rangle+\langle x_n-x, y_n-y\rangle,$$

kde pro poslední tři sčítance vpravo platí

$$\begin{aligned}
|\langle x, y_n - y\rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y_n - y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
|\langle x_n - x, y\rangle| &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
|\langle x_n - x, y_n - y\rangle| &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n - y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Tedy $\langle x_n, y_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$. $\square$

Definice : Úplný prostor se skalárním součinem se nazývá **Hilbertův prostor**.

Příklady : • Je-li U prostor se skalárním součinem, $\dim U < \infty$, pak U je Hilbertův prostor.

- ℓ^2 je Hilbertův prostor.
- $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ je Hilbertův prostor.
- Podprostor $V \subset \ell^2$, který obsahuje právě všechny posloupnosti s konečně mnoha nenulovými členy, není Hilbertův. Uvažujme např. posloupnosti $x^k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{k}, 0, 0, \dots) \in V$ a posloupnost $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \setminus V$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^2$ konverguje a $\|x - x^k\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty}(\frac{1}{n})^2$, máme $\|x - x^k\|^2 \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, a tedy $x^k \to x$ v ℓ^2. Našli jsme tak posloupnost prvků z V, jejíž limita do V nepatří. Podprostor V úplného prostoru ℓ^2 tedy není uzavřený, a tím ani úplný.

Nejlepší aproximace

Definice: Nechť X je normovaný prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Potom **vzdálenost bodu** x **od množiny** M je

$$\mathrm{dist}(x, M) \;=\; \delta(x, M) \;=\; \inf\{\|x - y\| \mid y \in M\}$$

Bod $x_0 \in M$ je **nejbližším bodem** k bodu x, jestliže

$$\|x - x_0\| \;=\; \mathrm{dist}(x, M)\,.$$

Poznámka: Problém existence a jednoznačnosti nejbližšího bodu (kreslete si obrázky): Nejbližší bod

- nemusí existovat (např. v $\mathbb{R}^2$ pro $x = (0,1)$ a $M = \{(x_1, 0) \,\big|\, 0 < x_1 < 1\}$)
- může existovat právě jeden (např. v $\mathbb{R}^2$ pro $x = (0,1)$ a $M = \{(x_1, 0) \,\big|\, x_1 \in \mathbb{R}\}$)
- může jich existovat více, i nekonečně mnoho (např. v $\mathbb{R}^2$ pro $x = (0,1)$ a $M = \{(x_1, x_2) \,\big|\, x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\}$)

Definice: Nechť $x, y \in L$, kde L je lineární prostor. **Úsečkou s krajními body** x, y je množina

$$[x, y] \;=\; \{\lambda x + (1 - \lambda) y \,\big|\, 0 \le \lambda \le 1\}\,.$$

Množina $K \subset L$ je **konvexní**, jestliže platí implikace

$$x, y \in K \;\Rightarrow\; [x, y] \subset K.$$

Věta (Nejlepší aproximace): Nechť K je uzavřená konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Ke každému $x \in H$ existuje jediný nejbližší bod z množiny K.

Důkaz: **a)** Existence: Mějme $x \in H$, označme $\delta = \mathrm{dist}(x, K)$. Z definice infima existuje posloupnost $(y_n) \subset K$ tak, že

$$\delta_n \; = \; \|x - y_n\| \; \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \; \delta.$$

Ukážeme, že (y_n) je cauchyovská: Položme $v_n = y_n - x$. Pak $\|v_n\| = \delta_n$ a

$$\|v_n + v_m\| \; = \; \|y_n + y_m - 2x\| \; = \; 2 \, \| \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in K} - x \, \| \; \geq \; 2\delta.$$

Použijeme rovnoběžníkové pravidlo pro v_n a v_m a dostaneme

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 = -\|v_n + v_m\|^2 + 2(\|v_n\|^2 + \|v_m\|^2) \leq \\ \leq -(2\delta)^2 + 2(\delta_n^2 + \delta_m^2) \; \stackrel{n,m\to\infty}{\longrightarrow} \; 0. \end{aligned}$$

Posloupnost (y_n) je tak cauchyovská a má limitu $y \in K$ (K je uzavřená). Ze spojitosti funkce $h \mapsto \|x - h\|$ platí

$$\delta_n \; = \; \|x - y_n\| \; \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \; \|x - y\|.$$

Přitom také $\delta_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta$, tedy $\|x - y\| = \delta$.

b) Jednoznačnost: Předpokládejme, že y_1 and y_2 jsou dvě nejlepší aproximace bodu x v K. Uvažujme posloupnost

$$(y_1, y_2, y_1, y_2, \dots)$$

Platí, že $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = \delta$. Na základě první části důkazu je tato posloupnost cauchyovská. Tedy má limitu y. Pak ovšem $y = y_1 = y_2$. $\square$

Důležitá úloha je hledání aproximace v daném podprostoru.

Značení : Pro $x \in H, \; M, N \subset H$ pokládáme

$$x \perp M \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x, \, y \rangle = 0 \quad \forall \, y \in M,$$

$$N \perp M \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x, \, y \rangle = 0 \quad \forall \, x \in N, \; \forall \, y \in M,$$

$$M^{\perp} \;=\; \{\, x \in H \mid \; x \perp M \} \,.$$

Je-li $N \perp M$, pak zřejmě $N \cap M = \{\mathbf{0}\}$. Dále z linearity skalárního součinu v první složce a jeho spojitosti je pro jakoukoliv podmnožinu $M \subset H$ množina $M^{\perp}$ uzavřený podprostor prostoru H.

Věta : Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $x \in H$. Bod $x_0 \in M$ je nejbližším bodem množiny M k bodu x právě tehdy, když

$$x - x_0 \;\in\; M^{\perp}.$$

Důkaz: " $\Rightarrow$ " Volme $a \in M$, $a \neq 0$. Na základě geometrického rozkladu existuje $\lambda \in \mathbb{C}\,(\mathbb{R})$ a $z \in H$, $z \perp a$, tak, že

$$x - x_0 \;=\; \lambda\, a \;+\; z.$$

Podle Pythagorovy věty je

$$\|x - x_0\|^2 = \|\lambda\, a\|^2 + \|z\|^2.$$

Protože $x_0 + \lambda\, a \in M$ a x_0 je nejbližší bod množiny M k bodu x, máme

$$\|x - x_0\|^2 \leq \|x - x_0 - \lambda a\|^2 = \|z\|^2 \leq \|x - x_0\|^2.$$

To ale znamená, že $\|z\|^2 = \|x - x_0\|^2$, a tím $\|\lambda\, a\|^2 = 0$, $\lambda a = 0$. Tedy $x - x_0 = z \perp a$. Protože $a \in M$ bylo libovolné, dostáváme, že platí $x - x_0 \in M^{\perp}$.

" $\Leftarrow$ " Ať $x - x_0 \perp M$. Pak pro každé $a \in M$ máme

$$\|x - a\|^2 = \|x - x_0 + \underbrace{x_0 - a}_{\in M}\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - a\|^2 \geq \|x - x_0\|^2.$$

To znamená, že x_0 je nejbližší bod množiny M k bodu x. $\square$

Opakování lineární algebry:

Definice: Podprostory V_1 a V_2 lineárního prostoru V tvoří **algebraický rozklad** prostoru V (prostor V je **direktním součtem** podprostorů V_1 a V_2), jestliže

$$V \ = \ \text{lineární obal } \ V_1 \cup V_2 \qquad \text{a} \qquad V_1 \cap V_2 \ = \ \{\mathbf{0}\}.$$

Píšeme

$$V = V_1 \oplus_{\text{lin}} V_2.$$

Ekvivalentně: Pro každé $v \in V$ existují jediné dva prvky $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ tak, že $v = v_1 + v_2$.
(Jednoznačnost: Je-li $x = v_1 + v_2 = u_1 + u_2$, kde $v_1, u_1 \in V_1$, $v_2, u_2 \in V_2$, pak $v_1 - u_1 = u_2 - v_2 \in V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.)

Definice: Prostor V se skalárním součinem je **ortogonální součet** podprostorů V_1 a V_2, jestliže

$$V \ = \ \text{lineární obal } \ V_1 \cup V_2 \qquad \text{a} \qquad V_1 \ \perp \ V_2\,.$$

Píšeme

$$V \ = \ V_1 \oplus V_2.$$

Ekvivalentně: Pro každé $v \in V$ existují jediné dva prvky $v_1 \in V_1$ a $v_2 \in V_2$ tak, že $v = v_1 + v_2$ a $v_1 \perp v_2$.
(Jednoznačnost dostáváme jako u algebraického rozkladu z toho, že pro $V_1 \perp V_2$ platí $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$.)

Věta (Projekční věta): Je-li M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, pak

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Důkaz: Nechť x_M je nejbližší bod k bodu x v množině M. Pak $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_{M^\perp} = x - x_M \in M^\perp$. Tedy H je lineární obal $M \cup M^\perp$. Protože $M \perp M^\perp$, máme $H = M \oplus M^\perp$. $\square$

Poznámka : Projekční věta nám vlastně říká toto: Pro každé $x \in H$ je $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_M \in M$ a $x_{M^\perp} \in M^\perp$. Prvek x_M je nejlepší aproximací prvku x v M a prvek $x_{M^\perp}$ je nejlepší aproximací prvku x v $M^\perp$ (to plyne z $x_M = x - x_{M^\perp} \in M$ a $M \perp M^\perp$).

Poznámka : Z Pythagorovy věty pro $x = x_M + x_{M^\perp}$

$$\|x_M\| = \|x\| \;\Leftrightarrow\; x \in M \qquad \text{a} \qquad \|x_M\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in M^\perp.$$

Definice : Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Potom zobrazení $P_M : H \to M$ takové, že

$$P_M : \; x \;\; \mapsto \;\; x_M \text{ - nejlepší aproximace } x \text{ v } M,$$

nazýváme **ortogonální projekce** na podprostor Y.

Platí : P_M je omezený lineární operátor, pro který je $P_M^2 = P_M$. Je-li M nenulový, pak $\|P_M\| = 1$.

Důkaz: Linearita: Nechť $x, y \in H$, pak $P_M x = x_M \in M, P_M y = y_M \in M$, odkud $P_M x + P_M y \in M$. Dále $x - x_M \in M^\perp$, $y - y_M \in M^\perp$, tedy $(x+y) - (P_M x + P_M y) = (x+y) - (x_M + y_M) = (x - x_M) + (y - y_M) \in M^\perp$. To znamená, že $P_M(x+y) = P_M x + P_M y$. Je-li nyní $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$), pak $\alpha P_M x \in M$ a $\alpha x - \alpha P_M x = \alpha(x - P_M x) \in M^\perp$. Tedy $P_M(\alpha x) = \alpha P_M x$.

Omezenost a velikost normy: Pro $x \in H$ máme $x = x_M + x_{M^\perp}$, kde $x_M \in M$ a $x_{M^\perp} \in M^\perp$ jsou navzájem kolmé. Tedy podle Pythagorovy věty $\|x\|^2 = \|x_M\|^2 + \|x_{M^\perp}\|^2 \geq \|x_M\|^2 = \|P_M x\|^2$. Odtud $\|P_M\| \leq 1$ a P_M je omezený operátor. Navíc pro libovolné nenulové $x \in M$ máme $P_M x = x$, tedy $\|P_M x\| = \|x\|$, což znamená, že $\|P_M\| \geq 1$. Z obou odhadů pro $\|P_M\|$ dostáváme $\|P_M\| = 1$.

Projekce: Protože pro každé $y \in M$ je $P_M y = y$ a pro každé $x \in H$ je $P_M x \in M$, máme $P_M^2 x = P_M(P_M x) = P_M x$.

$\square$

Příklady:

(i) Mějme obecný Hilbertův prostor H a $y \in H$ nenulové. Pro $Y = \operatorname{lin}\{y\}$ máme

$$P_Y(x) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\, y\,.$$

Ověří se výpočtem: $\langle x - P_M(x), y\rangle = 0$.

(ii) $V = \mathbb{R}^3$, $M = \{(x, y, 0) \;:\; x, y \in \mathbb{R}\}$. Pak $P_M : (x, y, z) \to (x, y, 0)$ je kolmé promítání prostoru na rovinu xy.

(iii) $V = L^2(\mathbb{R})$ $M = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \;:\; f(x) = 0 \;\; \forall x \notin \langle 0,\, 1\rangle\}$. Pak

$$P_M(f) = \chi_{\langle 0,\,1\rangle} f\,.$$

Důsledky (projekční věty) :

a) Pro každý vlastní uzavřený podprostor M v Hilbertově prostoru H existuje nenulový vektor $x \in H$ tak, že

$$x \perp M.$$

b) Je-li M uzavřený podprostor, pak pro $M^{\perp\perp} = (M^{\perp})^{\perp}$ platí

$$M = M^{\perp\perp}.$$

c) Je-li A podmnožina H, pak

$$[A] = A^{\perp\perp},$$

kde $[A] = \overline{\operatorname{lin} A}$.

Důkaz: **a)** Podle projekční věty máme $H = M \oplus M^{\perp}$. Protože M je vlastní podprostor, musí existovat $0 \neq x \in M^{\perp}$.
b) Použijeme-li projekční větu postupně na podprostory M a $M^{\perp}$ dostaneme

$H = M \oplus M^\perp = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp$. Odtud $(M^\perp)^\perp = M$.
c) Každý prvek z A je kolmý na všechny prvky v $A^\perp$, tedy $A \subset (A^\perp)^\perp$. Protože $(A^\perp)^\perp$ je uzavřený podprostor obsahující A a $[A]$ je nejmenší uzavřený podprostor obsahující A, máme $[A] \subset (A^\perp)^\perp$. Rovnost obou podprostorů dokážeme sporem. Předpokládejme, že $[A]$ je vlastní podprostor prostoru $(A^\perp)^\perp$. Pak podle části a), aplikované na Hilbertův prostor $(A^\perp)^\perp$ a jeho uzavřený podprostor $[A]$, existuje nenulový prvek $x \in (A^\perp)^\perp \cap [A]^\perp \subset (A^\perp)^\perp \cap A^\perp$. (Je-li totiž $B \subset C$, pak $C^\perp \subset B^\perp$.) Tím jsme ale dostali spor s tím, že $(A^\perp)^\perp \cap A^\perp = \{0\}$. Musí tedy být $[A] = (A^\perp)^\perp$. $\square$

Jak spočítat $P_M(x)$?

Motivace: Předpokládejme, že H je Hilbertův prostor a M jeho podprostor takový, že $M = \operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_n)$, kde

$$\|e_j\| = 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \qquad \text{a} \qquad \langle e_j, e_i \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$$

(tj. množina $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je **ortonormální**). Potom pro každé $x \in H$ je

$$P_M(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ totiž platí

$$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \delta_{ji} =$$
$$= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0,$$

což znamená, že $(x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j) \perp \operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_n) = M$. Protože navíc $\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \in M$, je to nejlepší aproximace x v M.

Obecnější případ. Ať M je konečně dimenzionální podprostor s lineární bází $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a $x \in H$. Pak

$$P_M(x) = a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n,$$

kde z podmínek kolmosti $(x - P_M x) \perp \varphi_i \ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ dostaneme koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ jako řešení soustavy rovnic

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \langle \varphi_j,\, \varphi_i \rangle = \langle x,\, \varphi_i \rangle \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Matice této soustavy

$$\big(\langle \varphi_j,\, \varphi_i \rangle \big)_{i,j=1,\ldots,n}$$

se nazývá **Gramova matice** vektorů $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. V našem případě, kdy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tvoří bázi podprostoru M, je Gramova matice regulární. Každý konečně dimenzionální podprostor je totiž uzavřený, takže podle věty o nejlepší aproximaci má soustava pro koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ vždy právě jedno řešení. V případě kdy jsou vektory $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jednotkové a navzájem kolmé, je Gramova matice jednotková matice a platí, že $\alpha_i = \langle x, \varphi_i \rangle$, což dá předchozí příklad.

Metoda nejmenších čtverců

Uvažujme $H = \mathbb{R}^m$ (m velké). Mějme dánu tabulku naměřených hodnot funkce f

x_1	x_2	$\ldots$	x_m	- uzly měření x
f_1	f_2	$\ldots$	f_m	- naměřené hodnoty f

Funkci f bychom chtěli aproximovat pomocí lineární kombinace funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, kde $n \ll m$, pro které jsou vektory $(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_1(x_m)),\ \ldots,\ (\varphi_n(x_1), \ldots, \varphi_n(x_m))$ z $\mathbb{R}^m$ lineárně nezávislé (pak jsou nutně i funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ lineárně nezávislé). Můžeme mít např. $\varphi_1 = 1,\ \varphi_2 = x,\ \varphi_3 = x^2,\ \ldots,\ \varphi_n = x^{n-1}$. Hledaná aproximace

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$$

funkce f by měla minimalizovat střední kvadratickou odchylku

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |f_j - \varphi(x_j)|^2 \Big)^{1/2} \ = \ \|(f_1, \ldots, f_m) - (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)\|_2.$$

Jedná se tu o úlohu ortogonální projekce na lineární obal vektorů

$$(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_m)),\ \dots,\ (\varphi_n(x_1), \dots, \varphi_n(x_m))$$

v $\mathbb{R}^m$.

Zobecnění: V $\mathbb{R}^m$ uvažujeme skalární součin

$$\langle (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m) \rangle = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i y_i \,,$$

kde $w_i > 0$ jsou váhy určující důležitost daného měření.

Ortonormální báze

Definice: Množina A v prostoru se skalárním součinem V je **ortogonální**, jestliže $\langle x, y \rangle = 0$, kdykoliv $x, y \in A, x \neq y$. Množina A je **ortonormální**, jestliže je ortogonální a $\|x\| = 1$ pro všechna $x \in A$.

Příklady: 1) $\underline{\mathbb{C}^n}$:

$$\begin{array}{c} (1,\, 0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, 0) \\ (0,\, 1,\, 0,\, \dots,\, 0,\, 0) \\ \vdots \\ (0,\, 0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, 1) \end{array}$$

je ortonormální (konečná posloupnost) – „prototyp“

2) Diskrétní Fourierova báze $\mathbb{C}^n$:
(konvence: $x = (x(0), x(1), \ldots, , x(n-1)))$

$$F \;=\; \{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\},$$

kde pro $m, k = 0, \ldots, n-1$ je

$$f_m(k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}\, mk}.$$

$(i^2 = 1, \quad \mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi)$

Pozorování: Funkce $t \to \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}\, mt}$ v proměnné m je n-periodická, m zvětšuje frekvenci, kruhová rychlost: $\frac{2\pi}{n}\, m$, perioda: $T = \frac{n}{m}$.

Ověříme, že $\{f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ je ortonormální množina:
Označme $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$ $(\omega^n = 1,\ \omega^{k+n} = \omega^k)$. Pak $f_m(k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \omega^{mk}$ a

$$\langle f_j,\, f_m\rangle \;=\; \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{jl}\omega^{-ml} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(j-m)l} \;=$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{pro } j = m \\ \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1-(\omega^{j-m})^n}{1-\omega^{j-m}} = 0 & \text{pro } j \neq m \end{cases}$$

Fourierova báze pro $n = 2$:

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1,\ \ 1)$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1, -1)$$

Fourierova báze pro $n = 4$:

$$\tfrac{1}{2}\,(1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1)$$
$$\tfrac{1}{2}\,(1,\ \ i, -1, -i)$$
$$\tfrac{1}{2}\,(1, -1,\ \ 1, -1)$$
$$\tfrac{1}{2}\,(1, -i, -1,\ \ i)$$

Diskrétní Fourierova transformace (DFT):

$$\big(x(j)\big)_{j=0}^{n-1} \qquad \longmapsto \qquad \underbrace{(\,\langle x,\, f_j\rangle\,)_{j=0}^{n-1}}_{\text{souřadnice vůči Fourierově bázi}}$$

Poznámka : Nechť V je prostor se skalárním součinem konečné dimenze a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je jeho ortonormální báze. Potom pro každá $x, y \in V$ platí

- $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$ (konečně dimenzionální Fourierův rozklad)

  Je-li totiž $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, pak po skalárním vynásobení x bázovým vektorem e_i dostaneme $a_i = \langle x, e_i \rangle$.

- $||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2,$

  neboť máme

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2.$$

  (Můžeme též použít Pythagorovu větu.)

- $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}.$

  (Zdůvodnění jako u $\|x\|^2$).

Konečně dimenzionální Hilbertovy prostory jsou tedy v podstatě $\mathbb{C}^n = \ell_n^2$.

Otázka: Jak je tomu v nekonečné dimenzi?

Nejdřív se podíváme na existenci ortonormální posloupnosti v daném podprostoru:

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Nechť $x_1, x_2, ...$ je lineárně nezávislá posloupnost. Nalezněme ortonormální posloupnost $e_1, e_2, \cdots$ tak, že pro všechna n

$$\text{lin}(e_1, \ldots, e_n) \;=\; \text{lin}(x_1, \ldots, x_n) \;:$$

1. krok

$$e_1 = \frac{x_1}{||x_1||}$$

2. krok

$$v_2 = x_2 - P_{\text{lin}(e_1)}(x_2) = x_2 - \langle x_2,\, e_1 \rangle\, e_1$$
$$e_2 = \frac{v_2}{||v_2||}$$

3. krok

$$v_3 = x_3 - P_{\text{lin}(e_1,e_2)}(x_3) = x_3 - \langle x_3,\, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3,\, e_2 \rangle\, e_2$$
$$e_3 = \frac{v_3}{||v_3||}$$

$\vdots$

n**-tý krok**

$$v_n = x_n - P_{\text{lin}(e_1,e_2,\ldots,e_{n-1})}(x_n) = x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n,\, e_j \rangle\, e_j$$
$$e_n = \frac{v_n}{||v_n||}$$

(Protože je posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ lineárně nezávislá a $\text{lin}(e_1, \ldots, e_n) = \text{lin}(x_1, \ldots, x_n)$, jsou vektory $x_1, v_2, v_3, \ldots$ nenulové, a tedy posloupnost $e_1, e_2, \ldots$ je korektně definovaná.)

Příklad : Najděte ortonormální bázi podprostoru M prostoru $V = \mathbb{R}^3$, kde

$$M = \{(y_1, y_2, y_2) \,\big|\, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}.$$

Řešení: Množina M je rovina, jejímž normálovým vektorem je vektor $(1, 1, 1)$. Lineární bázi podprostoru M tvoří např. vektory $x_1 = (1, -1, 0)$, $x_2 = (1, 0, -1)$.

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} \\
v_2 &= x_2 - \langle x_2,\, e_1\rangle e_1 = (1,0,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}} = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \\
e_2 &= \frac{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)}{\sqrt{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Tvrzení : Normovaný prostor X je separabilní, právě tehdy když existuje spočetná množina $\{y_n \,|\, n \in N\} \subset X$ tak, že

$$\overline{\mathrm{lin}\,\{y_n |\, n \in N\}} \;=\; X.$$

Důkaz: Spočetná množina

$$\{\alpha_1\, y_1 + \cdots + \alpha_n\, y_n \,\big|\, n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}\}$$

má za uzávěr celé X na základě aproximace reálných čísel racionálními. $\square$

Každý uzavřený podprostor M separabilního Hilbertova prostoru H je separabilní. Je-li totiž (x_n) hustá posloupnost v H pak $P_M(x_n)$ je hustá posloupnost v M.

Definice : **Ortonormální báze** (ONB) Hilbertova prostoru H je ortonormální množina A taková, že

$$\overline{\mathrm{lin}\, A} \;=\; H \qquad (\Leftrightarrow A^{\perp} = \{\mathbf{0}\}).$$

Věta Existence ortonormální báze:
(1) Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

(2) Každá ortonormální množina v Hilbertově prostoru je částí ortonormální báze.

(3) Každá ortonormální množina v separabilním Hilbertově prostoru je spočetná.

Důkaz: **(1)** Ukážeme pro separabilní prostor H, obecnější případ je obtížný. Nechť $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ je hustá množina v H. Existuje spočetná báze $\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ prostoru $\operatorname{lin}\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Na posloupnost $y_1, y_2, \dots$ aplikujeme ortogonalizační proces a dostaneme ortonormální posloupnost $e_1, e_2, \dots$ takovou, že

$$\operatorname{lin}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{lin}\{y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{lin}\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Tedy $\overline{\operatorname{lin}\{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}} = H$.

(2)

Nechť A je ortonormální množina v H. Položme

$$M = [A] \; (= \overline{\operatorname{lin} A}\,).$$

Podle Projekční věty platí, že

$$H = [A] \oplus [A]^{\perp}.$$

Na základě (1) existuje ortonormální báze B prostoru $[A]^{\perp}$. Pak sjednocení obou bází $A \cup B$ je ortonormální báze H rozšiřující A.

(3) Důkaz provedeme sporem. Ať A je nespočetná ortonormální množina v H. Pro každé $x \in A$ existuje $y(x) \in \{y_n | \, n \in N\}$ tak, že $\|x - y(x)\| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Přitom pro $x, z \in A$, $x \neq z$, je $x \perp (-z)$, tedy $\|x - z\| = \|x + (-z)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|-z\|^2} = \sqrt{2}$. Zároveň ale platí

$$\sqrt{2} = \|x - z\| \leq \|x - y(x)\| + \|y(x) - y(z)\| + \|y(z) - z\| < \sqrt{2} + \|y(x) - y(z)\|.$$

Musí tak být $y(x) \neq y(z)$ pro $x, z \in A$, $x \neq z$. Tedy $\{y(x) \,|\, x \in A\}$ je nespočetná podmnožina spočetné množiny $\{y_n | \, n \in N\}$. Tím jsme došli ke sporu. Geometrickou podstatou této argumentace je skutečnost, že jsme našli nespočetný systém otevřených disjunktních koulí v prostoru H se středy v prvcích dané ortonormální množiny. $\square$

Tvrzení : Ať $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální množina v Hilbertově prostoru H.

(i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

(ii) Pro $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je $||x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ („nekonečná Pythagorova věta“).

Důkaz: **(i)** „ $\Rightarrow$ “ Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje a její součet je x. Protože podle Pythagorovy věty

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|^2$$

dostáváme ze spojitosti normy limitním přechodem pro $N \to \infty$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\,.$$

„ $\Leftarrow$ “ Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Pak pro částečné součty $s_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ platí (při $N < K$)

$$\|s_K - s_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{K} \|x_n\|^2 \overset{N,K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Posloupnost částečných součtů $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ je tedy cauchyovská, a protože je H úplný prostor, je také konvergentní.

(ii) Viz důkaz **(i)**. $\square$

Důsledek
Je-li $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost v Hilbertově prostoru H a $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \quad \text{konverguje právě tehdy když} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty\,.$$

Větu o rozvoji formulujeme a dokážeme pro separabilní prostor. Platí ovšem obecně.

Věta o rozvoji : Ať H je separabilní Hilbertův prostor s ortonormální bází $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, pak pro každé $x \in H$ platí

$$x \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, e_n\rangle\, e_n \qquad \text{(abstraktní Fourierův rozvoj)}$$

a

$$\|x\| \;=\; \sqrt{\sum_{n=1}^{n} |\langle x,\, e_n\rangle|^2} \qquad \text{(Parsevalova rovnost)}.$$

Důkaz: Označme $V_N = \operatorname{lin}(e_1, \ldots, e_N)$ a P_N ortogonální projekci na V_N. Pak $P_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x,\, e_n\rangle e_n$. Protože $\|P_N\| \le 1$, máme

$$\|P_N x\|^2 = \|\sum_{n=1}^{N} \langle x,\, e_n\rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x,\, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}\,.$$

Odtud $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,\, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 < \infty$, tedy řada $\sum_{n=1}^{N} \langle x,\, e_n\rangle e_n$ konverguje. Ať nyní $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, e_n\rangle e_n$. Pak $\langle x - y,\, e_n\rangle = \langle x,\, e_n\rangle - \langle x,\, e_n\rangle = 0$, tj. $x - y \perp \{e_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Musí tedy být $x - y = 0$, a tím $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,\, e_n\rangle e_n = x$. Parsevalovu rovnost nyní dostáváme z části (ii) předchozího tvrzení. $\square$

Další zobecnění:

Věta (Popis ortogonální projekce) : Ať $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální posloupnost v Hilbertově prostoru H. Ať P je ortogonální projekce na uzavřený podprostor $\overline{\operatorname{lin}\{f_n \mid n = 1, 2, \dots\}}$. Potom

$$Px = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle f_n$$

a

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n \rangle|^2 \qquad \text{(Besselova nerovnost).}$$

Důkaz: Stejně jako v důkazu předchozí věty dostaneme $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$. Položme $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, f_n \rangle f_n$. Pak $\langle x - y, f_m \rangle = 0$ pro každé $m \in \mathbb{N}$, tedy $x - y \in \overline{\operatorname{lin}\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}}^{\perp}$, a tím $y = Px$. $\square$

Prototyp : „Fourierova řada“

Konvence: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} x_n$.

- Uvažujme komplexní Hilbertův prostor $L^2\langle a, a+T \rangle$, $T > 0$ (obsahuje komplexní funkce). Označme $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a položme

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}}\, \mathrm{e}^{in\omega x}.$$

Věta : Posloupnost funkcí $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je ortonormální báze prostoru $L^2\langle a, a+T \rangle$.

Důkaz: Ukážeme jen, že posloupnost $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je ortonormální. Dokázat, že její lineární obal je hustý v prostoru $L^2\langle a, a+T \rangle$ je komplikované.

Máme

$$\langle e_n,\, e_m\rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{e}^{in\omega x}\,\mathrm{e}^{-im\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} \mathrm{e}^{i(n-m)\omega x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{T}\,T \;=\; 1 & \text{pro} \;\; n = m, \\ \frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(n-m)\omega x}}{i(n-m)\omega}\right]_a^{a+T} = 0 & \text{pro} \;\; n \neq m. \end{cases}$$

(Využili jsme toho, že pro $n \neq m$ jsou funkce $\mathrm{e}^{i(n-m)\omega x}$ T-periodické.) Tedy posloupnost $(e_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ je opravdu ortonormální. $\square$

Mějme nyní funkci $f \in L^2\langle a,\, a+T\rangle$. Pak

$$\langle f,\, e_n\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{T}}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x,$$

a tedy na základě předchozí věty

$$f \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,\, e_n\rangle e_n \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\Big(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{e}^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x\Big)}_{=:\; c_n}\mathrm{e}^{in\omega x} \;=$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{in\omega x} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\sqrt{T}\,c_n)\,e_n\,.$$

Funkce f se rovná součtu řady v prostoru $L^2\langle a,\, a+T\rangle$.

Parsevalova rovnost nám dává

$$\|f\|_2^2 \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\,|c_n|^2 \;=\; T\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

- Reálná ortonormální báze v $L^2\langle a,\, a+T\rangle$: Protože $(\mathrm{e}^{in\omega x})_{n=-\infty}^{\infty}$ je ortogonální systém, tvoří, pro $n = 1, 2, \ldots$, reálné funkce

$$\sin n\omega x \;=\; \frac{\mathrm{e}^{in\omega x} - \mathrm{e}^{-in\omega x}}{2i}\,,$$

$$\cos n\omega x \;=\; \frac{\mathrm{e}^{in\omega x} + \mathrm{e}^{-in\omega x}}{2}$$

také ortogonální systém (stačí si uvědomit, že $\{e^{in\omega t}, e^{-in\omega t}, e^{im\omega t}, e^{-im\omega t}\}$ je ortogonální množina, jestliže $n \neq m$. Platí přitom

$$\|1\|_2^2 = \|\cos 0\omega x\|_2^2 = T$$

a pro $n \neq 0$

$$\|\sin n\omega x\|_2^2 = \int_a^{a+T} \sin^2 n\omega x \,\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} \frac{1-\cos 2n\omega x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{T}{2},$$

$$\|\cos n\omega x\|_2^2 = \int_a^{a+T} \cos^2 n\omega x \,\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} \frac{1+\cos 2n\omega x}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{T}{2}.$$

Tvrzení: Posloupnost funkcí

$$\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n\omega x, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega x \;\Big|\; n = 1, 2, \dots\} \tag{3}$$

tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2\langle a, a+T\rangle$.

Důkaz: Lineární obal prvků této posloupnosti obsahuje všechny funkce $\mathrm{e}^{in\omega x}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. $\square$

Pro reálnou funkci $f \in L^2\langle a, a+T\rangle$ platí (ve smyslu konvergence v $L^2(\mathbb{R})$)

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

kde a_n, b_n jsou reálné a stanoví se skalárním součinem s prvky báze (3), tedy

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \,\mathrm{d}x$$

a pro $n \neq 0$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos n\omega x \,\mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin n\omega x \,\mathrm{d}x.$$

Důležité aproximační věty

Věta (Weierstrassova): Pro $-\infty < a < b < \infty$ tvoří polynomy hustou množinu v $C\langle a,b\rangle$ (s maximovou normou).

Věta: Je-li $1 \le p \le \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, pak spojité funkce tvoří hustou množinu v $L^p\langle a,b\rangle$.

Definice: **Nosič funkce** je uzávěr množiny všech bodů, v kterých je funkce nenulová.

Věta: Nekonečně diferencovatelné funkce s omezeným nosičem jsou husté v prostoru $L^p\langle a,b\rangle$, kde $1 \le p \le \infty$, $-\infty \le a < b \le \infty$.

Důsledek: Pro $-\infty < a < b < \infty$ platí

(i) Polynomy jsou husté v $L^2\langle a,b\rangle$.

(ii) $\overline{\operatorname{lin}(\mathbf{1}, x, x^2, \ldots)} = L^2\langle a,b\rangle$.

Důkaz: **(i)** Pro funkce $u, v \in C\langle a,\, b\rangle$ je

$$\|u-v\|_2^2 = \int_a^b |u(x)-v(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \int_a^b \|u(x)-v(x)\|_{\sup}^2\,\mathrm{d}x \le \|u-v\|_{\sup}^2\,(b-a).$$

Mějme nyní dánu funkci $f \in L^2\langle a,\, b\rangle$ a $\varepsilon > 0$. Protože jsou spojité funkce husté v $L^2\langle a,\, b\rangle$, existuje funkce $g \in C\langle a,\, b\rangle$ taková, že

$$\|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Podle Weierstrassovy věty k této spojité funkci g existuje polynom p tak, že

$$\|g-p\|_{\sup} \le \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{b-a}}\,.$$

Pak

$$\|f-p\|_2 \;\le\; \|f-g\|_2+\|g-p\|_2 \;\le\; \|f-g\|_2+\|g-p\|_{\sup}\sqrt{b-a} \;<\; \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\sqrt{b-a}}\,\sqrt{b-a} \;=\; \varepsilon.$$

Tedy každou funkci z $L^2\langle a,\, b\rangle$ můžeme libovolně přesně aproximovat polynomem.

(ii) Množina $\overline{\operatorname{lin}(\mathbf{1}, x, x^2, \ldots)}$ je tvořena právě všemi polynomy, a ty jsou podle (i) husté v $L^2\langle a,\, b\rangle$. $\square$

Důsledek : Ortogonalizací posloupnosti $\mathbf{1}, x, x^2, \ldots$ získáme ONB prostoru $L^2\langle a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < \infty$.

Příklady důležitých ortonormálních bází

(1) $\underline{L^2\langle -1,\, 1\rangle \text{ (reálný):}}$ Vyjdeme z lineárně nezávislé podmnožiny $\{1,\, x,\, x^2,\, \ldots\}$ (jejíž lineární obal je hustý v $L^2\langle -1,\, 1\rangle$) a aplikujeme na ni Gram-Schmidtův ortogonalizační proces. Získáme tak ortonormální bázi prostoru $L^2\langle -1,\, 1\rangle$ tvořenou funkcemi

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\; P_n(x),$$

kde P_n jsou tzv. **Legendreovy polynomy** ($P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^2 - 3x),\ \ldots$).

(2) $\underline{L^2(\mathbb{R}) \text{ (reálný):}}$ Dá se ukázat, že posloupnost funkcí $w(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},\ tw(t),\ t^2w(t), \ldots$ má hustý lineární obal v $L^2(\mathbb{R})$. Gram-Schmidtovým procesem získáme ortonormální bázi

$$e_n(t) \;=\; \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\;\; \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, H_n(t),$$

kde H_n jsou tzv. **Hermitovy polynomy** ($H_0(t) = 1,\ H_1(t) = 2t,\ H_2(t) = 4t^2 - 2,\ H_3(t) = 8t^3 - 12t,\ \ldots$).

(3) $L^2\langle 0, \infty)$ (reálný): Lze ukázat, že $e^{-\frac{t}{2}}, \ t\,e^{-\frac{t}{2}}, \ t^2\,e^{-\frac{t}{2}}, \dots$ je posloupnost s hustým lineárním obalem v $L^2\langle 0, \infty)$. Gram-Schmidtovým procesem získáme ortonormální bázi

$$h_n(t) \ = \ e^{-\frac{t}{2}}\, L_n(t),$$

kde L_n jsou tzv. **Laguerreovy polynomy** $(L_0(t) = 1, \ L_1(t) = 1 - t, \ L_2(t) = 1 - 2t + \frac{1}{2}\,t^2, \ L_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}\,t^2 - \frac{1}{6}\,t^3, \ \dots)$.

(4) Waveletové báze v $L^2(\mathbb{R})$: Vyjděme z vhodné funkce $\psi \in Ł^2(\mathbb{R})$ a z ní vytvořme afinními transformacemi funkce

$$2^{\frac{j}{2}}\,\psi(2^j x - k), \qquad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Pokud tyto funkce tvoří ortonormální bázi v $L^2(\mathbb{R})$, nazýváme ji waveletová báze. Funkci ψ pak říkáme **mateřský wavelet**.