Cvičení: Normované prostory

1. Na prostoru X máme dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Rozhodněte, která z následujících funkcí je norma na X.
   (a) $k \cdot \|\cdot\|_1$, kde $k > 0$.
   (b) $k \cdot \|\cdot\|_1$, kde $k < 0$.
   (c) $c\|\cdot\|_1 + d\|\cdot\|_2$, kde $c, d > 0$.
   (d) $c\|\cdot\|_1 - d\|\cdot\|_2$, kde $c, d > 0$.

2. Popište všechny normy na $\mathbb{R}$.

3. Ukažte, že pro definici normy můžeme vypustit předpoklad nezápornosti.

4. Nechť p je nezáporná funkce na reálném prostoru X splňující následující podmínky:
   (a) Funkce $\alpha \to p(\alpha x)$ je spojitá pro všechna $x \in X$.
   (b) $x = 0$ právě tehdy, když $p(x) = 0$.
   (c) $p(nx) = |n| \cdot p(x)$ pro všechna celá čísla n.
   (d) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in X$.

   Ukažte, že p je norma.

5. B_X je jednotková koule v normovaném prostoru X.
   (a) Ukažte, že B_X je konvexní množina neobsahující žádnou přímku procházející počátkem .
   (b) Jak interpretovat geometricky ekvivalenci norem pomocí jednotkových koulí?
   (c) Předpokládejme, že $X = \mathbb{C}^n$. Ukažte, že B_X obsahuje eukleidovskou kouli o vhodném poloměru se středem v nule.

6. Ukažte, že prostor X je úplný právě tehdy, když platí: Jel-li (x_n) posloupnost v X taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje.

7. Na prostoru X je dána nezáporná funkce $p(x)$, která splňuje:
   (a) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}\,(\mathbb{R})$ a $x \in X$.
   (b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in X$.

   Takováto funkce se nazývá seminorma. Ukažte, že $N = \{x \in X \mid p(x) = 0\}$ je podprostor. Ukažte, že X/N je normovaný prostor s normou
   $$\|x + N\| = \inf\{p(x + n) \mid n \in N\}\,.$$

8. Ukažte, že každý nekonečně dimenzionální vektorový prostor má nekonečně mnoho neekvivalentních norem.

9. Nechť X, Y jsou normované prostory. Ukažte (sporem), že zobrazení $f : X \to Y$ je spojité v $x_0 \in X$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové,

$$\|x - x_0\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon.$$

Cvičení: Operátory, funkcionály

1. Ukažte, že normovaný prostor má nekonečnou dimenzi právě tehdy, když na něm existuje nespojitý funkcionál.
2. Nechť $T \in B(X, Y)$. Ukažte, že $\|T\|$ je nejmenší konstanta $c \geq 0$ taková, že

   $$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

   pro všechna $x \in X$.
3. T je lineární zobrazení z $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ do $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$. Stanovte explicitně jeho normu.
4. Nechť $T \in B(X, Y)$, $U \in B(Y, Z)$. Ukažte, že UT je spojité a

   $$\|UT\| \leq \|U\| \cdot \|T\|.$$