KAPITOLA 7:
Operátory a funkcionály na Hilbertových prostorech

20. května 2020

Lineární algebra: Je-li f nenulová lineární forma na lineárním prostoru L, pak

$$\operatorname{Ker} f = N(f) = \{x \in L \,:\, f(x) = 0\}$$

je prostor kodimenze jedna, nadrovina v L. To znamená, že pro každé $v \in L$, pro které je $f(v) \neq 0$ je

$$L = \operatorname{Ker} f + \operatorname{lin}(v)$$

(algebraický direktní součet.)

Argument: Záměnou v za jeho nenulový násobek můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat že $f(v) = 1$. Pro obecne $x \in L$ můžeme psát

$$x = (x - f(x)v) + f(x)v\,,$$

přičemž

$$f(x - f(x)v) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Popis omezených funkcionálů na Hilbertových prostorech:

Věta (Rieszova) : *Pro každý spojitý lineární funkcionál f na Hilbertově prostoru H existuje právě jeden vektor $y \in H$ tak, že*

$$f(x) = \langle x,\, y\rangle \qquad \forall x \in H.$$

Navíc platí $||f|| = ||y||$.

Důkaz:

Tvrzení očividně platí pro nulovy funkcionál. Předpokládejme tedy, že f je nenulový omezený funkcionál. Jeho jádro $N = \ker f$ je uzavřený vlastní podprostor v H. Podle projekční věty je

$$H = N \oplus N^{\perp}\,.$$

Vzhledem k tomu, že N je nadrovina, musí být $N^{\perp}$ jednodimenzionální a tedy

$$N^{\perp} = \mathrm{lin}(z)\,,$$

kde $\|z\| = 1$. Nebo-li

$$H = N \oplus \mathrm{lin}(z)\,.$$

Díky tomuto rozkladu platí pro obecné $x \in H$

$$f(x) = f(P_{\mathrm{lin}(z)(x)}) = f(\langle x, z\rangle\, z) = \langle x, z\rangle f(z) = \langle x, \overline{f(z)}z\rangle\,.$$

Vidíme tedy, že můžeme položit $y = \overline{f(z)}z$.

Nyní dokážeme jednoznačnost. Jestliže věta platí pro y_1 a y_2 pak máme pro všechna $x \in H$:

$$\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0\,,$$

což implikuje $y_1 = y_2$.

Potřebujeme ještě ověřit velikost normy. Pro $x \in B_H$, tj. $\|x\| \leq 1$, máme

$$|f(x)| \;=\; |\langle x,\, y\rangle| \;\leq\; \|x\|\,\|y\| \;\leq\; \|y\|.$$

Platí tedy $\|f\| \;=\; \sup_{x\in B_H} |f(x)| \;\leq\; \|y\|$. Přitom $\frac{y}{\|y\|} \in B_H$ a

$$\left|f\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big)\right| \;=\; \left|\Big\langle \frac{y}{\|y\|}\,, y\Big\rangle\right| \;=\; \|y\|.$$

Tedy $\|f\| = \|y\|$ a věta je dokázána. $\square$

Operátory a matice: Nechť H, K jsou separabilní Hilbertovy prostory nekonečné dimenze. Jako dříve označíme $B(H,K)$ prostor všech omezených operátorů z H do K (definičním oborem je celé H) a speciálně $B(H) := B(H,H)$. Nechť $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ je ortonormální báze prostoru H. Operátor $T \in B(H)$ je jednoznačně určen ,,nekonečnou maticí" vůči bázi $(e_j)_{j=1}^{\infty}$

$$(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}, \qquad \text{kde} \;\; a_{ij} \;=\; \langle Te_j,\, e_i\rangle.$$

Jde o analogii s maticovou reprezentací lineárního zobrazení na prostoru konečné dimenze. Pro $x \in H$ máme: pro

$$x \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \in H$$

$(\alpha_j = \langle x, e_j\rangle)$

Tedy dle spojitosti T máme:

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, Te_j \,.$$

Víme též, že

$$Te_j = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_j, e_i\rangle \, e_i$$

Tedy

$$Tx \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j Te_j \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle Te_j,\, e_i\rangle e_i \right) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle Te_j,\, e_i\rangle \alpha_j \right) e_i$$

$$= \; \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \right) e_i.$$

Zapsáno maticově

$$\begin{pmatrix} \langle Tx,\, e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle Tx,\, e_n\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Definice : *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $f \in L^\infty(X)$. Pak operátor $T_f : L^2(X) \to L^2(X)$ definovaný předpisem $T_f g = fg$ nazýváme **multiplikativní operátor**.*

Poznámka : **(1)** Všimněme si, že pro $g \in L^2(X)$ je $T_f g$ opravdu prvkem prostoru $L^2(X)$. Máme totiž

$$\int_X |T_f g|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_X |fg|^2 \,\mathrm{d}\mu \le \int_X (\|f\|_{L^\infty(X)}|g|)^2 \,\mathrm{d}\mu \le \|f\|^2_{L^\infty(X)} \int_X |g|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Odtud také vidíme, že operátor T_f je omezený a platí $\|T_f\| \le \|f\|_{L^\infty(X)}$. Ukážeme, že pokud je míra μ na X σ-konečná (tj. existují množiny X_i konečné míry, pro které je $\bigcup_{i=1}^\infty X_i = X$), platí i opačná nerovnost, a tedy $\|T_f\| = \|f\|_{L^\infty(X)}$. Pro jednoduchost budeme dále psát $\|.\|_\infty$ místo $\|.\|_{L^\infty(X)}$. Podle definice L^∞-normy je

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \in \mathbb{R} \mid |f| \le C \ \text{ s.v. na } X\}.$$

Z definice infima má pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina

$$M_n = \{x \,\big|\, |f(x)| > \|f\|_\infty(1 - \frac{1}{n})\}$$

kladnou míru. Všechny množiny $M_{n,i} = M_n \cap X_i$ mají konečnou míru, a protože $0 < \mu(M_n) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(M_{n,i})$, musí mít některá z těchto množin míru kladnou. Nahraďme tedy v dalším M_n některou z množin $M_{n,i}$ s kladnou mírou. Tím můžeme předpokládat, že M_n má konečnou míru. Uvažujme charakteristické funkce $g_n = \chi_{M_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože je $\mu(M_n) < \infty$, je $g_n \in L^2(X)$. Uvědomme si, že pro každou chrakteristicku funkci χ_M množiny M konečné míry platí

$$\|\chi_M\|_2^2 = \int_M 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(M)\,.$$

Máme tedy

$$\|T_f g_n\|^2 = \int_X |f g_n|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{M_n} |f|^2 \,\mathrm{d}\mu \geq$$
$$\geq \int_{M_n} (\|f\|_\infty (1 - \frac{1}{n}))^2 \,\mathrm{d}\mu = (\|f\|_\infty (1 - \frac{1}{n}))^2 \mu(M_n) =$$
$$= (\|f\|_\infty (1 - \frac{1}{n}))^2 \|g_n\|^2_{L^2(X)}.$$

Takže $\|T_f\| \geq \|f\|_\infty (1 - \frac{1}{n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což nám už dává $\|T_f\| \geq \|f\|_\infty$.

(2) Ukážeme, že platí: Pokud je $\mu(X) < \infty$, pak $T_f = 0$ právě tehdy, když $f = 0$ skoro všude na X.

Jestliže je funkce f skoro všude nulová, pak operátor T_f je nulový přímo z jeho definice. Než dokážeme opačnou implikaci, uvědomíme si, že v našem případě, kdy $\mu(X) < \infty$, pro $h \in L^\infty(X)$ platí

$$\int_X |h|^2 \,\mathrm{d}\mu \ \leq \ \int_X \|h\|^2_{L^\infty(X)} \,\mathrm{d}\mu \ = \|h\|^2_{L^\infty(X)} \,\mu(X) \ < \ \infty.$$

To znamená, že $L^\infty(X) \subset L^2(X)$. (Mohli jsme tu též použít Důsledek 3.4 z kapitoly o prostorech L^p.) Předpokládejme tedy nyní, že $f \in L^\infty(X)$ a $T_f = 0$. Jestliže budeme operátor T_f aplikovat na funkci $\overline{f}$ $\big(\in L^2(X)\big)$, dostaneme $|f|^2 = T_f \overline{f} = 0$ v $L^2(X)$. Funkce f je tedy skoro všude na X nulová.

Adjunkce operátoru

Technická poznámka:

Je-li $x \in H$, pak ze Schawarzovy nerovnosti vyplývá, že

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} |\langle x, y\rangle|$$

Tvrzení: Nechť H, K jsou Hilbertovy prostory a $T : H \to K$ je omezený lineární operátor (tj. $T \in B(H, K)$). Pak existuje jediný operátor $T^* \in B(K, H)$ takový, že

$$\langle Tx,\, y\rangle_K \;=\; \langle x,\, T^*y\rangle_H \qquad \forall\, x \in H,\, y \in K.$$

Důkaz: Mějme $y \in K$. Pak $f_y(x) = \langle Tx,\, y\rangle_K$ je omezený lineární funkcionál na H. Podle Rieszovy věty existuje právě jedno $y' \in H$ takové, že

$$\langle Tx,\, y\rangle_K \;=\; \langle x,\, y'\rangle_H \qquad \forall\, x \in H.$$

Definujme $T^* : K \to H$ předpisem

$$T^*(y) \;=\; y'.$$

(Definice je korektní.) Ukážeme, že T^* je omezený lineární operátor.

Linearita: Nechť $y, z \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Pak pro libovolné $x \in H$

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\alpha y + \beta z)\rangle = \langle Tx, \alpha y + \beta z\rangle = \langle Tx, y\rangle\overline{\alpha} + \langle Tx, z\rangle\overline{\beta} = \\ = \langle x, T^*y\rangle\overline{\alpha} + \langle x, T^*z\rangle\overline{\beta} = \langle x, \alpha T^*(y) + \beta T^*(z)\rangle\,.\end{aligned}$$

Tedy

$$T^*(\alpha y + \beta z) = \alpha T^*(y) + \beta T^*(z)\,.$$

Omezenost: Pro $y \in K$ máme:

$$\|T^*y\| = \max_{\|z\|\le 1} |\langle T^*y, z\rangle| = \max_{\|z\|\le 1} |\langle y, Tz\rangle| \le \|y\|\|T\|\,.$$

To znamená, že T^* je omezený a $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Jednoznačnost dokažte jako cvičení. $\square$

Definice : *Operátor T^* z předchozího tvrzení se nazývá* ***adjungovaný operátor*** *k operátoru T.*

Platí : Nechť $T \in B(H, K)$. Pak $T^{**} (= (T^*)^*) = T$ a $\|T\| = \|T^*\|$.

Důkaz: Pro každé $x \in H$ a $y \in K$ platí

$$\langle (T^*)^* x, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle = \langle Tx, y \rangle .$$

To znamená, že $(T^*)^* = T$. Aplikujeme-li nyní odhad normy adjungovaného operátoru z konce důkazu předchozí věty na adjungované operátory k operátorům T a T^*, dostaneme nerovnosti $\|T\| \geq \|T^*\|$ a $\|T^*\| \geq \|(T^*)^*\| = \|T\|$. Musí tedy platit $\|T^*\| = \|T\|$. $\square$

Příklady : (1) $\underline{H = \mathbb{C}}$: V tomto případě odpovídají omezené operátory násobení skalárem. Je-li $T \in B(\mathbb{C})$, $Tx = \alpha x$, pak $T^* x = \overline{\alpha} x$. Tedy adjunkce odpovídá konjugaci.

(2) $\underline{H = \mathbb{C}^n}$: Buď $(e_j)_{j=1}^n$ kanonická báze v $\mathbb{C}^n$. Pak podle poznámky za Rieszovou větou je operátor $T \in B(\mathbb{C}^n)$ reprezentován maticí $(a_{ij})_{i,j=1}^n = \mathbf{A}$, kde $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$. Adjungovaný operátor T^* je analogicky reprezentován maticí $(b_{ij})_{i,j=1}^n = \mathbf{B}$, kde

$$b_{ij} = \langle T^* e_j, e_i \rangle = \langle e_j, Te_i \rangle = \overline{\langle Te_i, e_j \rangle} = \overline{a_{ji}}.$$

Adjungovanému operátoru tak odpovídá tzv. hermitovsky sdružená matice (píšeme $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$).

(3) $\underline{H = L^2(\mathbb{R})}$: Mějme dánu funkci $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Nechť T_f je multiplikativní operátor na $L^2(\mathbb{R})$ daný funkcí f. Pak pro $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ platí

$$\langle T_f g, h \rangle = \langle fg, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} (fg) \, \overline{h} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g \, \overline{(\overline{f} \, h)} \, \mathrm{d}x = \langle g, \overline{f} \, h \rangle = \langle g, T_{\overline{f}} h \rangle.$$

Tedy $T_f^* = T_{\overline{f}}$.

Pravidla pro adjunkci :

Pro $T, R \in B(H)$ platí

(a) $(T+R)^* = T^* + R^*$

(b) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$

(c) $(TR)^* = R^* T^*$

(d) $T^{**} = T$

Důkaz: Ověřte z definice. $\square$

Značení: : Nechť $T \in B(H)$, potom označíme

$R(T) = \{Tx \mid x \in H\}$ („range“, obor hodnot operátoru T),

$N(T)$ (= $\text{Ker}(T)$) $= \{x \in H \mid Tx = 0\}$ (jádro, nulový prostor operátoru T).

$N(T)$ je vždy uzavřený podprostor. $R(T)$ uzavřen být nemusí.

Věta: Jádro a Obraz

Nechť $T \in B(H)$. Potom platí

(i)
$$R(T^*)^\perp = N(T)\,.$$

(ii)
$$N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}\,.$$

Důkaz: (i) Nechť nejdřív $z \perp R(T^*)$. Pak pro každé $x \in H$ je

$$0 = \langle z, T^*x\rangle = \langle Tz, x\rangle\,.$$

Tedy $Tz = 0$ a $z \in N(T)$. To znamená, že $R(T^*)^\perp \subset N(T)$.
Mějme nyní $z \in N(T)$. Pak pro každé $y \in H$ máme $\langle z, T^*y\rangle = \langle Tz, y\rangle = 0$, odkud $z \perp R(T^*)$. Tedy $N(T) \subset R(T^*)^\perp = \overline{R(T^*)}^\perp$. Dokázali jsme tak, že $N(T) = \overline{R(T^*)}^\perp$.
(ii) Podle (i)

$$N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}^{\perp\perp} = \overline{R(T^*)}\,.$$

□

Poznámka : Máme rozklady

$$H = N(T) \oplus \overline{R(T^*)} \qquad \text{a} \qquad H = N(T^*) \oplus \overline{R(T)}\,,$$

pro konečnou dimenzi

$$H = N(T) \oplus R(T^*) \qquad \text{a} \qquad H = N(T^*) \oplus R(T)\,.$$

Tedy např. je-li operátor T na, pak je operátor T^* prostý, apod.

Definice : *Nechť V je komplexní lineární prostor. Potom zobrazení $b : V \times V \to \mathbb{C}$ se nazývá **seskvilineární forma**, jestliže pro každá $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ platí*

(i) $b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z)$,
$b(x,y+z) = b(x,y) + b(x,z)$,

(ii) $b(\alpha\, x, y) = \alpha\, b(x,y)$,

(iii) $b(x, \alpha\, y) = \overline{\alpha}\, b(x,y)$.

Příklad : Pro $T \in B(H)$ je $b(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ seskvilineární forma.

Spojité seskvilineární formy vznikají tímto způsobem.

Definice *Seskvilineární forma b je omezená jestliže existuje konstanta $C > 0$ tak že*

$$|b(x,y)| \le C\|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in V$$

Věta - popis omezených seskvilineárních forem

Pro každou omezenou seskvilineární formu b na Hilbertově prostoru H existuje jediný $T \in B(H)$ takový, že

$$b(x,y) = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall x, y \in H\,.$$

Důkaz: Pro pevně zvolené $x \in H$ definujeme funkci

$$F(y) = \overline{b(x,y)} \qquad y \in H\,.$$

Snadno se ověří, že F je lineární. F je omezený funkcionál na H:

$$|F(y)| = |b(x,y)| \le (K\|x\|) \cdot \|y\|\,.$$

Podle Rieszovy věty existuje právě jeden $x' \in H$ tak, že

$$F(y) = \langle y, x'\rangle\,.$$

Jinými slovy,

$$\langle x', y\rangle = b(x,y) \qquad \forall y \in H\,.$$

Definujme nyní zobrazení

$$Tx = x' : H \to H.$$

Podle definice platí:

$$b(x,y) = \langle Tx, y\rangle \qquad \forall x, y \in H\,.$$

Snadno se ověří, že T je lineární. T je omezený operátor:

$$\|Tx\| = \sup_{y \in H_B} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{y \in H_B} |b(x,y)| \le C\|x\|\,.$$

$\square$

Lax Milgramovo Lemma (Abelova cena 2005)

Definice *Seskvilineární forma b na Hilbertově prostoru H je eliptická, jestliže existuje $\alpha > 0$ tak, že*

$$|b(x,x)| \geq \alpha \|x\| \qquad \forall x \in H\,.$$

Skalární součin je příklad eliptické formy.

Lax Milgramovo Lemma

Ať H je Hilbertův prostor s omezenou eliptickou seskvilineární formou $b(x,y)$ a funkcionálem $f \in H^*$. Pak existuje právě jediné $y \in H$ tak, že

$$f(x) = b(x,y) \qquad \forall x \in H$$

• Rieszova věta je speciálním případem Lax Milgramova lemmatu, kde $b(x,y) = \langle x, y \rangle$.

Důkaz Lax Milgramova Lemmatu:

Podle tvrzení výše existuje omezený operátor a $T \in B(H)$ tak, že

$$b(x,y) = \langle Tx, y \rangle\,.$$

Podle Rieszovy věty existuje $g \in H$ tak, že

$$f(x) = \langle x, g \rangle\,.$$

Chceme ukázat existence právě jediného $y \in H$, pro který platí

$$\langle x, g \rangle = \langle Tx, y \rangle \qquad \forall x \in H\,.$$

To je ekvivalentní podmínce

$$\langle x, g \rangle = \langle x, T^* y \rangle \qquad \forall x \in H \, .$$

Tudíž musíme ukázat jednoznačnost a existenci řešení rovnice

$$T^* y = g \, ,$$

kde g a T jsou dány a $y \in H$ je řešení.

To je totéž jako dokázat, že operátor T^* je prostý a surjektivní. K tomu se bude hodit následující nerovnost využívající elipticity formy $b(x, y)$:

$$\alpha \|x\|^2 \le |b(x, x)| = |\langle x, T^* x \rangle| \le \|x\| \cdot \|T^* x\| \, .$$

Tedy

$$\|T^* x\| \ge \alpha \|x\| \, , \quad \forall x \in H \tag{1}$$

Tato nerovnost okamžitě dá, že T^* je prostý operátor, neboť $Tx = 0$ implikuje, že $x = 0$. Co se týče surjektivity, ukážeme nejdříve, že $R(T^*)$ je uzavřený podprostor v H. Uvažujme pro toto posloupnost (u_n) v H a vektor $v \in H$ tak, že

$$\lim_{n \to \infty} T^* u_n = v \, .$$

Aplikací (1) máme pro všechna n, m

$$\|T^*(u_n - u_m)\| \ge \alpha \, \|u_n - u_m\| \, .$$

To znamená, že

$$\|u_n - u_m\| \to 0 \text{ pro } n, m \to \infty \, .$$

Jinými slovy, posloupnost (u_n) je caychyovská a má tudíž limitu u. Dle spojitosti T^* to ovšem znamená, že

$$\lim_{n \to \infty} T^* u_n = T^* u \, .$$

Tedy $v = T^*u$ je v $R(T^*)$ a tímto je dokázáno, že $R(T^*)$ je uzavřený. Podle věty o rozkladu pak máme, že

$$R(T^*) = \overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp} \, . \tag{2}$$

Nicméně $N(T) = \{0\}$. To plyne z elipticity neboť rovnost $Tx = 0$ implikuje

$$0 = |\langle Tx, x\rangle| \geq \alpha \|x\|^2$$

a tedy $x = 0$. Podle (2) tak máme

$$R(T) = \{0\}^{\perp} = H \, .$$

To dokončuje důkaz.

$\square$

Lax Milgramovo lemma má zásadní aplikace v teorii eliptických parciálních diferenciálních rovnic a jejich numerických metodách.

Poissonova rovnice:

$$-\Delta u = f \text{ v oblasti } \Omega$$

$$u = 0 \text{ na } \delta\Omega \, .$$

$$H = \{v \in L^2(\Omega) \, : \, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \, , v = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \, .$$

Věta (Polarizační identita) : Nechť b je seskvilineární forma na komplexním V. Potom

$$4\, b(x,y) \;=\; b(x{+}y, x{+}y) - b(x{-}y, x{-}y) + i \left[\, b(x{+}iy, x{+}iy) - b(x{-}iy, x{-}iy) \,\right].$$

Důkaz proveďte přímým výpočtem jako cvičení. $\square$

Důsledek : Je-li b seskvilineární forma na V, pak

$$b(x,x) \;=\; 0 \quad \forall\, x \in V \qquad \Rightarrow \qquad b(x,y) = 0 \quad \forall\, x,\, y \in V.$$

Důsledek : Nechť T, $S \in B(H)$, kde H je komplexní Hilbertův prostor. Potom platí:

(i) Jestliže $\langle Tx, x\rangle = 0$ pro každé $x \in H$, pak $T = 0$.

(ii) Jestliže $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ pro každé $x \in H$, pak $T = S$.

Důkaz: **(i)** Pokud $\langle Tx, x\rangle = 0$ pro každé $x \in H$, pak podle polarizační identity aplikované na $b(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ je $\langle Tx, y\rangle = 0$ pro každá $x, y \in H$, což znamená, že pro všechna $x \in H$ je $Tx \in H^{\perp} = \{0\}$.

Tvrzení **(ii)** dostaneme aplikací prvního tvrzení na operátor $T - S$.

Poznámka : Předchozí důsledek neplatí pro reálný prostor. Vezměme např. za T rotaci v $\mathbb{R}^2$ o $\frac{\pi}{2}$. Pak $\langle Tx, x\rangle = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^2$, a přitom $T \neq 0$.

Důležité typy operátorů:

Značení: I bude identický operátor na H.

Definice : Nechť $T \in B(H)$. Pak

(i) T se nazývá **samoadjungovaný**, jestliže $T = T^*$,

(ii) T se nazývá **pozitivní**, jestliže $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$,

(iii) T se nazývá **unitární**, je-li $T^*T = TT^* = I$. Neboli-li T je bijekce a $T^{-1} = T$.

Samoadjungované operátory

Příklady: **(1)** Už víme, že všechny lineární operátory na prostoru $H = \mathbb{C}$ jsou tvaru $Tx = ax$, kde $a \in \mathbb{C}$, a že adjunkci odpovídá konjugace, tedy pro operátor $Tx = ax$ je $T^*x = \overline{a}x$. Samoadjungované operátory na $\mathbb{C}$ tak odpovídají vynásobení reálným číslem.

(2) Podívejme se nyní na multiplikativní operátory T_f na $L^2\langle a, b\rangle$ ($-\infty < a < b < \infty$, $f \in L^\infty\langle a, b\rangle$). Stejně jako v případě multiplikativních operátorů na $L^2(\mathbb{R})$ můžeme ukázat, že $T_f^* = T_{\overline{f}}$. Operátor T_f tedy bude samoadjungovaný právě tehdy, když bude platit $T_f = T_{\overline{f}}$ neboli když $T_{f-\overline{f}} = 0$. To ale, jak už víme, nastává jen v případě, že $f - \overline{f} = 0$ skoro všude na $\langle a, b\rangle$. Samoadjungované multiplikativní operátory na $L^2\langle a, b\rangle$ tak odpovídají funkcím, které jsou skoro všude na $\langle a, b\rangle$ reálné.

(3) Nyní nás budou zajímat samoadjungované operátory na Hilbertových prostorech konečné dimenze. Můžeme se omezit na $H = \mathbb{C}^n$. Už víme, že pokud je operátor $T \in B(\mathbb{C}^n)$ reprezentován maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ a k němu adjungovaný operátor T^* maticí $\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, pak $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Tedy $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$. Operátor T na $\mathbb{C}^n$ tak bude samoadjungovaný právě tehdy, když jeho matice $\mathbf{A}$ bude hermitovská, tj. pokud bude platit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.

Tvrzení: Nechť H je komplexní Hilbertův prostor. Operátor $T \in B(H)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když

$$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in H.$$

Důkaz: Nechť je nejdřív T samoadjungovaný. Pak pro každé $x \in H$ platí $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$. Musí tedy být $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Předpokládejme nyní naopak, že $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in H$. Pak pro všechna $x \in H$ také platí

$$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle T^*x, x\rangle.$$

Z důsledku polarizační identity tak dostáváme, že $T = T^*$, a tedy operátor T je samoadjungovaný. $\square$

Pozitivní operátory

Tvrzení: Každý pozitivní operátor $T \in B(H)$ na komplexním Hilbertově prostoru H je samoadjungovaný.

Důkaz: Jestliže je T pozitivní, pak pro každé $x \in H$ je $\langle Tx,\, x\rangle \geq 0$, a tedy $\langle Tx,\, x\rangle \in \mathbb{R}$. Podle předchozíhé tvrzení je tak T samoadjungovaný. $\square$

Příklady: **(1)** Nechť $T \in B(\mathbb{C})$, $Tx = ax$. Pak $\langle Tx,\, x\rangle = a|x|^2$, tedy operátor T je pozitivní právě tehdy, když $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$.

(2) Ukážeme, že multiplikativní operátor $T_f : L^2\langle a,\, b\rangle \to L^2\langle a,\, b\rangle$ je pozitivní, právě tehdy když $f \geq 0$ skoro všude na $\langle a,\, b\rangle$. Pokud $f \geq 0$ skoro všude, pak pro každou funkci $g \in L^2\langle a,\, b\rangle$ je

$$\langle T_f g,\, g\rangle \;=\; \int_a^b f(x)|g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geq 0,$$

takže operátor T_f je pozitivní.

Podle předchozího víme, že T_f je samoadjungovaný operátor a tedy f nabývá reálných hodnot skoro všude. Předpokládejme pro spor, že množina $M = \{t \in \mathbb{R} \,:\, f(t) < 0\}$ má kladnou míru. Podle vlastností Lebesgueova integrálu pak máme

$$\langle T_f \chi_M, \chi_M\rangle = \int_M f(t)\,\mathrm{d}\mu$$

je nenulové záporné číslo. To je spor, a tedy f je nazáporná funkce skoro všude.

(3) Nechť $T \in B(\mathbb{C}^n)$, $T \simeq (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Pak pro $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ je

$$\langle Tx, x\rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\overline{\alpha_i}.$$

Operátor T je tedy pozitivní právě tehdy, když je matice $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ pozitivně semidefinitní.

Tvrzení: Nechť H je Hilbertův prostor a $x_1, \dots, x_n \in H$. Potom Grammova matice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ je pozitivně semidefinitní.

Důkaz: Označme $A = (\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j=1,\dots,n}$. Z vlastností skalárního součinu pro každou n-tici (komplexních) koeficientů $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ platí

$$0 \;\leq\; \langle \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,\, \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\overline{\alpha_j}\langle x_i, x_j\rangle$$

Matice A je tedy pozitivně semidefinitní. $\square$

Tato matice je kovarintní maticí náhodného vektoru v teorii pravděpodobnosti.

Unitární operátory

Pozorování: Nechť $T \in B(H)$ je unitární operátor. Pak k němu adjungovaný operátor T^* je také unitární.

To vyplývá z adjunkce identity $T^*T = TT^* = I$, rovnosti $T^{**} = T$ a skutečnosti, že identita je samoadjungovaný operátor.

Geometrický význam unitárních operátorů

Tvrzení : *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in B(H)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *T je unitární.*

(ii) *T je izometrie (tj. $\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in H$) a T je surjektivní .*

(iii) *T zachovává skalární součin a T je surjektivní. (Zachování skalárního součinu znamená: $\langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle \forall x, y \in H$.*

(Surjektivní zobrazení je zobrazení na.)

Důkaz: **(i) ⇒ (iii)** Pokud je T unitární, pak pro každé $x \in H$ platí $T^*Tx = Ix = x$, (I je operátor identity) tedy

$$\langle x,\, y\rangle \;=\; \langle T^*Tx,\, y\rangle \;=\; \langle Tx,\, Ty\rangle \;.$$

Podle definice je unitární zobrazení bijektivní, tedy je též surjektivní

(iii) ⇒ (ii) je zřejmé.

(ii) ⇒ (i) Nechť je T surjektivní izometrie. Pak pro každé $x \in H$ platí $\langle x,\, x\rangle = \langle Tx,\, Tx\rangle = \langle T^*Tx,\, x\rangle$. Tedy $T^*T = I$ (I je tu identita na H). Potřebujeme ještě ukázat, že také $TT^* = I$. Protože je každá izometrie prostá, existuje operátor T^{-1} inverzní k T. Vynásobením rovnosti $T^*T = I$ operátorem T^{-1} zprava dostaneme $T^{-1} = T^*$ a tedy $T^*T = TT^* = I$, což je unitarita oprátoru T. □

Příklady : **(1)** Nechť $T \in B(\mathbb{C})$, $Tx = ax$, $a \neq 0$. Pak $T^{-1}x = a^{-1}x$, $T^*x = \overline{a}x$. Operátor T je tedy unitární právě tehdy, když $a^{-1} = \overline{a}$. A to nastává právě tehdy, když $1 = a^{-1}a = \overline{a}a = |a|^2$, tj. pokud je a komplexní jednotka.

(2) Multiplikativní operátor $T_f : H = L^2\langle a, b\rangle \to L^2\langle a, b\rangle$ je unitární, právě když $|f| = 1$ skoro všude na $\langle a, b\rangle$.

Uvědomme si, že identický operátor I na H je vlastně multiplikativní operátor $T_{\mathbf{1}}$, kde $\mathbf{1}$ je konstatní funkce na $\langle a, b\rangle$ s hodnotami rovnými jedné. Dále si uvědomme, že

$$T_f\, T_f^* = T_f\, T_{\overline{f}} = T_{|f|^2} .$$

Podmínka na unitaritu je tedy ekvivalentní rovnosti

$$T_{|f|^2} = T_{\mathbf{1}} .$$

To je ekvivalentní podmínce $|f|^2(x) = 1$ pro skoro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, což je ekvivalentní podmínce $|f(x)| = 1$ skoro všude.

(3) Unitární operátory na $\mathbb{C}^n$ jsou popsány dále.

Definice : Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se nazývá **unitární**, pokud je unitární operátor $T \in B(\mathbb{C}^n)$ definovaný předpisem

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \;=\; \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad\qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Tvrzení : Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$ je unitární matice.

(ii) Sloupcové vektory $s_1, \ldots, s_n$ matice $\mathbf{A}$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$.

(iii) Řádkové vektory $r_1, \ldots, r_n$ matice $\mathbf{A}$ tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{C}^n$.

Důkaz: Nechť $e_1, \ldots, e_n$ je kanonická ortonormální báze v $\mathbb{R}^n$. Zřejmě $s_i = Te_i,\ i = 1, \ldots, n,$ kde T je operátor odpovídající matici $\mathbf{A}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Protože je operátor T unitární, zachovává skalární součin. Vektory $s_1, \ldots, s_n$ jsou tak navzájem kolmé a jednotkové. Tvoří tedy ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$.

(ii) ⇒ (i) Nechť $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Pak

$$T\,x \;=\; \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 = \langle Tx,\, Tx\rangle \;&=\; \langle x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n,\, x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n\rangle \\ &=\; \sum_{i,j=1}^{n} x_i\,\overline{x}_j\,\langle s_i,\, s_j\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \;=\; \|x\|^2. \end{aligned}$$

To znamená, že T je izometrie. Protože vektory $s_1, \ldots, s_n$ generují obor hodnot operátoru T a tvoří přitom ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, je T zobrazení na.

(i) ⇔ (iii) Vektory $r_1, \ldots, r_n$ tvoří ortonormální bázi právě tehdy, když ji tvoří vektory $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_n$. Tyto vektory jsou ale sloupcovými vektory matice A^*, která koresponduje operátoru T^*. Tedy podle již dokázané ekvivalence **(i) ⇔ (ii)** vektory $r_1, \ldots, r_n$ tvoří ortonormální bázi právě tehdy, když je operátor T^* unitární. Ten je ale unitární právě tehdy, když je unitární operátor T, tj. když je unitární matice $\mathbf{A}$.
□

Poznámka Důležitým unitárním operátorem je **Fourierova transformace**, což je unitární operátor U na $L^2(\mathbb{R})$ daný akcí na spojitých funkcích s konečným nosičem.

$$Uf(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$$

Zobecnění pojmu unitárního operátru

Definice: *Zobrazení $U : H \to K$ mezi Hilbertovými prostory H a K se nazývá **unitární**, jestliže je bijektivní a zachovává skalární součin. Existuje-li takové zobrazení mezi H a K, nazýváme prostory H a K **izomorfní**.*

Věta: *Každý separabilní nekonečně dimenzionální Hilbertův prostor je izomorfní s ℓ^2.*

Důkaz: Ať $e_1, e_2, \ldots$ je ortonormální báze Hilbertova prostoru H. Uvažujme zobrazení

$$U: \ H \to \ell^2 : \ x \mapsto (\,\langle x,\, e_n\rangle_H\,)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Podle Parsevalovy rovnosti máme:

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|Ux\|_{\ell^2}\,,$$

pro všechna $x \in H$. Máme tak dvě sequilineární formy na H: $(x,y) \to \langle x,y\rangle_H$ a $(x,y) \to \langle Ux, Uy\rangle$. Shodují se na diagonále a tedy jsou si rovny podle podle polarizační identity. Tedy U je unitární zobrazení mezi H and ℓ^2 a důkaz je ukončen. $\square$

Závěr:

- Každý konečně dimenzionální komplexní Hilbertův prostor je kopie $\mathbb{C}^n$.
- Každý nekonečně dimenzionální separabilní komplexní Hilbertův prostor je kopie ℓ^2.