

Ukázka zadání zkoušky z Pokročilé analýzy LS 24/25

1. (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou.

- Popište konstrukci abstraktního Lebesgueova integrálu.
- Ukažte, že každá integrovatelná funkce je absolutně integrovatelná.
- Zformulujte a dokažte větu o integrálu z násobku funkce.

2. • Definice adjungovaného operátoru. Důkaz existence adjunkce.

- H je Hilbertův prostor, $x, y \in H$. Operátor $T_{x,y} \in B(H)$ je dán předpisem

$$T_{x,y}(z) = \langle z, y \rangle x, \quad z \in H.$$

Stanovte $T_{x,y}^*$.

- Ukažte, že T je samoadjungovaný \iff pro každý unitární operátor U je UTU^* také samoadjungovaný.

3. • Definice spektra a spektrálního poloměru. Věta o spektrálním rozkladu normální matice.

- $T \in B(H)$ a pro $S \in B(H)$ existuje $S^{-1} \in B(H)$. Ukažte, že STS^{-1} má stejné spektrum jako T .