

Míra a měřitelné funkce – cvičení

1. Ukažte že podmínky $(\mathcal{A}1)$, $(\mathcal{A}2)$ v definici (σ) -algebry \mathcal{S} (tj. $\emptyset \in \mathcal{S}$ a uzavřenost na doplňek) lze nahradit podmínkami

$$(\mathcal{A}1^*) \quad X \in \mathcal{S}$$

$$(\mathcal{A}2^*) \quad A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S} \quad (\text{uzavřenost na rozdíl})$$

(Návod: Abychom ukázali, že (σ) -algebra splňuje $(\mathcal{A}2^*)$, musíme využít její uzavřenost na sjednocení.)

2. Ukažte, že každá algebra je uzavřená na konečná sjednocení a konečné průniky.

(Návod: U průniků nejdřív ukažte, že je algebra uzavřená na průniky dvou množin.)

3. Jaké vlastnosti má systém množin $\{A \subset X \mid A \text{ je spočetná}\}$? Kdy je to (v závislosti na X) algebra, kdy σ -algebra? Pro jaká X je $\{A \subset X \mid A \text{ nebo } X \setminus A \text{ je konečná}\}$ σ -algebra?

4. Necht' $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Ukažte, že je průnik všech σ -algeber obsahujících \mathcal{F} je σ -algebra.

5. Necht' (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor, $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Položme $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ atd. Ukažte, že pak platí

$$B_i \subset A_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{pro } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

6. Necht' (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. Mějme množiny $A', A'', B', B'' \in \mathcal{S}$ takové, že $A' \subset A'', B' \subset B''$, $\mu(A'' \setminus A') = \mu(B'' \setminus B') = 0$ a existuje množina $M \subset X$, pro kterou platí $A' \subset M \subset A'', B' \subset M \subset B''$. Ukažte, že $\mu(B'') = \mu(A'')$ ($= \mu(A') = \mu(B')$).

7. Necht' (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$. Ukažte, že pak $(D, \mathcal{S}_D, \mu_D)$, kde

$$\mathcal{S}_D = \{A \in \mathcal{S} \mid A \subset D\} (= \{B \cap D \mid B \in \mathcal{S}\}) \quad \text{a} \quad \mu_D = \mu|_{\mathcal{S}_D}$$

je prostor s mírou, a pokud je míra μ úplná, je i míra μ_D úplná.

8. Ukažte, že každý usměrněný interval v \mathbb{R}^n je průnik $2n$ (ne nutně různých) usměrněných poloprostorů. (Návod: Důkaz lze provést matematickou indukcí s využitím toho, že pro $A \subset X$, $B, B_1, B_2 \subset Y$ platí $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ a $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$.)

9. Necht' $I_n \subset \mathbb{R}^n$ je usměrněný interval a $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq c\}$ usměrněný poloprostor. Ukažte, že pak platí

$$l_n(I) = l_n(I \cap H) + l_n(I \setminus H).$$

(Uvažujte různé možné polohy c vzhledem k intervalu pro první souřadnici bodů z I_n .)

10. Ukažte, že Lebesgueova vnější míra l_n^* je translačně invariantní, tj. pro každé $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí $l_n^*(A+x) = l_n^*(A)$, kde $A+x = \{a+x \mid a \in A\}$.

11. Necht' $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je σ -algebra všech borelovských množin v \mathbb{R}^n . Ukažte, že platí

(a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ obsahuje všechny uzavřené množiny.

(b) Je-li \mathcal{A} σ -algebra obsahující všechny usměrněné intervaly v \mathbb{R}^n , pak $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.

(c) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$. Tedy každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.

12. Ukažte, že platí

(a) Je-li f \mathcal{S} -měřitelná na $D \in \mathcal{S}$, $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, pak je f \mathcal{S} -měřitelná i na D' .

(b) Je-li f \mathcal{S} -měřitelná na $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, pak je f \mathcal{S} -měřitelná i na $D_1 \cup D_2$.

13. Necht' f, g jsou \mathcal{S} -měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Ukažte, že pak $\{x \in D \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$.

(Návod: Využijte Tvrzení 1.15,c) nebo 1.15,a.)