Míra a měřitelné funkce – cvičení

1. Ukažte že podmínky **($\mathcal{A}$1)**, **($\mathcal{A}$2)** v definici (σ-)algebry $\mathcal{S}$ (tj. $\emptyset \in \mathcal{S}$ a uzavřenost na doplňek) lze nahradit podmínkami

   ($\mathcal{A}1^*$) $\quad X \in \mathcal{S}$

   ($\mathcal{A}2^*$) $\quad A, B \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{S}$ $\qquad$ (uzavřenost na rozdíl)

   (Návod: Abychom ukázali, že (σ-)algebra splňuje ($\mathcal{A}2^*$), musíme využít její uzavřenost na sjednocení.)

2. Ukažte, že každá algebra je uzavřená na konečná sjednocení a konečné průniky.

   (Návod: U průniků nejdřív ukažte, že je algebra uzavřená na průniky dvou množin.)

3. Jaké vlastnosti má systém množin $\{A \subset X \,|\, A \text{ je spočetná}\}$? Kdy je to (v závislosti na X) algebra, kdy σ-algebra? Pro jaká X je $\{A \subset X \,|\, A \text{ nebo } X \setminus A \text{ je konečná}\}$ σ-algebra?

4. Nechť $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Ukažte, že je průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{F}$ je σ-algebra.

5. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Položme $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ atd. Ukažte, že pak platí

   $$B_i \subset A_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

6. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Mějme množiny $A', A'', B', B'' \in \mathcal{S}$ takové, že $A' \subset A''$, $B' \subset B''$, $\mu(A'' \setminus A') = \mu(B'' \setminus B') = 0$ a existuje množina $M \subset X$, pro kterou platí $A' \subset M \subset A''$, $B' \subset M \subset B''$. Ukažte, že $\mu(B'') = \mu(A'') \big(= \mu(A') = \mu(B') \big)$.

7. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$. Ukažte, že pak $(D, \mathcal{S}_D, \mu_D)$, kde

   $$\mathcal{S}_D = \{A \in \mathcal{S} | A \subset D\} \; (= \{B \cap D | B \in \mathcal{S}\}) \qquad \text{a} \qquad \mu_D = \mu|_{\mathcal{S}_D}$$

   je prostor s mírou, a pokud je míra μ úplná, je i míra μ_D úplná.

8. Ukažte, že každý usměrněný interval v $\mathbb{R}^n$ je průnik $2n$ (ne nutně různých) usměrněných poloprostorů. (Návod: Důkaz lze provést matematickou indukcí s využitím toho, že pro $A \subset X$, B, B_1, $B_2 \subset Y$ platí $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ a $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$.)

9. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je usměrněný interval a $H = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \leq c\}$ usměrněný poloprostor. Ukažte, že pak platí

   $$l_n(I) = l_n(I \cap H) + l_n(I \setminus H).$$

   (Uvažujte různé možné polohy c vzhledem k intervalu pro první souřadnici bodů z I.)

10. Ukažte, že Lebesgueova vnější míra l_n^* je translačně invariantní, tj. pro každé $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí $l_n^*(A + x) = l_n^*(A)$, kde $A + x = \{a + x \,|\, a \in A\}$.

11. Nechť $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je σ-algebra všech borelovských množin v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že platí

    (a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ obsahuje všechny uzavřené množiny.

    (b) Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující všechny usměrněné intervaly v $\mathbb{R}^n$, pak $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.

    (c) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$. Tedy každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.

12. Ukažte, že platí

    (a) Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na $D \in \mathcal{S}$, $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, pak je f $\mathcal{S}$-měřitelná i na D'.

    (b) Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, pak je f $\mathcal{S}$-měřitelná i na $D_1 \cup D_2$.

13. Nechť f, g jsou $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Ukažte, že pak $\{x \in D \,|\, f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$. (Návod: Využijte Tvrzení 1.15,c) nebo 1.15,a).)