KAPITOLA 1: Míra a měřitelné funkce

$\mathcal{P}(X) \; = \; \{A \,|\, A \subset X\}$ – potenční množina množiny X

1.1 Měřitelné množiny

dále předpokládáme $X \neq \emptyset$

Definice : Systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá **algebra**, jestliže

($\mathcal{A}1$) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

($\mathcal{A}2$) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$ (uzavřenost na doplněk),

($\mathcal{A}3$) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$ (uzavřenost na sjednocení).

Systém $\mathcal{S}$ se nazývá σ**-algebra**, pokud splňuje podmínky ($\mathcal{A}1$), ($\mathcal{A}2$) a

$$(\mathcal{A}3\sigma) \qquad A_1, A_2, ... \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}.$$

Je-li $\mathcal{S}$ σ-algebra na X, nazýváme dvojici $(X, \mathcal{S})$ **měřitelný prostor** a množiny $A \in \mathcal{S}$ nazýváme $\mathcal{S}$**-měřitelné**.

Platí: Podmínky ($\mathcal{A}1$), ($\mathcal{A}2$) v definici (σ-)algebry lze nahradit podmínkami

($\mathcal{A}1^*$) $X \in \mathcal{S}$

($\mathcal{A}2^*$) $A, B \in \mathcal{S} \; \Rightarrow \; A \setminus B \in \mathcal{S}$

(Odtud dostáváme, že každá σ-algebra splňuje podmínky ($\mathcal{A}1$), ($\mathcal{A}1^*$), ($\mathcal{A}2$), ($\mathcal{A}2^*$), ($\mathcal{A}3\sigma$) (analogicky pro algebru).)

Důkaz proveďte jako cvičení. (Návod: Abychom ukázali, že (σ-)algebra splňuje ($\mathcal{A}2^*$), musíme využít její uzavřenost na sjednocení.) $\square$

Platí: a) Každá algebra je uzavřená na průnik.

b) Každá algebra je uzavřená na konečná sjednocení a konečné průniky, tj.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S} \; \Rightarrow \; A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{S} \;\text{ a }\; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{S}.$$

c) Každá σ-algebra je uzavřená na spočetné průniky.

Důkazy a) a **b)** proveďte jako cvičení. K důkazu **c)** použijeme přepis

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \; = \; X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (X \setminus A_j). \qquad \square$$

Příklady:

- $\{\emptyset\}$ není σ-algebra (protože předpokládáme $X \neq \emptyset$).
- $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra.
- $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra.
- $\{A \subset X \,|\, A \text{ je konečná}\}$ je pro X konečnou σ-algebra, pro X nekonečnou není ani algebra (nepatří tam X).
  (Jak to bude se systémem $\{A \subset X \,|\, A \text{ je spočetná}\}$?)
- $\{A \subset X \,|\, A \text{ nebo } X \setminus A \text{ je konečná}\}$ je algebra. (Pro jaká X je to dokonce σ-algebra?)

Definice : Nechť $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Nejmenší σ-algebru, která obsahuje všechny množiny z $\mathcal{F}$ („obsahuje $\mathcal{F}$“) značíme $\sigma(\mathcal{F})$ a říkáme jí σ**-algebra generovaná** $\mathcal{F}$. (Podobně lze definovat algebru generovanou $\mathcal{F}$.)

Otázky:

1) Musí vždy existovat σ-algebra obsahující $\mathcal{F}$?

ANO: $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra a $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.

2) Lze mezi všemi σ-algebrami obsahujícími $\mathcal{F}$, najít tu nejmenší?

ANO: $\sigma(\mathcal{F})$ je průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{F}$. (Ukažte jako cvičení, že tento průnik je skutečně σ-algebra.)

1.2 Míra a vnější míra

- Je-li $Y \neq \emptyset$ a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak zobrazení $\tau : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$, kde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, říkáme **množinová funkce**.
- Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, $\mu : \mathcal{U} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu : \mathcal{V} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mu(A) = \nu(A)$ pro všechna $A \in \mathcal{U}$, pak ν je **rozšíření** μ **z** $\mathcal{U}$ **na** $\mathcal{V}$ a μ je **zúžení** ν **z** $\mathcal{V}$ **na** $\mathcal{U}$.

Definice: Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor (tj. $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je σ-algebra). Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to \langle 0, \infty \rangle$ se nazývá **míra**, jestliže splňuje:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(M2) Jsou-li $A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \ldots$, po dvou disjunktní (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$), pak

$$\mu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j). \qquad (\sigma\text{-aditivita})$$

Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazýváme **prostor s mírou**.

Příklady:

- **Diracova míra:** $(\emptyset \neq)$ X – libovolná množina, $a \in X$ pevně zvolené, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

- **Aritmetická (též (po)čítací) míra:** $(\emptyset \neq)$ X – libovolná množina, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$

$$\alpha(A) = \begin{cases} \text{počet prvků } A & \text{pro } A \text{ konečnou} \\ \infty & \text{pro } A \text{ nekonečnou} \end{cases}$$

- **Lebesgueova míra:** zobecňuje pojmy délka intervalu, obsah obdélníka, objem kvádru (více viz dále)

Zdisjunktnění sjednocení měřitelných množin:

Abychom mohli využít σ-aditivity míry, potřebujeme pracovat s množinami, které jsou po dvou disjunktní. Pokud toto naše množiny nesplňují, „zdisjunktníme“ je: Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Položme

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ B_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pak platí

$$B_i \subset A_i, \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j, \qquad \textstyle\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$$

(Dokažte jako cvičení.)

Věta 1.1 (vlastnosti míry): Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Pak

(1) Je-li $A_1 \subset A_2$, pak $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. (monotonie míry)

(2) $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

(3) Je-li $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, pak

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

(4) Je-li $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ a $\mu(A_1) < \infty$, pak

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Důkaz: (1) Máme $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$, kde $A_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \emptyset$. Tedy $\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \geq \mu(A_1)$.
(2) Je-li $B_1, B_2, \ldots$ zdisjunktnění $A_1, A_2, \ldots$, pak

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(3) Je-li $B_1, B_2, \ldots$ jako v (2), pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, a podle předpokladu $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \bigcup_{j=1}^{k} A_j = A_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_{k\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{k} (B_j)\Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(4) Označme $\tilde{A}_i = A_1 \setminus A_i$. Pak $A_i \cup \tilde{A}_i = A_1$, $\mu(A_i) + \mu(\tilde{A}_i) = \mu(A_1) < \infty$ (tedy $\mu(\tilde{A}_i) = \mu(A_1) - \mu(A_i)$) a $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \tilde{A}_3 \subset \ldots$. Tedy podle (3) máme $\mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(\tilde{A}_j)$. Využijeme-li nyní toho, že sjednocení $A_1 = \big(A_1 \setminus \big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big)\big) \cup \big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big)$ a $A_1 = (A_1 \setminus A_j) \cup A_j$ jsou disjunktní a rozdíl $\mu(A_1) - \mu(A_j)$ je definován pro každé $j \in \mathbb{N}$ (protože $\mu(A_1) < \infty$), dostaneme

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(A_1 \setminus \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big)\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j)\Big)\Big) = \mu(A_1) - \mu\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\tilde{A}_j)\Big)\Big) =$$

$$\mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} \mu(\tilde{A}_j) = \mu(A_1) - \lim_{j\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) = \lim_{j\to\infty} (\mu(A_j)). \qquad \square$$

Příklad: Nechť μ je aritmetická míra na $\mathbb{N}$ a $A_j = \{j, j+1, j+2, \ldots, \}$. Pak $A_j \searrow \emptyset$ (tj. $A_{j+1} \subset A_j$ a $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$). Přitom máme $\mu(A_j) = \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $\mu(\emptyset) = 0$. Tedy neplatí $\mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$. Toto není ve sporu s V1.1(4), protože tu není splněno $\mu(A_1) < \infty$.

Definice: Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Pak míru μ nazýváme

- **konečná** – je-li $\mu(X) < \infty$,
- **σ-konečná** – existují-li $X_1, X_2, \ldots \subset X$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ $\forall j$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X$,
- **pravděpodobnostní** – je-li $\mu(X) = 1$, $(X, \mathcal{S}, \mu)$ pak nazýváme pravděpodobnostní prostor,
- **úplná** – je-li každá podmnožina množiny míry nula měřitelná (díky monotonii a nezápornosti míry má také míru nula).

Věta 1.2 (zúplnění míry): Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Pak existuje nejužší rozšíření $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ míry $(\mathcal{S}, \mu)$ na úplnou míru. Míru $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ nazýváme **zúplnění míry** $(\mathcal{S}, \mu)$.

Důkaz : Položme

$$\overline{\mathcal{S}} = \{A \subset X \,|\, \text{existují } \ A', A'' \in \mathcal{S} \ \text{ tak, že } \ A' \subset A \subset A'' \ \ a \ \ \mu(A'' \setminus A') = 0\}.$$

Při stejném významu A, A', A'' jako výše pak definujeme

$$\overline{\mu}(A) \ = \ \mu(A') \ (= \ \mu(A'')\,).$$

Zřejmě $\mathcal{S} \subset \overline{\mathcal{S}}$. Nyní potřebujeme ukázat, že $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$ má požadované vlastnosti. To uděláme v několika krocích:

1) $\underline{\overline{\mathcal{S}} \text{ je } \sigma\text{-algebra}}$: Vlastnosti $(\mathcal{A}1)$ a $(\mathcal{A}2)$ ověřte jako cvičení. Zbývá ukázat, že systém $\overline{\mathcal{S}}$ je uzavřený na spočetná sjednocení. Nechť $A_1, A_2, \ldots \in \overline{\mathcal{S}}$ a A_i', A_i'' jsou jako výše A', A''. Pak $\bigcup_{i=1}^\infty A_i' \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i''$ a

$$\mu\Big(\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i''\big) \setminus \big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j'\big)\Big) \ = \ \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty \big(A_i'' \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j'\big)\Big) \ \overset{V1.1(2)}{\leq} \ \sum_{i=1}^\infty \mu\big(A_i'' \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j'\big) \ \leq \ \sum_{i=1}^\infty \mu\big(A_i'' \setminus A_i'\big) \ = \ 0,$$

protože $A_i'' \setminus \bigcup_{j=1}^\infty A_j' \subset (A_i'' \setminus A_i')$ a $\mu(A_i'' \setminus A_i') = 0$. Tedy $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \overline{\mathcal{S}}$.

2) $\underline{\text{Definice } \overline{\mu}(A) \text{ je korektní}}$ (tj. nezávisí na volbě A', A''): Nechť $A_i' \subset A \subset A_i''$, $\mu(A_i'' \setminus A_i') = 0$, $i = 1, 2$. Označme $C = A_1' \cup A_2'$. Pak pro $i = 1, 2$ platí $A_i' \subset C \subset A \subset A_i''$, a tedy pro $i = 1, 2$ máme

$$\mu(C) \ = \ \mu(\underbrace{C \setminus A_i'}_{\subset A_i'' \setminus A_i'}) + \mu(A_i') \ \leq \ \underbrace{\mu(A_i'' \setminus A_i')}_{=0} \, + \mu(A_i') \ = \ \mu(A_i') \ \leq \ \mu(C).$$

To ale znamená, že $\mu(A_1') = \mu(A_2')$ $(= \mu(A_1'') = \mu(A_2'')\,)$. Tím jsme ukázali, že $\mu(A)$ na volbě A', A'' nezávisí.

3) $\underline{\overline{\mu} \text{ je míra:}}$ $\overline{\mu} \geq 0$, $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ zřejmě. Dále, jsou-li po dvou disjunktní množiny A_i, jsou po dvou disjunktní také množiny A_i' (množiny A_i'' po dvou disjunktní ale být nemusí). Tedy podle důkazu uzavřenosti $\overline{\mathcal{S}}$ na spočetná sjednocení máme

$$\overline{\mu}\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big) = \mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i'\big) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i') = \sum_{i=1}^\infty \overline{\mu}(A_i).$$

4) $\underline{\text{Míra } \overline{\mu} \text{ je úplná:}}$ Nechť $B \subset A$, $\overline{\mu}(A) = 0$, $A' \subset A \subset A''$, $\mu(A'' \setminus A') = 0$. Pak $\mu(A'')$ $(= \overline{\mu}(A)) = 0$, $\emptyset \subset B \subset A''$, $\mu(A'' \setminus \emptyset) = 0$, tedy $\overline{\mu}(B) = \mu(\emptyset) = 0$.

5) $\underline{(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu}) \text{ je nejužší rozšíření:}}$ Nechť $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ je úplné rozšíření $(\mathcal{S}, \mu)$ a $A \in \overline{\mathcal{S}}$, tj. existují $A', A'' \in \mathcal{S}$ tak, že $A' \subset A \subset A''$ a $\mu(A'' \setminus A') = 0$. Ukážeme, že $A \in \tilde{\mathcal{S}}$. Protože $\tilde{\mu}$ je úplná míra rozšiřující μ a $A \setminus A' \subset A'' \setminus A'$, dostáváme $A \setminus A' \in \tilde{\mathcal{S}}$, tedy $A = A' \cup (A \setminus A') \in \tilde{\mathcal{S}}$. To znamená, že $\overline{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{S}}$, a tedy $\overline{\mathcal{S}}$ je nejmenší možná σ-algebra, na které existuje úplná míra rozšiřující μ. $\square$

Tvrzení 1.3 : Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$. Pak $(D, \mathcal{S}_D, \mu_D)$, kde

$$\mathcal{S}_D = \{A \in \mathcal{S} | A \subset D\} \ (= \{B \cap D | B \in \mathcal{S}\}) \qquad \text{a} \qquad \mu_D = \mu|_{\mathcal{S}_D}\,,$$

je prostor s mírou. Pokud je míra μ úplná, je i míra μ_D úplná.

Důkaz je zřejmý (proveďte si ho jako cvičení). $\square$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme místo $(D, \mathcal{S}_D, \mu_D)$ psát jen stručně $(D, \mathcal{S}, \mu)$.

Konstrukce míry z množinové funkce přes vnější míru

Mějme $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ a množinovou funkci $\tau : \mathcal{G} \to \langle 0, \infty \rangle$ splňující

$$\emptyset \in \mathcal{G}, \qquad \tau(\emptyset) = 0.$$

Definujme množinovou funkci $\tau^* : \mathcal{P}(X) \to \langle 0, \infty \rangle$ tak, že pro $A \subset X$ položíme

$$\tau^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tau(B_j) \ \mid \ B_j \in \mathcal{G} \text{ pro } j \in \mathbb{N} \ \text{ a } \ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \Big\}.$$

Jsou-li $B_j \in \mathcal{G}$ a $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, nazýváme $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(B_j)$ **horní součet k** $\tau^*(A)$.

Poznámky : **1)** Funkce τ^* zřejmě nemusí být rozšířením funkce τ, tj. pro nějaké $A \in \mathcal{G}$ může být $\tau^*(A) \neq \tau(A)$. K tomu stačí mít $A, B \in \mathcal{G}$ takové, že $A \subset B$ a $\tau(A) > \tau(B)$. Nechť např. $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$, $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(\{1\}) = \tau(\{2\}) = 2$ a $\tau(\{1, 2\}) = 1$. Protože $\{1\} \subset \{1, 2\}$, je $\tau(\{1, 2\})$ horní součet k $\tau^*(\{1\})$, a tedy $\tau^*(\{1\}) \le \tau(\{1, 2\}) = 1 < \tau(\{1\})$.

2) Pokud pro nějakou množinu $A \subset X$ neexistují množiny $B_j \in \mathcal{G}$ tak, že $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, je $\tau^*(A) = \inf \emptyset = +\infty$.

Definice : Množinová funkce $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \langle 0, \infty \rangle$ se nazývá **vnější míra** na množině X, jestliže

(VM1) $\gamma(\emptyset) = 0$

(VM2) $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \le \gamma(B)$ (monotonie)

(VM3) $\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j)$ (σ-subaditivita)

Věta 1.4 : Množinová funkce τ^* je vnější míra (na X).

Důkaz : Splnění podmínek (VM1) a (VM2) je zřejmé. Abychom ověřili podmínku (VM3), stačí ukázat, že každé číslo větší většího než $\beta := \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j)$ je také větší než $\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$. Je-li $\beta = \infty$, není co dokazovat. Nechť je tedy $\beta < \infty$. Pak je také $\tau^*(A_j) < \infty$ pro všechna j. Mějme nyní $\gamma > \beta$. Chceme najít horní součet k $\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$ menší než γ. Pak i infimum těchto horních součtů, tedy $\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$, bude menší než γ. Položme $\varepsilon = \gamma - \beta > 0$. Z definice τ^* existují pro každé $j \in \mathbb{N}$ množiny $B_{i,j} \in \mathcal{G}$ takové, že $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{i,j}$ a jim odpovídající horní součet splňuje

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau(B_{i,j}) < \tau^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\,.$$

Protože

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_{i,j},$$

je $\sum_{i,j=1}^{\infty} \tau(B_{i,j})$ horní součet k $\tau^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big)$. A jak snadno nahlédneme, je to horní součet menší než γ:

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \tau(B_{i,j}) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \tau(B_{i,j}) < \sum_{j=1}^{\infty} \big(\tau^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\,\big) = \big(\sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j)\big) + \varepsilon = \beta + \varepsilon = \gamma.$$

Tím jsme ověřili, že množinová funkce τ^* je i σ-subaditivní, a je to tedy vnější míra. $\square$

Definice : Nechť $\gamma : \mathcal{P}(X) \to \langle 0, \infty \rangle$ je vnější míra na X. Množina $A \subset X$ se nazývá **γ-měřitelná** (podle Carathéodoryho), jestliže pro každou množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma(T) \; = \; \gamma(T \cap A) \; + \; \gamma(T \setminus A).$$

Množinu všech γ-měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\gamma)$ a pro $A \in \mathfrak{M}(\gamma)$ pokládáme $\gamma^\circ(A) = \gamma(A)$. Tedy $\gamma^\circ = \gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$ (zúžení γ na $\mathfrak{M}(\gamma)$).

Věta 1.5 (Carathéodoryova) : Nechť γ je vnější míra na X. Pak systém γ-měřitelných množin $\mathfrak{M}(\gamma)$ je σ-algebra a γ° je úplná míra.

Důkaz je pracný a nebudeme ho tu uvádět. $\square$

1.3 Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$

$a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \quad a \leq b$

(a, b), $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$ – **(jednorozměrný) interval**

$(a, b\rangle$ – **usměrněný interval** (není to běžně používaný název, zjednoduší nám ale vyjadřování)

$\mathcal{I}_1 = \{I \,|\, I$ - interval, $a, b \in \mathbb{R}\}$ (systém všech omezených intervalů v $\mathbb{R}$)

$\widetilde{\mathcal{I}}_1 = \{(a, b\rangle \mid -\infty < a \leq b < \infty\}$ (systém všech omezených usměrněných intervalů v $\mathbb{R}$)

délka intervalu $\mathcal{I}$ s krajními body a, b, kde $-\infty < a \leq b < \infty$:

$$l(I) \ (= \ l_1(I)\,) \ = \ b - a$$

Platí: Pokud sjednocením, průnikem či rozdílem usměrněných intervalů je interval, pak je usměrněný. (Pro rozdíl otevřených nebo uzavřených intervalů toto obecně neplatí. V jakém případě by to platilo?)

n-rozměrný interval:

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n, \quad \text{kde } I_i \text{ jsou jednorozměrné intervaly}$$

$$\mathcal{I}_n \ = \ \{I \subset \mathbb{R}^n \,|\, I \text{ je omezený interval}\}$$

usměrněný n-rozměrný interval:

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n, \quad \text{kde } I_i \text{ jsou usměrněné jednorozměrné intervaly}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_n \ = \ \{I \in \mathcal{I}_n \,|\, I \text{ je usměrněný}\}$$

usměrněný poloprostor: množina typu

$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \leq c\}$ nebo $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i > c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$ je vhodná dvojice čísel

elementární objem n-rozměrného intervalu $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \in \mathcal{I}_n$:

$$l_n(I) = l(I_1) \cdot l(I_2) \cdot \ldots \cdot l(I_n)$$

Platí: Každý usměrněný interval v $\mathbb{R}^n$ je průnik $2n$ usměrněných poloprostorů. (V případě neomezeného intervalu poloprostory odpovídající neomezeným souřadnicím zapíšeme do průniku dvakrát.)

Důkaz můžeme provést indukcí s využitím toho, že pro $A \subset X$, B, B_1, $B_2 \subset Y$ platí $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ a $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$. Proveďte ho jako cvičení. $\square$

Platí: Jsou-li I usměrněný interval a H usměrněný poloprostor v $\mathbb{R}^n$, pak $I \cap H$ a $I \backslash H$ jsou usměrněné intervaly.

Důkaz: Průnik intervalu I s usměrněným poloprostorem omezuje pouze jednu složku bodů z intervalu I. Přitom $(a,\, b\rangle \cap (-\infty,\, c\rangle \in \{\emptyset, (a,\, c\rangle, (a,\, b\rangle\}$, $(a,\, b\rangle \cap (c, \infty) \in \{(a,\, b\rangle, (c,\, b\rangle, \emptyset\}$ a prázdná množina je usměrněný interval, protože $\emptyset = (a,\, a\rangle$. Podobně pro $I \backslash H$. $\square$

Vlastnosti funkce l_n na $\widetilde{\mathcal{I}}_n$:

- l_n je **aditivní** v tomto smyslu: pro každý usměrněný interval I_n a usměrněný poloprostor H platí

$$l_n(I) = l_n(I \cap H) + l_n(I \backslash H)$$

(Dokažte jako cvičení pro $H = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \leq c\}$. Ostatní případy by se dokázaly podobně.)

- l_n je **nezáporná** (zřejmé)
- l_n je **zprava spojitá** v tom smyslu, že kdykoliv $(Q_j)_{j=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{I}}_n$, $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ a $Q_j \searrow I$ (tj. $Q_{j+1} \subset Q_j$, $I = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j$) nebo $Q_j \nearrow I$ (tj. $Q_j \subset Q_{j+1}$, $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$), pak $l_n(Q_j) \longrightarrow l_n(I)$ pro $j \to \infty$.
  (Jde o jednoduchý důsledek definice l_n a vlastností l_1.)

Příklady dalších aditivních nezáporných zprava spojitých funkcí intervalu:

- Diracova funkce: $x \in \mathbb{R}^n$ pevně zvoleno, $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$

$$d_x(I) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

- funkce $\underline{m_n : \widetilde{\mathcal{I}}_n \to \mathbb{R}}$ definovaná pomocí neklesající zprava spojité funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že

$$m_n(I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n) \;=\; m_1(I_1) \cdot m_1(I_2) \cdot \ldots \cdot m_1(I_n),$$

  kde pro $I_j = (a_j, b_j\rangle$ je

$$m_1(I_j) \;=\; F(b_j) - F(a_j).$$

Definice: Vnější míru l_n^* na $\mathbb{R}^n$ generovanou elementárním objemem l_n na $\widetilde{\mathcal{I}}_n$, tj.

$$l_n^*(A) \;=\; \inf\{ \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) \mid Q_j \in \widetilde{\mathcal{I}}_n \text{ pro } j \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \},$$

nazýváme **Lebesgueova vnější míra**. Vnější míru m^*, která je daná obecnou konečnou aditivní nezápornou zprava spojitou funkcí m na $\widetilde{\mathcal{I}}_n$ nazýváme **Lebesgue-Steiltjesova vnější míra generovaná** m.

Platí: Lebesgueova vnější míra je definovaná na celé $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, je monotonní a σ-subaditivní.

Věta 1.6: Pro každé $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ platí $l_n^*(I) = l_n(I)$.

Důkaz: Mějme dáno $I \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$. Nerovnost $l_n^*(I) \le l_n(I)$ je zřejmá, neboť $l_n(I)$ je horní součet k $l_n^*(I)$. Opačnou nerovnost dokážeme sporem.

Předpokládejme, že existují $Q_j \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ takové, že $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ a $l_n(I) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\overline{I} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^\circ$, kde $\overline{I}$ je uzávěr intervalu I a Q_j° je vnitřek intevalu Q_j. (Kdyby tomu tak totiž nebylo, mohli bychom každý z intervalů Q_j natáhnout v každém směru na obě strany o tak malý kousek, že pro nově získaný interval $\hat{Q}_j$ bude platit $l_n(\hat{Q}_j) \le l_n(Q_j) + \frac{d}{2}\frac{1}{2^j}$, kde $d = l_n(I) - \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) > 0$. Pak bude $\sum_{j=1}^{\infty} l_n(\hat{Q}_j) < \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) + \frac{d}{2} < l_n(I)$. Takže by stačilo místo Q_j vzít v dalších úvahách $\hat{Q}_j$.)

Položme nyní $I_1 = I$. Protože je l_n nezáporná a aditivní, je též monotonní, tedy $l_n(Q_j) \ge l_n(Q_j \cap I_1)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. To ale znamená, že $l_n(I_1) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j \cap I_1)$. Zvolme usměrněný poloprostor H_1 tak, že platí $l_n(I_1 \cap H_1) = l_n(I_1 \setminus H_1) = \frac{1}{2} l_n(I_1)$. (Jeho hraniční nadrovina bude kolmo půlit některou z hran intervalu I_1.) Protože průnik dvou usměrněných intervalů je usměrněný interval, dostáváme z aditivity a nezápornosti elementárního objemu l_n: $l_n(I_1) = l_n(I) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) \ge \sum_{j=1}^{\infty} l_n(I_1 \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \big(l_n((I_1 \cap Q_j) \cap H_1) + l_n((I_1 \cap Q_j) \setminus H_1)\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \big(l_n((I_1 \cap H_1) \cap Q_j) + l_n((I_1 \setminus H_1) \cap Q_j)\big) = \sum_{j=1}^{\infty} l_n((I_1 \cap H_1) \cap Q_j) + \sum_{j=1}^{\infty} l_n((I_1 \setminus H_1) \cap Q_j)$. Součet některé z posledních dvou řad je tedy nutně menší než $\frac{1}{2} l_n(I_1)$. Označmě I_2 tu z množin $I_1 \cap H_1$, $I_1 \setminus H_1$, které odpovídá řada, která toto splňuje. Pak $l_n(I_2) = \frac{1}{2} l_n(I_1) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j \cap I_2)$.

Budeme-li postupovat analogicky dále, při vhodné volbě poloprostorů, kterými půlíme aktuální inteval, („každý směr" musíme při půleních použít nekonečněkrát) získáme posloupnost intervalů I_k, jejichž průměry konvergují k nule a pro které platí $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ a $l_n(I_k) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j \cap I_k)$ pro každé k. Z vícerozměrné analogie principu vnořených intervalů dostáváme, že existuje bod $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{I}_k$. Protože však máme $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{I}_k \subset \overline{I} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^\circ$, existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že x je vnitřním bodem intervalu Q_m, tedy x má nějaké okolí U, které leží celé v Q_m. Průměry intervalů

I_k jdou přitom k nule, takže pro dostatečně velká k je $I_k \subset U \subset Q_m$. To ale znamená, že $l_n(I_k) = l_n(I_k \cap Q_m) \le \sum_{j=1}^{\infty} l_n(I_k \cap Q_j)$. To je ovšem ve sporu s vlastnostmi intervalu I_k. Žádný horní součet k $l_n^*(I)$ tak nemůže být menší než $l_n(I)$, a tedy i infimum horních horních součtů k $l_n^*(I)$, což je samo $l_n^*(I)$, musí být rovno minimálně $l_n(I)$. Tím jsme dostali nerovnost $l_n^*(I) \ge l_n(I)$ a důkaz je dokončen. $\square$

Důsledek 1.7 : Nechť $I \in \mathcal{I}_n$. Pak $l_n^*(I) = l_n(I)$.

Důkaz provedeme jen pro $n = 1$, pro $n > 1$ by se provedl podobně. Pro $-\infty < a < b < \infty$ platí:
1) $(a, b-\varepsilon\rangle \subset (a,b) \subset (a, b\rangle$ pro každé $0 < \varepsilon < b-a$, tedy

$$b - \varepsilon - a \;=\; l_1^*\big((a, b-\varepsilon\rangle\big) \;\le\; l_1^*\big((a,b)\big) \;\le\; l_1^*\big((a, b\rangle\big) \;=\; b - a.$$

Limitním přechodem pro $\varepsilon \to 0^+$ dostáváme

$$l_1^*\big((a,b)\big) \;=\; b - a \;=\; l_1\big((a,b)\big).$$

2) Pro interaly $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b)$ použijeme analogicky vztahy $(a, b\rangle \subset \langle a, b\rangle \subset (a-\varepsilon, b\rangle$ pro každé $\varepsilon > 0$ a $\langle a, b-\varepsilon) \subset \langle a, b) \subset (a-\varepsilon, b\rangle$ pro každé $0 < \varepsilon < b-a$. $\square$

Tvrzení 1.8 : l_n^* je translačně invariantní, tj. pro každé $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ je při označení $A + x \;=\; \{a + x \,|\, a \in A\}$

$$l_n^*(A + x) \;=\; l_n^*(A).$$

Důkaz proveďte jako cvičení. $\square$

Definice : Řekněme, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je **lebesgueovsky měřitelná** (píšeme $A \in \mathfrak{M}_n$), jestliže pro každý usměrněný interval $Q \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ platí

$$l_n^*(Q) \;=\; l_n^*(Q \cap A) + l_n^*(Q \backslash A)\,.$$

Pro $A \in \mathfrak{M}_n$ položíme $\lambda_n(A) = l_n^*(A)$. λ_n nazýváme **Lebesgueova míra**.
Podobně pro m nezápornou zprava spojitou aditivní funkci na intervalu dostaneme **Lebesgue-Stieltjesovu míru generovanou** m.

Tvrzení 1.9 : **a)** Je-li H usměrněný poloprostor v $\mathbb{R}^n$, pak $H \in \mathfrak{M}_n$.

b) Je-li H usměrněný poloprostor v $\mathbb{R}^n$ a $A \in \mathfrak{M}_n$, pak $H \cap A \in \mathfrak{M}_n$.

c) Je-li I usměrněný interval v $\mathbb{R}^n$, pak $I \in \mathfrak{M}_n$ (tedy $\widetilde{\mathcal{I}}_n \subset \mathfrak{M}_n$).

Důkaz: **a)** Nechť $Q \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$. Pak $Q \cap H$, $Q \setminus H \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$, a tedy podle Věty 1.6

$$l_n^*(Q) = l_n(Q) = l_n(Q \cap H) + l_n(Q \setminus H) = l_n^*(Q \cap H) + l_n^*(Q \setminus H).$$

b) Mějme $Q \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$. Protože je l_n^* subaditivní, $Q \cap H \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$, množina A je měřitelná a také poloprostor H je podle a) měřitelný, můžeme psát

$$l_n^*(Q) \le l_n^*\big(Q \cap (H \cap A)\big) + l_n^*\big(Q \setminus (H \cap A)\big) = l_n^*\big((Q \cap H) \cap A)\big) + l_n^*\big((Q \setminus H) \cup ((Q \cap H) \setminus A)\big) \le$$

$$\le l_n^*\big((Q \cap H) \cap A)\big) + l_n^*\big((Q \cap H) \setminus A)\big) + l_n^*(Q \setminus H) = l_n^*(Q \cap H) + l_n^*(Q \setminus H) = l_n^*(Q).$$

Odhady $l_n^*(Q) \le l_n^*\big(Q \cap (H \cap A)\big) + l_n^*\big(Q \setminus (H \cap A)\big) \le l_n^*(Q)$ ale mohou platit, jen když v obou nerovnostech nastane rovnost. Musí tedy být $l_n^*(Q) = l_n^*\big(Q \cap (H \cap A)\big) + l_n^*\big(Q \setminus (H \cap A)\big)$, což jsme potřebovali dostat. Protože interval $Q \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$ mohl být libovolný, je množina $H \cap A$ lebesgueovsky měřitelná.

c) Tvrzení plyne z **a)**, **b)** a toho, že n-rozměrný usměrněný interval je průnikem $2n$ usměrněných poloprostorů. $\square$

Věta 1.10 : Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná právě tehdy, když je l_n^*-měřitelná podle (Carathéodoryho), tj.

$$l_n^*(T) \;=\; l_n^*(T \cap A) \;+\; l_n^*(T \setminus A) \qquad \forall\, T \subset \mathbb{R}^n.$$

Tedy $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}(l_n^*)$ a $\lambda_n = (l_n^*)^\circ$. ($\mathfrak{M}_n$ je tak σ-algebra a λ_n je úplná míra).

Důkaz: Implikace "$\Leftarrow$"je triviální. Dokážeme opačnou implikaci. Nechť $A \in \mathfrak{M}_n$ a $T \subset \mathbb{R}^n$. Je-li $l_n^*(T) = \infty$, pak ze subaditivity l_n^* je $\infty = l_n^*(T) \le l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \le \infty$, tedy platí rovnost. Předpokládejme nyní, že $l_n^*(T) < \infty$. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. K němu z definice $l_n^*(T)$ existuje $\big(Q_j\big)_{j=1}^{\infty} \subset \widetilde{\mathcal{I}}_n$ tak, že $T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ a $\sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) < l_n^*(T) + \varepsilon$. Zřejmě $T \cap A \subset \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\big) \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(Q_j \cap A)$ a $T \setminus A \subset \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\big) \setminus A = \bigcup_{j=1}^{\infty}(Q_j \setminus A)$. Tedy

$$l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \overset{\text{(VM2)}}{\le} l_n^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(Q_j \cap A)\big) + l_n^*\big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(Q_j \setminus A)\big) \overset{\text{(VM3)}}{\le} \sum_{j=1}^{\infty} l_n^*\big(Q_j \cap A\big) + \sum_{j=1}^{\infty} l_n^*\big(Q_j \setminus A\big).$$

Protože je l_n^* nezáporná (a tedy lze řady přerovnat), $A \in \mathcal{M}_n$ a $Q_j \in \widetilde{\mathcal{I}}_n$, máme díky Důsledku 1.7

$$l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \le \sum_{j=1}^{\infty}\big(l_n^*\big(Q_j \cap A\big) + \ l_n^*\big(Q_j \setminus A\big)\big) = \sum_{j=1}^{\infty} l_n^*\big(Q_j\big) = \sum_{j=1}^{\infty} l_n\big(Q_j\big) < l_n^*(T) + \varepsilon.$$

Odtud limitním přechodem pro $\varepsilon \to 0^+$ dostáváme $l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \le l_n^*(T)$. Opačná nerovnost plyne ze subaditivity l_n^*. Tedy $l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) = l_n^*(T)$ pro každé $T \subset \mathbb{R}^n$ a A je lebesgueovsky měřitelná. $\square$

Důsledek 1.11 : Každý interval je lebesgueovsky měřitelný.

Důkaz: Označme $\mathcal{I}_n^*$ množinu všech n-rozměrných intervalů (omezených i neomezných). Pak $\mathcal{I}_n^* \subset \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_n)$. Máme totiž např. (značíme $d = \frac{b_1 - a_1}{2}$)

$$(a_1, b_1) \times \langle a_2,\, b_2\rangle = \Big(\bigcup_{m=1}^{\infty}\, (a_1, b_1 - \frac{d_1}{m}\,\rangle\Big) \times \langle a_2,\, b_2\rangle = \bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(\big(a_1, b_1 - \frac{d_1}{m}\,\rangle \times \langle a_2,\, b_2\rangle\Big) =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(\big(a_1, b_1 - \frac{d_1}{m}\,\rangle \times \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(a_2 - \frac{1}{k}\,, b_2\Big\rangle\Big) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\Big(\big(a_1, b_1 - \frac{d_1}{m}\,\rangle \times \big(a_2 - \frac{1}{k}\,, b_2\big\rangle\Big)\Big).$$

Protože σ-algebra je uzavřená na spočetná sjednocení a průniky, dostáváme odtud $(a_1, b_1) \times \langle a_2,\, b_2\rangle \in \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_n)$. Pro jiné intervaly a dimenze postupujeme podobně. Použijeme při tom např. přepisy $\langle a,\, b) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\big((a - \frac{1}{k}\,, b - \frac{d}{m}\,\rangle\big)$, kde $d = \frac{b-a}{2}$, a $\langle a,\, \infty) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\big((a - \frac{1}{k}\,, a + m\rangle\big)$. Dále podle Věty 1.10 je $\mathfrak{M}_n$ σ-algebra a podle Tvrzení 1.9 je $\widetilde{\mathcal{I}}_n \subset \mathfrak{M}_n$. Tedy $\sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_n) \subset \mathfrak{M}_n$. Celkem tak dostáváme $\mathcal{I}_n^* \subset \sigma(\widetilde{\mathcal{I}}_n) \subset \mathfrak{M}_n$. $\square$

Věta 1.12 : Existuje množina $B \subset (0, 1)$ taková, že $B \notin \mathfrak{M}_1$ (tj. B je neměřitelná).

Důkaz: Položme $x \sim y$, pokud $x - y \in \mathbb{Q}$. Relace $\sim$ je zřejmě ekvivalence na $\mathbb{R}$. Označme $\mathcal{V}$ systém tříd ekvivalence $\sim$. Máme: $V \in \mathcal{V}$ právě tehdy, když $V = x + \mathbb{Q}$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ (x není určeno jednoznačně). Zřejmě $V \cap (0, 1) \neq \emptyset$ pro každé $V \in \mathcal{V}$. Položme $\widetilde{\mathcal{V}} = \{\widetilde{V} = V \cap (0, 1)\,|\, V \in \mathcal{V}\}$. Na $\widetilde{\mathcal{V}}$ použijeme tzv. axiom výběru (Axiom of Choice; AC), který říká: *Pro každý neprázdný soubor neprázdných množin existuje funkce, která z každé množiny tohoto souboru vybírá právě jeden prvek.* Na základě axiomu výběru existuje množina $E \subset (0, 1)$ taková, že pro každé $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{V}}$ je $\widetilde{V} \cap E$ jednoprvková množina. Naším cílem je nyní ukázat, že $E \notin \mathfrak{M}_1$. Množina $\mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ je spočetná, tedy existuje prostá posloupnost $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $(q_n)_{n=1}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$. Označme $E_n = E + q_n$. Pak $E_n \cap E_m = \emptyset$ pro $n \neq m$, protože jinak by existovaly $x, y \in E$, $x \neq y$ (neboť $q_n \neq q_m$) tak, že $x + q_n = y + q_m$, tj. $x - y \in \mathbb{Q}$, což by vedlo ke sporu. Dále, protože $q_n \in (-1, 1)$ a $E \subset (0, 1)$, máme $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset (-1, 2)$. Ukážeme ještě, že $(0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Mějme $x \in (0, 1)$, pak existuje $z \in E\ \big(\subset (0, 1)\big)$ takové, že $z \sim x$, tj. $x - z \in \mathbb{Q}$. Protože $x - z \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$, máme $x - z = q_n$ pro vhodné n, což ale znamená, že $x = z + q_n \in E_n$. Tedy skutečně $(0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Zbytek důkazu provedeme sporem. Předpokládejme, že množina E je měřitelná. Pak je definována její míra $\lambda_1(E)$. Protože je λ_1 translačně invariantní, jsou měřitelné i všechny množiny E_n a pro každé n platí $\lambda_1(E_n) = \lambda_1(E)$. Tedy ze σ-aditivity λ_1 máme

$$\lambda_1\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E).$$

Víme přitom, že jednak $1 = \lambda_1\big((0, 1)\big) \le \lambda_1\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E)$ (neboť $(0, 1) \subset \bigcup E_n$), tedy $\lambda_1(E) \neq 0$, jednak $3 = \lambda_1\big((-1, 2)\big) \ge \lambda_1\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E)$ (protože $\bigcup E_n \subset (-1, 2)$), tedy $\lambda_1(E) \not> 0$. Tím jsme došli ke sporu s předpokladem existence $\lambda_1(E)$. To znamená, že množina $E \subset (0, 1)$ nemůže být měřitelná. $\square$

Poznámka : Množina E z důkazu Věty 1.12 je neměřitelná, tedy existuje $T \subset \mathbb{R}$ tak, že $l_1^*(T) \neq l_1^*(T \cap E) + l_1^*(T \setminus E)$. Přitom $T = (T \cap E) \cup (T \setminus E)$ a $(T \cap E) \cap (T \setminus E) = \emptyset$. Tedy Lebesgueova vnější míra l_1^* není aditivní. (Místo E můžeme samozřejmě použít jakoukoliv jinou lebesgueovsky neměřitelnou množinu.)

1.4 Borelovské množiny v $\mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ... $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ – **norma** x

$r > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ ... $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$ – **otevřená koule se středem** x **a poloměrem** r (okolí bodu x o poloměru r)

$(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x_k - x\| \to 0$ pro $k \to \infty$ ... $x_k \to x$ pro $k \to \infty$,

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **otevřená**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ tak, že $B_r(x) \subset M$.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **uzavřená**, jestliže je množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ otevřená. To nastává právě tehdy, když platí

$$\text{kdykoliv} \quad (x_k)_{k=1}^\infty \subset M, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{a} \quad x_k \to x, \qquad \text{pak} \qquad x \in M.$$

Platí:

- $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ jsou otevřené množiny.
- $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ jsou uzavřené množiny.
- Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

  Důkaz:
  $$\mathbb{R}^n \setminus \Big(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \underbrace{F_\alpha}_{\text{uzavř.}} \Big) = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \big(\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha}_{\text{otevř.}} \big)}_{\text{otevř.}}$$

  Jiný způsob: Nechť $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha,\ x_n \to x$. Pak pro každé α máme $(x_n)_{n=1}^\infty \subset F_\alpha$, a tedy $x \in F_\alpha$, protože F_α je uzavřená. □

- Průnik **konečného** počtu otevřených množin je otevřená množina:

  Důkaz: Nechť $x \in \bigcap_{k=1}^K G_k$, kde G_k jsou otevřené množiny. Pak existují $r_k > 0$ $(k = 1, \ldots K)$ tak, že $B_{r_k}(x) \subset G_k$. Označme $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$. Protože množin máme konečný počet, je $r > 0$. Přitom pro každé k je $B_r(x) \subset B_{r_k}(x) \subset G_k$. Tedy $B_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^K G_k$. □

- Sjednocení **konečného** počtu uzavřených množin je uzavřená množina:

  Důkaz: Jde o důsledek předchozí vlastnosti a vztahu mezi uzavřenými a otevřenými množinami. □

Definice : Označme $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ je otevřená } \}$. Pak definujeme

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{G}),$$

tedy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je nejmenší σ-algebra podmnožin $\mathbb{R}^n$, která obsahuje všechny otevřené množiny. Množiny ze σ-algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nazýváme **borelovské**.

Platí: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ obsahuje také všechny uzavřené množiny.

Tvrzení 1.13 : Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je sjednocením spočetně mnoha usměrněných intervalů.

Důkaz: Uvedeme pouze myšlenku důkazu. Bodů s racionálními souřadnicemi je v $\mathbb{R}^n$ spočetně mnoho. Pro libovolné $x \in G$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že „krychle“ o straně $\frac{2}{2^k}$ a středu s racionálními souřadnicemi s 2^k ve jmenovateli, ve které x leží, leží celá v okolí bodu x, které je obsaženo v G. Tedy každé $x \in G$ je prvkem některé z krychlí délky strany $\frac{2}{2^k}$ (možných délek je spočetně mnoho), přičemž pro každou délku strany uvažujeme jen krychle se spočetně mnoha různými středy. □

Platí:

- Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující všechny usměrněné intervaly v $\mathbb{R}^n$, pak $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$. Tedy každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.
  (Ne každá lebesueovsky měřitelná množina je borelovská – více viz Věta 1.14)

Důkaz proveďte sami jako cvičení.

Věta 1.14 **(charakterizace lebesgueovsky měřitelných množin) :** Buď $E \subset \mathbb{R}^n$. Pak jsou ekvivalentní tvrzení

(i) $E \in \mathfrak{M}_n$

(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ a uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}^n$, takové že

$$F \subset E \subset G \qquad \text{a} \qquad \lambda_n(G \backslash F) < \varepsilon.$$

(iii) Existují borelovské množiny $P,\ Q \subset \mathbb{R}^n$ (přesněji P typu F_σ – spočetné sjednocení uzavřených množin, Q typu G_δ – spočetný průnik otevřených množin) takové, že

$$P \subset E \subset Q \qquad \text{a} \qquad \lambda_n(Q \backslash P) = 0.$$

(iv) Existují borelovské množiny $M,\ N$ takové, že

$$\lambda_n(N) = 0 \qquad \text{a} \qquad (E \backslash M) \cup (M \backslash E) \quad \subset \ N.$$

V důkazu věty použijeme následující lemma, které uvádíme bez důkazu. Vyskytuje se v něm pojem kompaktní množina. Říkáme, že množina K je **kompaktní**, jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Tj. pokud pro otevřené množiny G_α, $\alpha \in \Lambda$, platí $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, pak existují $m \in \mathbb{N}$ a indexy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tak, že $K \subset \bigcup_{i=1}^m G_{\alpha_i}$. V $\mathbb{R}^n$ jsou kompaktní právě všechny omezené uzavřené množiny.

Lemma : Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}^n$. Potom

a) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $E \subset G$ a $\lambda_n(G \backslash E) < \varepsilon$,

b) $\lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(K) \,|\, K \text{ kompaktní, } K \subset E\}$.

Důkaz Věty 1.14: **(i)⇒(ii)** Podle lemmatu existují otevřená množina G a uzavřená množina F takové, že $F \subset E \subset G$ a $\lambda_n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\lambda_n(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Díky tomu, že množiny $G \setminus E$ a $E \setminus F$ jsou disjunktní, máme

$$\lambda_n(G \setminus F) = \lambda_n((G \setminus E) \cup (E \setminus F)) = \lambda_n(G \setminus E) + \lambda_n(E \setminus F) < \varepsilon.$$

(ii)⇒(iii) Zvolme otevřené množiny $G_k \subset \mathbb{R}^n$ a uzavřené množiny $F_k \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $F_k \subset E \subset G_k$, $\lambda_n(G_k \backslash F_k) < \frac{1}{k}$. Množiny G_k, F_k lze přitom zřejmě volit tak, že $G_{k+1} \subset G_k$, $F_k \subset F_{k+1}$. Pak $(G_{k+1} \setminus F_{k+1}) \subset (G_k \setminus F_k)$ a pro $Q = \bigcap_{k=1}^\infty G_k$, $P = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$ máme podle Věty 1.1(4) $P \subset E \subset Q$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$0 \le \lambda_n(Q \setminus P) = \lambda_n\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus F_k)\Big) \le \lambda_n(G_m \setminus F_m) < \frac{1}{m}.$$

Rovnost $\lambda_n(Q \setminus P) = 0$ odtud dostaneme limitním přechodem pro $m \to \infty$.

(iii)⇒(iv) Položme $M = Q$, $N = Q \setminus P$, kde Q, P jsou borelovské množiny z (iii). Pak $\lambda_n(N) = 0$ a $M \setminus E = Q \setminus E$, $E \setminus M = \emptyset$, tedy $(M \setminus E) \cup (E \setminus M) = Q \setminus E \subset Q \setminus P = N$.

(iv)⇒(i) Nechť M, N jsou jako v (iv). Pak $M,\ N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$ a $E \setminus M \subset N$, $M \setminus E \subset N$. Protože je Lebesgueova míra λ_n úplná, máme $E \setminus M, M \setminus E \in \mathfrak{M}_n$. Z toho dostáváme

$$E = (E \setminus M) \cup (M \cap E) = (\underbrace{E \setminus M}_{\in \mathfrak{M}_n}) \cup \underbrace{(\underbrace{M}_{\in \mathfrak{M}_n} \setminus (\underbrace{M \setminus E}_{\in \mathfrak{M}_n}))}_{\in \mathfrak{M}_n} \in \mathfrak{M}_n.$$

□

1.5 Měřitelné funkce

Definice : Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $D \in \mathcal{S}$. Pak $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **$\mathcal{S}$-měřitelná funkce na** D, jestliže pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\{x \in D \,|\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty\rangle) \in \mathcal{S}.$$

Komplexní funkce na D je $\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže jsou $\mathcal{S}$-měřitelné její reálná i imaginární část.

Poznámka: Uvažujme funkci $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ a množiny $A, A_1, A_2, \ldots \subset \overline{\mathbb{R}}$. Pro vzory množin $\overline{\mathbb{R}} \setminus A$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ zřejmě platí $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus A) = D \setminus f^{-1}(A)$ a $f^{-1}\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j)$. Vezmeme-li tedy v úvahu, že σ-algebra $\mathcal{S}$ je uzavřená na rozdíly a spočetná sjednocení a že

$$\begin{aligned} \langle -\infty, a\rangle &= \overline{\mathbb{R}} \setminus (a, \infty\rangle, & \langle a, \infty\rangle &= \overline{\mathbb{R}} \setminus \langle -\infty, a), \\ \langle -\infty, a) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle -\infty, a - \frac{1}{n}\,\rangle, & (a, \infty\rangle &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle a + \frac{1}{n}\,, \infty\rangle, \end{aligned}$$

vidíme, že v případě $D \in \mathcal{S}$ jsou ekvivalentní tvrzení

- f je $\mathcal{S}$-měřitelná na D, tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty\rangle) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) \le \alpha\} = f^{-1}(\langle -\infty, \alpha\rangle) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) < \alpha\} = f^{-1}(\langle -\infty, \alpha)) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, f(x) \ge \alpha\} = f^{-1}(\langle \alpha, \infty\rangle) \in \mathcal{S}$.

Není tedy podstatné, kterou z nerovností $>$, $\le$, $<$, $\ge$ v definici $\mathcal{S}$-měřitelné funkce použijeme.

Zřejmě: • Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na $D \in \mathcal{S}$, $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, pak je f $\mathcal{S}$-měřitelná i na D'.

- Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, pak je f $\mathcal{S}$-měřitelná i na $D_1 \cup D_2$.

Dokažte jako cvičení.

Definice : Nechť $A \subset X$. Funkci $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ takovou, že

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

nazýváme **charakteristická funkce množiny** A **v** X.

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme zúžení funkce χ_A na množinu $D \in \mathcal{S}$ (tj. charakteristickou funkci množiny $A \cap D$ v D) značit také χ_A.

Zřejmě: χ_A je $\mathcal{S}$-měřitelná, právě když je A $\mathcal{S}$-měřitelná

Platí : • **Každá** funkce je $\mathcal{S}$-měřitelná, právě když $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$.

- $\mathcal{S}$-měřitelné jsou **jen** konstantní funkce, právě když $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$.

Důkaz: • Pokud $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$, pak je zřejmě $\mathcal{S}$-měřitelná každá funkce, protože je měřitelná každá množina. Pokud existuje $B \subset X$, $B \notin \mathcal{S}$, pak charakteristická funkce χ_B této množiny není $\mathcal{S}$-měřitelná.

• Pokud existuje $A \in \mathcal{S}$, $A \ne \emptyset$, $A \ne X$, pak χ_A je $\mathcal{S}$-měřitelná, není ale konstantní. Pokud funkce f není konstantní, existují $a, b \in X$ takové, že $f(a) < f(b)$. Množina $M = \{x \in X \,\big|\, f(x) > f(a)\}$ je neprázdná (obsahuje b), není ale rovna celému X (neobsahuje a). Pokud je funkce f $\mathcal{S}$-měřitelná, je $M \in \mathcal{S}$. $\square$

Tvrzení 1.15 : Nechť f, g jsou $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

a) $\{x \in X \,|\, f(x) < g(x)\} \in \mathcal{S}$ (zkráceně zde $\{f < g\} \in \mathcal{S}$ a analogicky jinde)

b) $\{x \in X \,|\, f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{S}$

$\{x \in X \,|\, f(x) = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S}$

c) $\{x \in X \,|\, f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{S}$

Důkaz: **a)** Jestliže $f(x) < g(x)$, pak existuje $q \in \mathbb{Q} \cap (f(x), g(x))$, tedy

$$\{x \in X \,|\, f(x) < g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\{x \in X \,|\, f(x) < q\} \cap \{x \in X \,|\, g(x) > q\} \big).$$

Pro důkaz **b)** a **c)** použijeme přepisy

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, \infty\rangle\,), \qquad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\langle -\infty, -n\rangle\,),$$

$$f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}\big(\langle a, \infty\rangle\big) \setminus f^{-1}\big((a, \infty\rangle\big) \qquad \Big(\text{nebo} \quad f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}\big(\langle a, \infty\rangle\big) \cap f^{-1}\big(\langle -\infty, a\rangle\big) \Big).$$

□

Aritmetické operace v $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

- **nedefinujeme:** $\infty + (-\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{a}{0}$ $(a \in \overline{\mathbb{R}})$
- **definujeme (zde):** $0 \cdot (\pm\infty) = 0$

Značení: Pro $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ označíme

$$f^+ \;=\; \max\{f, 0\} \quad \text{(kladná část } f), \qquad f^- \;=\; \max\{-f, 0\} \quad \text{(záporná část } f).$$

Pak

$$|f| \;=\; f^+ + f^-, \qquad f \;=\; f^+ - f^-.$$

Tvrzení 1.16 : Nechť f je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $G \subset \overline{\mathbb{R}}$ je otevřená nebo uzavřená množina. Pak množina

$$D' \;=\; \{x \in D \,|\, f(x) \in G\}$$

je měřitelná. Je-li navíc φ funkce spojitá na G, $\varphi \circ f$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na D'.

Důkaz: Uzavřené a otevřené množiny jsou v σ-algebře generované usměrněnými intervaly v $\overline{\mathbb{R}}$, tedy vzory takových množin v $\mathcal{S}$-měřitelném zobrazení jsou měřitelné (jako v poznámce za definicí měřitelné funkce). Funkce φ je spojitá, tedy vzorem otevřené množiny je otevřená množina. Speciálně, protože interval $(a, \infty\rangle$ je otevřený v $\overline{\mathbb{R}}$, je $\varphi^{-1}\big((a, \infty\rangle\big) \subset G$ také otevřená množina. Množina $(\varphi \circ f)^{-1}\big((a, \infty\rangle\big) = f^{-1}\big(\varphi^{-1}\big((a, \infty\rangle\big)\,\big)$ je proto měřitelná. □

Věta 1.17 : Nechť f, g, f_1, f_2, … jsou $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

a) funkce λf, $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou $\mathcal{S}$-měřitelné na D, funkce $\frac{1}{f}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na $\{x \in D \,|\, f(x) \neq 0\}$,

b) funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné na podmnožině množiny D, na které má daná operace smysl,

c) funkce $\max\{f_1, \dots, f_n\}$, $\min\{f_1, \dots, f_n\}$, $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$, $\inf\limits_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}$, $\limsup\limits_{j \to \infty} f_j \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{j \to \infty} \Big(\sup\limits_{i \geq j} \{f_i\} \Big)$,
$\liminf\limits_{j \to \infty} f_j \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{j \to \infty} \Big(\inf\limits_{i \geq j} \{f_i\} \Big)$ jsou $\mathcal{S}$-měřitelné na D,

d) množina D' všech $x \in D$, kde existuje $\lim\limits_{j \to \infty} f_j(x)$ je $\mathcal{S}$-měřitelná a funkce $\lim\limits_{j \to \infty} f_j$ je $\mathcal{S}$-měřitelná na D'.

Důkaz: Dokážeme jen tvrzení **a)** a **b)**. Měřitelností zde budeme myslet $\mathcal{S}$-měřitelnost.

a) Jde o důsledek Tvrzení 1.16 a toho, že funkce $\varphi_0(y) = \lambda y$, $\varphi_1(y) = |y|$, $\varphi_2(y) = \max\{0, y\}$, $\varphi_3(y) = \max\{0, -y\}$, $\varphi_4(y) = y^2$, jsou spojité na $\mathbb{R}$ a funkce $\varphi_5(y) = \frac{1}{y}$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Měřitelnost aritmetických operací ukážeme za předpokladu, že funkce f a g nabývají na D jen konečných hodnot. V obecném případě bychom pomocí Tvrzení 1.15,b+c) a poznámky za definicí měřitelné funkce nejdřív ukázali měřitelnost množin, na kterých jsou jednotlivé operace definované, a potom měřitelnost množin, na kterých výsledná funkce nabývá hodnoty větší než α, a přitom v každém jejich bodě alespoň jedna z funkcí f a g není konečná. Zkuste si to rozmyslet pro součet nebo součin jako cvičení. (Protože máme definováno $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, je potřeba v případě součinu rozlišit případy $\alpha < 0$ a $\alpha \geq 0$).

Předpokládejme tedy, že pro každé $x \in D$ je $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$. Podíváme se nejdřív na měřitelnost součtu. Zřejmě $f(x) + g(x) > \alpha$, právě když $f(x) > \alpha - g(x)$. Funkce $h = \alpha - g$ je přitom měřitelná, protože pro každé $\beta \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \,|\, h(x) > \beta\} = \{x \in D \,|\, \alpha - g(x) > \beta\} = \{x \in D \,|\, \alpha - \beta > g(x)\} \in \mathcal{S}$. Nyní již stačí použít Tvrzení 1.15,a). Podobně můžeme postupovat v případě rozdílu. Měřitelnost součinu a podílu jsou důsledkem měřitelnosti součtu a rozdílu, druhé mocniny a násobku a rovností $f \cdot g = \big((f+g)^2 - f^2 - g^2 \big) \cdot \frac{1}{2}$ (příp. $f \cdot g = \frac{1}{4} \big((f+g)^2 - (f-g)^2 \big)$) a $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. $\square$

Důsledek 1.18 : Nechť f, g jsou $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak $\{x \in D \,|\, f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$.

Důkaz proveďte jako cvičení. (Návod: Využijte Tvrzení 1.15,c) nebo 1.15,a).) $\square$

Definice : Systém $\{A_1, \ldots, A_n\}$ podmnožin množiny D se nazývá **rozkladem** množiny D, jestliže $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = D$.

Definice : Funkce f se nazývá **jednoduchá**, pokud je lineární kombinací charakteristických funkcí měřitelných množin, tj. existují množiny $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ a čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ taková, že

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{A_i}.$$

Poznámky : 1) Jednoduchá funkce nabývá konečně mnoha hodnot a je měřitelná (a každá <u>měřitelná</u> funkce nabývající konečně mnoha hodnot je jednoduchá).

2) Vyjádření jednoduché funkce ve tvaru $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \chi_{A_i}$ není určeno jednoznačně, vždy ale existuje právě jedno vyjádření takové, že množiny $A_1, \ldots, A_n$ tvoří rozklad množiny X a $\alpha_i \neq \alpha_j$ pro $i \neq j$.

Věta 1.19 : Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak existují jednoduché nezáporné funkce $f_k \nearrow f$ (tj. $f_{k+1} \geq f_k$ pro každé k a $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ pro každé x). Navíc f lze vyjádřit ve tvaru

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \chi_{E_j} \quad \Big(= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=-n}^{n} 2^j \chi_{E_j} \Big),$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

Důkaz: Označme $P_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \langle (2k+1)2^j,\, (2k+2)2^j)$ (tedy P_j obsahuje čísla, která mají na j-tém místě dvojkového zápisu jedničku) a $E_j = f^{-1}(P_j)$. Pak $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \chi_{E_j}$, $f_n = \sum_{j=-n}^{n} 2^j \chi_{E_j} \nearrow f$. $\square$

Důsledek 1.20 : Nechť f je $\mathcal{S}$-měřitelná na $D \in \mathcal{S}$. Pak existuje posloupnost jednoduchých funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $|f_n| \leq |f|$ a $f_n \longrightarrow f$ na D.

Důkaz: Funkce f^+, f^- jsou nezáporné měřitelné, tedy podle Věty 1.18 existují nezáporné jednoduché funkce g_n, h_n, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $g_n \nearrow f^+$, $h_n \nearrow f^-$. Je-li $f(x) \leq 0$, pak $f^+(x) = 0$, a tedy $g_n(x) = 0$ pro každé n. Analogicky, je-li $f(x) \geq 0$, pak $f^-(x) = 0$ a $h_n(x) = 0$ pro každé n. To znamená, že když položíme $f_n = g_n - h_n$, budeme mít $g_n = f_n^+$ a $h_n = f_n^-$. Tedy $|f_n| = f_n^+ + f_n^- = g_n + h_n \leq f^+ + f^- = |f|$. Protože $g_n \to f^+$, $h_n \to f^-$ máme také $f_n = g_n - h_n \to f^+ - f^- = f$. $\square$

Funkce $\mathcal{S}$-měřitelná na $D \in \mathcal{S}$ musí být definovaná na celé množině D. To může být omezující. Proto pokud je na našem prostoru definovaná míra, hodilo by se upravit definici funkce měřitelné na D tak, aby na nějaké podmnožině míry nula funkce nemusela být definovaná. To nás vede k definici μ-měřitelné funkce:

Definice : Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Dále nechť $f : D' \to \overline{\mathbb{R}}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, $\mu(D \backslash D') = 0$. Pak funkci f nazveme **μ-měřitelnou na** D.

Poznámka : Samozřejmě každá funkce $\mathcal{S}$-měřitelná na D je i μ-měřitelná na D. Pokud v budoucnu použijeme bez dalšího upřesnění jen stručné označení "funkce měřitelná na D", budeme mít na mysli funkci μ-měřitelnou na D.