KAPITOLA 2: Abstraktní Lebesgueův integrál

$(X, \mathcal{S}, \mu)$ – prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$

s.v. = **skoro všude, pro skoro všechna** apod. ... až na množinu míry nula

Poznámka: Na několika místech v této kapitole použijeme při důkazu nějakého tvrzení linearitu integrálu nebo aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru, které budou dokázány až později. Pokud to uděláme, nebude právě dokazované tvrzení k důkazu linearity či aditivity integrálu potřeba. Nepůjde tedy o důkaz v kruhu.

2.1 Zavedení a základní vlastnosti

Připomenutí: Máme definováno $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Konstrukce integrálu

Při konstrukci integrálu postupujeme v několika krocích. definujeme ho nejdříve pro nejjednodušší funkce a od nich pak přecházíme k funkcím obecnějším.

Nechť $D \in \mathcal{S}$

(1) Je-li s nezáporná jednoduchá funkce, $s = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$, pak definujeme

$$\int_D s \, \mathrm{d}\mu \; = \; \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, \mu(A_j \cap D)\,.$$

(2) Je-li f nezáporná $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na D, pak definujeme

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu \; = \; \sup \left\{ \int_D s \, \mathrm{d}\mu \;\Big|\; s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \le s \le f \text{ na } D \right\}.$$

(3) Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na D, pak definujeme

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu \; = \; \int_D f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_D f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

má-li tento rozdíl smysl (tj. není $\infty - \infty$).

(4) Je-li f $\mathcal{S}$-měřitelná na $D' \subset D$, $\mu(D \backslash D') = 0$ (tedy f je také μ-měřitelná na D), definujeme

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu \; = \; \int_{D'} f \, \mathrm{d}\mu\,,$$

pokud je integrál vpravo definován.

Je-li integrál $\int_D f \, \mathrm{d}\mu$ definován, říkáme, že **má smysl** nebo že f **má integrál**. Pokud je integrál navíc konečný, říkáme, že $\int_D f \, \mathrm{d}\mu$ **konverguje** nebo že f **je integrovatelná na** D**.**

Poznámky:

1) Je-li f integrovatelná, pak nutně $\int\limits_D f^+ \, \mathrm{d}\mu < \infty$, $\int\limits_D f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty$, tedy též

$$\int\limits_D |f| \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_D (f^+ + f^-) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_D f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_D f^- \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

(Použili jsme tu Větu 2.5 o linearitě integrálu, která bude uvedena dále.) To znamená, že pokud je funkce f integrovatelná, je integrovatelná i $|f|$. Tedy každá integrovatelná funkce je **absolutně integrovatelná** (říkáme též, že Lebesgueův integrál je **absolutně konvergentní**). Přitom $(\int\limits_D f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_D f^- \, \mathrm{d}\mu) \ge |\int\limits_D f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_D f^- \, \mathrm{d}\mu\,|$, tedy

$$\int_D |f| \, \mathrm{d}\mu \; \ge \; \Big| \int_D f \, \mathrm{d}\mu \Big|.$$

Tato nerovnost platí zřejmě i v případě, že $\int_D f \, \mathrm{d}\mu$ je nekonečný.

2) Definice abstraktního integrálu z jednoduché funkce je korektní, tj. nezávisí na výběru vyjádření funkce s jako lineární kombinace charakteristických funkcí po dvou disjunktních množin. Je to důsledek tvrzení, které říká, že jsou-li $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ resp. $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ nezáporná čísla a

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \leq \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i},$$

pak

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) \leq \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i).$$

(Tvrzení dokažte jako cvičení.) Je-li tedy

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i},$$

pak

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) \leq \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j),$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i).$$

Dá se dokonce ukázat, že definice $\int_D s \,\mathrm{d}\mu = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \, \mu(A_j \cap D)$ by byla korektní i bez požadavku $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. Dokazování je ale nepříjemné, potože společný průnik může mít několik množin.

3) Určení $\int_D f \,\mathrm{d}\mu$ pro $f \geq 0$ jednoduchou podle **(1)** a **(2)** dává stejné hodnoty. Je-li totiž $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$, $0 \leq s \leq f$ na D, $s = \sum_{i=1}^{m} \beta_j \chi_{B_i}$, pak z předchozího dostáváme

$$\int_D s \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} \beta_j \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \int_D f \,\mathrm{d}\mu.$$

Tedy

$$\sup \left\{ \int_D s \,\mathrm{d}\mu \mid s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f \text{ na } D \right\} \leq \int_D f \,\mathrm{d}\mu.$$

Nyní už si stačí jen uvědomit, že pro $s = f$ máme $\int_D s \,\mathrm{d}\mu = \int_D f \,\mathrm{d}\mu$.

4) Je-li $D \in \mathcal{S}$, $\mu(D) = 0$, pak pro každou měřitelnou funkci f je $\int_D f \,\mathrm{d}\mu = 0$. V tomto případě je totiž nulový integrál přes D z každé nezáporné jednoduché funkce.

5) Definice integrálu μ-měřitelné funkce je korektní, tedy nezávisí na volbě množiny D' uvedených vlastností. Je to důsledek aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru (viz Tvrzení 2.6) a předchozí poznámky.

6) Je-li f definována na $D \in \mathcal{S}$ a $M \subset D$, $M \in \mathcal{S}$, pak zřejmě platí

$$\int_M f \,\mathrm{d}\mu = \int_D f \chi_M \,\mathrm{d}\mu\,.$$

7) Někdy (např. když integrál bude záviset na parametru) budeme psát

$$\int_D f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \qquad \text{místo} \qquad \int_D f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

8) Pro $(X, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda_n)$ používáme značení

$$\int_E f \,\mathrm{d}x := \int_E f \,\mathrm{d}\lambda_n, \qquad \int_a^b f \,\mathrm{d}x := \int_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\lambda_1.$$

Index u $\mathfrak{M}$ a λ označující dimenzi někdy vynecháváme.

9) Při výpočtu integrálů používáme tento vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem:

> Nechť f je riemannovsky integrovatelná funkce na $\langle a,\, b\rangle$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b (tj. přes $\langle a,\, b\rangle$) konverguje a je roven integrálu Riemannovu.

Tvrzení 2.1: Nechť $D \in \mathcal{S}$ a funkce f, g jsou měřitelné na D. Pak platí

a) Je-li $f \geq 0$, $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak $\int_{D_1} f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{D_2} f \,\mathrm{d}\mu$.

b) Je-li $\int_D |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude na D.

c) Je-li $\int_D |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$, pak $|f| = 0$ skoro všude na D.

d) Jestliže f, g mají integrál přes D a $f \leq g$ skoro všude na D, pak $\int_D f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_D g \,\mathrm{d}\mu$. (monotonie integrálu)

e) Je-li $\int_D g \,\mathrm{d}\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude na D, pak f je integrovatelná.

Důkaz: a) Z našich předpokladů plyne, že $f\chi_{D_1} \leq f\chi_{D_2}$ na D, tedy každá jednoduchá funkce, která splňuje $0 \leq s \leq f\chi_{D_1}$ na D, splňuje na D také $0 \leq s \leq f\chi_{D_2}$. Odtud už máme

$$\int_{D_1} f \,\mathrm{d}\mu = \int_D f\chi_{D_1} \,\mathrm{d}\mu = \sup\Big\{ \int_D s \,\mathrm{d}\mu \;\Big|\; s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f\chi_{D_1} \text{ na } D \Big\}$$

$$\leq \sup\Big\{ \int_D s \,\mathrm{d}\mu \;\Big|\; s \text{ je jednoduchá funkce, } 0 \leq s \leq f\chi_{D_2} \text{ na } D \Big\} = \int_D f\chi_{D_2} \,\mathrm{d}\mu = \int_{D_2} f \,\mathrm{d}\mu.$$

b) Předpokládejme, že $\int_D |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Kdyby pro $M = \{x \in D \,\big|\, |f(x)| = \infty\}$ bylo $\mu(M) > 0$, pak by pro jednoduché funkce $s_k = k\,\chi_M$ platilo $0 \leq s_k \leq |f|$, tedy

$$\int_D |f| \,\mathrm{d}\mu \geq \int_D s_k \,\mathrm{d}\mu = k\,\mu(M) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

To by ale bylo ve sporu s naším předpokladem $\int_D |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Musí tedy být $\mu(M) = 0$.

c) Nechť $\int_D |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Označme $M = \{x \in D \,\big|\, |f(x)| > 0\} \big(= \{x \in D \,\big|\, f(x) \neq 0\} \big)$. Pak $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, kde $M_k = \big\{x \in D \,\big|\, |f(x)| > \frac{1}{k} \big\}$. Pro každé k je $\frac{1}{k}\,\chi_{M_k}$ jednoduchá funkce, pro kterou platí $0 \leq \frac{1}{k}\,\chi_{M_k} \leq |f|$ na D. Tedy

$$0 = \int_D |f| \,\mathrm{d}\mu \geq \int_D \frac{1}{k}\,\chi_{M_k} \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{k}\,\mu(M_k) \geq 0.$$

Odtud dostáváme, že $\mu(M_k) = 0$ pro každé k, což už dává díky σ-subaditivitě míry (viz Věta 1.1) $\mu(M) = 0$, neboli $f = 0$ s.v. na D.

d) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \leq g$ všude na D. Kdyby totiž tato nerovnost platila jen na množině $D' \subset D$, $\mu(D \setminus D') = 0$, omezili bychom se na tuto množinu a pak využili toho, že integrály přes D a D' jsou stejné (je to důsledek Tvrzení 2.6 uvedeného dále). Nechť tedy $f \leq g$ na D. Pro $0 \leq f \leq g$ tvrzení zřejmě platí. Jsou-li $f \leq g$ obecné, přejdeme od nich k funkcím f^+, f^-, g^+ a g^-, které jsou nezáporné. Pro tyto funkce platí $f^+ \leq g^+$ a $f^- \geq g^-$, a tedy

$$\int_D f^+ \,\mathrm{d}\mu \leq \int_D g^+ \,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_D f^- \,\mathrm{d}\mu \geq \int_D g^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Odtud dostáváme

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu = \int_D f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_D f^- \,\mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_D g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_D f^- \,\mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_D g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_D g^- \,\mathrm{d}\mu = \int_D g \,\mathrm{d}\mu.$$

e) Budeme-li aplikovat **d)** na dvojice funkcí $|f| \leq g$, $f^+ \leq |f|$, $f^- \leq |f|$, dostaneme

$$\infty > \int_D g \,\mathrm{d}\mu \geq \int_D |f| \,\mathrm{d}\mu \geq \begin{cases} \int_D f^+ \,\mathrm{d}\mu, \\ \int_D f^- \,\mathrm{d}\mu. \end{cases}$$

Funkce f má tedy integrál a ten je konečný. $\square$

Absolutní hodnotu v tvrzení 2.1,c) není možné vynechat a opačná implikace v tvrzení 2.1,d) neplatí. (Najděte vhodné protipříklady jako cvičení.) Platí ale toto:

Důsledek 2.2: a) Jestliže $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou měřitelnou množinu $E \subset D \in \mathcal{S}$, pak $f = 0$ s.v. na D.

b) Nechť f a g jsou integrovatelné na $D \in \mathcal{S}$. Jestliže $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou množinu $E \subset D$, pak $f \leq g$ s.v. na D.

Důkaz: **a)** Pro $E^+ = \{x \in D \,|\, f(x) > 0\} \in \mathcal{S}$ máme

$$0 = \int_{E^+} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{E^+} f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_{E^+} |f^+| \,\mathrm{d}\mu.$$

To podle Tvrzení 2.1,c) znamená, že funkce $f^+ = 0$ s.v. na E^+. Přitom z definice E^+ je funkce f^+ na $X \setminus E^+$ nulová. Celkem tak dostáváme $f^+ = 0$ s.v. na D. Obdobně dokážeme $f^- = 0$ s.v. na D.

b) Označme $h = (f - g)^+$. Chceme ukázat, že $h = 0$ s.v. na D. Položme tentokrát $E^+ = \{x \in D \,|\, h(x) > 0\} \in \mathcal{S}$. Protože $h \geq 0$, máme při využití linearity integrálu (viz Věta 2.5 dále)

$$0 \leq \int_D |h| \,\mathrm{d}\mu = \int_D h \,\mathrm{d}\mu = \int_{E^+} h \,\mathrm{d}\mu = \int_{E^+} (f - g) \,\mathrm{d}\mu = \int_{E^+} f \,\mathrm{d}\mu - \int_{E^+} g \,\mathrm{d}\mu \leq 0, \qquad \text{tj.} \quad \int_D |h| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

To ale podle Tvrzení 2.1,c) znamená, že $h = 0$ s.v. na D, čili $f \leq g$ s.v. na D. $\square$

Věta 2.3 (Leviho o monotonní konvergenci): Nechť $(f_j)_{j=1}^\infty$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ a $f = \lim_{j\to\infty} f_j$. Potom

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Poznámka: Předpoklad $0 \leq f_1$ ve Větě 2.3 lze nahradit předpokladem $\int_D f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$.

Důkaz: Dokážeme jen jednodušší nerovnost

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Protože $f_j \nearrow f$, kdykoliv pro s jednoduchou platí $0 \leq s \leq f_j$ pro nějaké j, platí pro ni také $0 \leq s \leq f_n$ pro každé $n \geq j$ a $0 \leq s \leq f$. Tedy pro každé j a $n > j$ máme

$$\int_D f_j \,\mathrm{d}\mu \leq \int_D f_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{a} \qquad \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu \leq \int_D f \,\mathrm{d}\mu$$

(v definici integrálu vždy bereme vlevo supremum přes obecně větší množinu). Vzhledem k první nerovnosti je posloupnost $\left(\int_D f_j \,\mathrm{d}\mu\right)_{j=1}^\infty$ neklesající, a má tak limitu. Z druhé nerovnosti pak dostáváme, že je tato limita nejvýše rovna $\int_D f \,\mathrm{d}\mu$. $\square$

Důsledek 2.4 (Spojitá závislost na integračním oboru): Nechť $D, E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = D$ a f je nezáporná měřitelná funkce na D. Potom

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Důkaz: Leviho větu 2.3 použijeme na funkce $f_k = f\,\chi_{E_k}$. $\square$

Věta 2.5 (Linearita integrálu):

a) Nechť funkce f a g jsou měřitelné na $D \in \mathcal{S}$. Potom

$$\int_D (f + g) \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_D f \,\mathrm{d}\mu + \int_D g \,\mathrm{d}\mu\,,$$

má-li pravá strana smysl.

b) Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Pokud má f integrál, pak

$$\int_D \tau f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \tau \int_D f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Důkaz: Část **a)** dokážeme v několika krocích. Předpokládejme nejdříve, že f a g jsou nezáporné jednoduché funkce na D,

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i} \qquad \text{a} \qquad g = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j},$$

kde $\{A_1, \dots, A_m\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$ tvoří rozklady množiny D. Systém množin $\{A_i \cap B_j\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ tvoří také rozklad množiny D a na množině D platí

$$f + g = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \chi_{(A_i \cap B_j)} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{m} \chi_{(A_i \cap B_j)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{(A_i \cap B_j)}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \int_D (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(A_i)} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(B_j)} \\ &= \int_D f\,\mathrm{d}\mu + \int_D g\,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Nechť jsou nyní f a g nezáporné měřitelné funkce na D. Podle Věty 1.19 existují posloupnosti $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ nezáporných jednoduchých funkcí na D takových, že $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$ na D. Zřejmě $(f_n + g_n) \nearrow (f + g)$ na D. Aplikovací Leviho věty o monotonní konvergenci (Věta 2.3) dostáváme

$$\int_D f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n\,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_D g\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D g_n\,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_D (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu.$$

Protože jsou funkce f_n a g_n jednoduché, máme podle první části důkazu $\int_D (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_D f_n\,\mathrm{d}\mu + \int_D g_n\,\mathrm{d}\mu$, a tedy

$$\int_D (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} (\int_D f_n\,\mathrm{d}\mu + \int_D g_n\,\mathrm{d}\mu).$$

Integrály $\int_D f_n\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_D g_n\,\mathrm{d}\mu$ jsou pro každé $n \in \mathbb{N}$ nezáporné, tedy jsou nezáporné i jejich limity, které tím umíme sečíst a můžeme aplikovat větu o limitě součtu. Tím dostaneme požadovanou rovnost pro případ nezáporných měřitelných funkcí.

Uvažujme nyní obecné měřitelné funkce f a g, pro které má součet $\int_D f\,\mathrm{d}\mu + \int_D g\,\mathrm{d}\mu$ smysl. Protože má součet integrálů smysl, jsou integrály $\int_D f\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_D g\,\mathrm{d}\mu$ definovány a navíc jsou nutně oba $> -\infty$ nebo oba $< +\infty$. Budeme předpokládat, že nastává první možnost. Z definice integrálu jsou pak oba integrály $\int_D f^-\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_D g^-\,\mathrm{d}\mu$ konečné. To znamená, že funkce f^- a g^- jsou konečné skoro všude a funkce f a g nabývají skoro všude hodnot větších než $-\infty$. Tím je ovšem skoro všude definován součet $f+g$ a tento součet je také skoro všude $> -\infty$. Protože integrály přes množiny, které se liší o množinu míry nula, jsou stejné, můžeme v dalším bez újmy na obecnosti pro jednoduchost předpokládat, že funkce f, g a $f+g$ mají výše zmíněné vlastnosti všude na D. Pro součet funkcí f a g platí $f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$ a také $f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$. Tedy

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Podle našeho předpokladu nabývají funkce f^-, g^- a $(f+g)^-$ jen konečných hodnot, tedy je můžeme přičít k oběma stranám uvedené rovnosti. Dostaneme tak

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-.$$

Nyní máme na obou stranách rovnosti součty nezáporných měřitelných funkcí a pro ty už máme dokázáno, že integrál z jejich součtu je roven součtu jejich integrálů. Tedy

$$\int_D (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu + \int_D f^-\,\mathrm{d}\mu + \int_D g^-\,\mathrm{d}\mu = \int_D f^+\,\mathrm{d}\mu + \int_D g^+\,\mathrm{d}\mu + \int_D (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu.$$

Integrály ze záporných částí funkcí f, g a $f+g$ jsou konečné, tedy je můžeme od obou stran poslední rovnosti odečíst. Dostaneme tak

$$\int_D (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu - \int_D (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu = (\int_D f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_D f^-\,\mathrm{d}\mu) + (\int_D g^+\,\mathrm{d}\mu - \int_D g^-\,\mathrm{d}\mu),$$

neboli
$$\int_D (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_D f\,\mathrm{d}\mu + \int_D g\,\mathrm{d}\mu,$$
což jsme potřebovali dokázat. Kdyby byly oba integrály $\int_D f\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_D g\,\mathrm{d}\mu$ menší než $+\infty$, postupovali bychom analogicky. Tím je tvrzení **a)** dokázáno.

Podívejme se nyní na tvrzení **b)**. Pro $\tau = 0$ rovnost triviálně platí. Uvažujme nyní $\tau > 0$, $f \geq 0$. Nechť pro jednoduchou funkci s platí $s = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j}$ a $0 \leq s \leq f$. Pak pro jednoduchou funkci $\tau s = \sum_{j=1}^n (\tau\beta_j)\chi_{B_j}$ máme $0 \leq \tau s \leq \tau f$, tedy
$$\int_D \tau f\,\mathrm{d}\mu \geq \int_D \tau s\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n (\tau\beta_j)\mu(B_j) = \tau \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j) = \tau \int_D s\,\mathrm{d}\mu.$$
Odtud
$$\int_D \tau f\,\mathrm{d}\mu \;\geq\; \sup_{\substack{0\leq s\leq f\\ s \text{ jednoduchá}}} \Big(\tau \int_D s\,\mathrm{d}\mu\Big) \;=\; \tau \sup_{\substack{0\leq s\leq f\\ s \text{ jednoduchá}}} \Big(\int_D s\,\mathrm{d}\mu\Big) \;=\; \tau \int_D f\,\mathrm{d}\mu.$$
Opačnou nerovnost získáme tak, že výše uvedený postup použijeme pro $\tilde\tau = \frac{1}{\tau}$ a $\tilde f = \tau f$. Dostaneme tím odhad
$$\tau \int_D f\,\mathrm{d}\mu = \tau \int_D \tilde\tau \tilde f\,\mathrm{d}\mu \;\geq\; \tau\tilde\tau \int_D \tilde f\,\mathrm{d}\mu = \int_D \tilde f\,\mathrm{d}\mu = \int_D \tau f\,\mathrm{d}\mu.$$
Pokud bude $\tau > 0$ a f obecná měřitelná funkce, využijeme toho, že
$$(\tau f)^+ = \tau f^+, \qquad (\tau f)^- = \tau f^-,$$
přičemž funkce f^+ a f^- jsou nezáporné měřitelné. Konečně případ $\tau < 0$ převedeme pomocí vztahů
$$(\tau f)^+ = \Big(\big(\underbrace{-\tau}_{>0}\big)(-f)\Big)^+ = (-\tau)\,(-f)^+ = (-\tau)f^- \qquad \text{a} \qquad (\tau f)^- = \;\dots\; = (-\tau)f^+$$
na už vyřešený případ kladného násobku. $\square$

Tvrzení 2.6: Nechť $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cup D_2 = D$. Pak
$$\int_D f\,\mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f\,\mathrm{d}\mu \;+\; \int_{D_2} f\,\mathrm{d}\mu\,,$$
pokud má některá strana smysl.

Poznámka: Všimněte si, že podle tohoto tvrzení existence integrálu vlevo stačí k tomu, aby existovaly oba integrály vpravo a byl definován jejich součet. V první části věty o linearitě integrálu existence integrálu součtu dvou funkcí ještě nezaručovala, že integrály obou funkcí budou existovat a že je bude možné sečíst. Věta o linearitě integrálu ale mluví o podstatně obecnějších funkcích, než na které ji budeme aplikovat v důkazu našeho tvrzení.

Důkaz: a) Nechť je nejdřív definován součet vpravo. Pak podle Věty 2.5 o linearitě integrálu
$$\int_{D_1} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f\,\mathrm{d}\mu = \int_D f\chi_{D_1}\,\mathrm{d}\mu + \int_D f\chi_{D_2}\,\mathrm{d}\mu = \int_D \big(f\chi_{D_1} + f\chi_{D_2}\big)\,\mathrm{d}\mu$$
$$= \int_D f\big(\chi_{D_1} + \chi_{D_2}\big)\,\mathrm{d}\mu = \int_D f\chi_D\,\mathrm{d}\mu = \int_D f\,\mathrm{d}\mu.$$
Integrál vlevo je tedy definován a rovnost platí.

b) Nechť je nyní definován integrál $\int_D f\,\mathrm{d}\mu$. Protože jsou funkce f^+ a f^- nezáporné, jsou definovány integrály $\int_{D_1} f^+\,\mathrm{d}\mu$, $\int_{D_2} f^+\,\mathrm{d}\mu$, $\int_{D_1} f^-\,\mathrm{d}\mu$, $\int_{D_2} f^-\,\mathrm{d}\mu$ a jsou nezáporné. Tedy jsou podle části a) důkazu také definovány součty $\int_{D_1} f^\pm\,\mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f^\pm\,\mathrm{d}\mu = \int_D f^\pm\,\mathrm{d}\mu$ a platí
$$\int_D f\,\mathrm{d}\mu = \int_D f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_D f^-\,\mathrm{d}\mu \overset{\text{a)}}{=} \Big(\int_{D_1} f^+\,\mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f^+\,\mathrm{d}\mu\Big) - \Big(\int_{D_1} f^-\,\mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f^-\,\mathrm{d}\mu\Big).$$

Protože je výraz vpravo definován, musí být oba integrály funkce f^+ nebo oba integrály funkce f^- konečné. Tedy integrály $\int_{D_1} f\,\mathrm{d}\mu$ a $\int_{D_2} f\,\mathrm{d}\mu$ existují a nejsou to nekonečna různých znamének. To ale znamená, že můžeme výraz vpravo přezávorkovat, čímž dostaneme požadovanou rovnost

$$\int_D f\,\mathrm{d}\mu = \Big(\int_{D_1} f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_{D_1} f^-\,\mathrm{d}\mu\Big) + \Big(\int_{D_2} f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_{D_2} f^-\,\mathrm{d}\mu\Big) = \int_{D_1} f\,\mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Nyní nás budou zajímat funkce, jejichž integrály konvergují. Položme

$$(\mathcal{L}^1 =)\ \mathcal{L}^1(\mu) \ = \ \Big\{ f \mid \int_X f\,\mathrm{d}\mu \ \text{ konverguje} \Big\}.$$

Pro $\mathcal{L}^1(\mu)$ z předchozího dostáváme:

Tvrzení 2.7 (Vlastnosti $\mathcal{L}^1(\mu)$):

a) Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu$.

b) Je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak $|f| < \infty$ s.v. na X.

c) Je-li $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (tj. $\mathcal{L}^1(\mu)$ je lineární prostor) a platí

$$\int_X (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu \ = \ \alpha \int_X f\,\mathrm{d}\mu \ + \beta \int_X g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

d) Pro $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ je $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

e) Je-li f měřitelná, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $|f| \le g$ s.v., pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Důkaz: Části a), b), c) a e) jsou postupně důsledky Poznámky 1) za definicí integrálu, Tvrzení 2.1,b), Věty 2.5 a Tvrzení 2.1,e). K důkazu d) přepíšeme nejdříve $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\,(f + g + |f-g|)$, $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}\,(f + g - |f-g|)$ a pak použijeme vlastnosti a) a c) prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$. □

2.2 Záměna limity a integrálu

(Mezi tyto věty patří také Leviho věta o monotonní konvergenci – viz Věta 2.3)

Vsuvka: Limes superior a limes inferior posloupnosti $(a_j)_{j=1}^\infty$ jsou definovány vztahy

$$\liminf_{j\to\infty}\ a_j \ = \ \lim_{j\to\infty} \Big(\inf_{i\ge j}\ \{a_i\}\Big), \quad \limsup_{j\to\infty}\ a_j \ = \ \lim_{j\to\infty} \Big(\sup_{i\ge j}\ \{a_i\}\Big)\,.$$

Tedy zřejmě vždy platí

$$\liminf_{j\to\infty}\ a_j \ \le \ \limsup_{j\to\infty}\ a_j$$

a rovnost nastává právě tehdy, když existuje limita posloupnosti $(a_j)_{j=1}^\infty$. V tom případě jsou jí $\liminf_{j\to\infty} a_j$ a $\limsup_{j\to\infty} a_j$ rovny, tedy

$$\limsup_{j\to\infty} a_j = \liminf_{j\to\infty} a_j = a \quad \text{právě tehdy, když} \quad \text{existuje} \quad \lim_{j\to\infty} a_j = a.$$

Lemma 2.8 (Fatouovo): Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $(f_j)_{j=1}^\infty$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Pak

$$\int_D \liminf_{j\to\infty} f_j\,\mathrm{d}\mu \ \le \ \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Důkaz: Funkce $\liminf_{j\to\infty} f_j$ je podle Věty 1.17 měřitelná. Pro $j \in \mathbb{N}$ položme $g_j = \inf\{f_i \mid i \ge j\}$. Funkce g_j jsou nezáporné měřitelné, tedy mají integrál. Dále pro všechna $l \ge j$ platí $g_j \le f_l$, tedy z monotonie integrálu dostáváme

$$\int_D g_j\,\mathrm{d}\mu \ \le \ \int_D f_l\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pro každé } \ l \ge j.$$

To ale znamená, že

$$\int_D g_j \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \inf_{l\ge j} \int_D f_l \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Protože pro posloupnost funkcí $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ platí $0 \le g_1 \le g_2 \le \dots$ a z definice limes inferior máme

$$\lim_{j\to\infty} g_j \;=\; \liminf_{j\to\infty} f_j,$$

můžeme použít Leviho větu 2.3 o monotonní konvergenci a dostaneme

$$\int_D \liminf_{j\to\infty} f_j \;\mathrm{d}\mu \;=\; \int_D \lim_{j\to\infty} g_j \;\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_D g_j \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \lim_{j\to\infty} \Big(\inf_{l\ge j} \int_D f_l \,\mathrm{d}\mu \Big) \;=\; \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Tím jsme lemma dokázali. $\square$

Věta 2.9 (Lebesgueova o majorizované konvergenci): Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, f_j, $j = 1, 2, \dots,$ jsou měřitelné funkce na D. Nechť posloupnost $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ konverguje s.v. na D k f a existuje integrovatelná (na D) funkce g (tzv. **majoranta**) tak, že

$$|f_j(x)| \;\le\; g(x) \qquad \text{pro každé } j \in \mathbb{N} \text{ a s.v. } x \in D\,.$$

Potom

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Důkaz: a) Předpokládejme, že $f_j \to f$ na D všude a že jsou funkce konečné. Podle Tvrzení 2.1,e) jsou funkce f_j, f integrovatelné. Z předpokladů věty jsou funkce $g + f_j$, $g - f_j$ nezáporné, $(g + f_j) \to g + f$, $(g - f_j) \to g - f$. Tedy podle Fatouova lemmatu 2.8 a vsuvky na začátku tohoto odstavce máme

$$\underbrace{\int_D \underbrace{\liminf_{j\to\infty} (g + f_j)}_{g+f} \;\mathrm{d}\mu}_{\int_D g \,\mathrm{d}\mu \;+\; \int_D f \,\mathrm{d}\mu} \quad\le\quad \underbrace{\liminf_{j\to\infty} \quad \underbrace{\int_D (g + f_j) \;\mathrm{d}\mu}_{\int_D g \,\mathrm{d}\mu + \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu}}_{\int_D g \,\mathrm{d}\mu \;+\; \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu}\;,$$

tedy

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;\le\; \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Podobně dostaneme

$$\underbrace{\int_D \underbrace{\liminf_{j\to\infty} (g - f_j)}_{g-f} \;\mathrm{d}\mu}_{\int_D g \,\mathrm{d}\mu \;-\; \int_D f \,\mathrm{d}\mu} \quad\le\quad \underbrace{\liminf_{j\to\infty} \quad \underbrace{\int_D (g - f_j) \;\mathrm{d}\mu}_{\int_D g \,\mathrm{d}\mu - \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu}}_{\int_D g \,\mathrm{d}\mu \;-\; \limsup_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu}\;,$$

odkud vyplývá, že

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;\ge\; \limsup_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Kombinace obou předchozích výsledků a vztah mezi limes superior a limes inferior nám dávají

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;\ge\; \limsup_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu \;\ge\; \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu \;\ge\; \int_D f \,\mathrm{d}\mu.$$

Tedy

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \limsup_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \liminf_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

b) Pokud $f_j \to f$, $|f_j| \le g$ na $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, $\mu(D \setminus D') = 0$ a $|g| < \infty$ na $D'' \in \mathcal{S}$, $D'' \subset D$, $\mu(D \setminus D'') = 0$ (z integrovatelnosti g taková D'' existuje), pak $f_j \to f$ na $D' \cap D''$, $|f_j| \le g$ na $D' \cap D''$, kde $\mu(D \setminus (D' \cap D'')) = \mu((D \setminus D') \cup (D \setminus D'')) = 0$. Tedy podle **a)**

$$\int_D f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_{D' \cap D''} f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_{D' \cap D''} f_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Tím jsme důkaz dokončili. $\square$

Poznámka: Rovnost $\int_D \left(\lim_{j\to\infty} f_j\right) \mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \left(\int_D f_j \,\mathrm{d}\mu\right)$ obecně neplatí. Nechť například

$$D = (0,1), \quad f_j = j^2\,\mathrm{e}^{-jx}.$$

Pak máme $\lim_{j\to\infty} f_j = 0$, tedy

$$\int_D \lim_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Přitom ale platí

$$\int_D f_j \,\mathrm{d}\mu = \int_0^1 j^2\,\mathrm{e}^{-jx}\,\mathrm{d}x \overset{y=-jx}{=} -j \int_0^{-j} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = j \int_{-j}^0 \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y = j(1 - \mathrm{e}^{-j}) \to \infty \quad \text{pro } j \to \infty.$$

Tedy

$$\int_D \lim_{j\to\infty} f_j \,\mathrm{d}\mu \;\neq\; \lim_{j\to\infty} \int_D f_j \,\mathrm{d}\mu.$$

Problém je tu v tom, že zde nemáme ani monotonní, ani majorizovanou konvergenci.

Věta 2.10 (Leviho pro řady): Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $g_j \ge 0$, $j = 1, 2, \ldots$, jsou funkce měřitelné na D. Pak

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} g_j \;\mathrm{d}\mu \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_D g_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Důkaz: Označme

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j \ge 0 \qquad \text{a} \qquad f = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$$

(protože jsou funkce g_j nezáporné, jejich součet, tedy funkce f, existuje). Protože $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots$ a $f = \lim_{k\to\infty} f_k$, máme podle Leviho věty 2.3 o monotonní konvergenci

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} g_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_D f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_D f_k \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_D \sum_{j=1}^{k} g_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_D g_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_D g_j \,\mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Věta 2.11 (Lebesgueova pro řady): Nechť $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$ g je integrovatelná funkce na D. Jestliže

$$\left|\sum_{j=1}^{n} h_j(x)\right| \;\le\; g(x) \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

a řada $\sum_{j=1}^{\infty} h_j$ konverguje s.v. na D, pak

$$\int_D \sum_{j=1}^{\infty} h_j \,\mathrm{d}\mu \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \int_D h_j \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Důkaz: Postupujeme stejně jako v důkazu Leviho věty pro řady, jen převádíme na Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci. $\square$

2.3 Střední hodnota náhodné veličiny

Definice : Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor (tj. je to prostor s mírou, v kterém $P(\Omega) = 1$). Pak

- $\mathcal{A}$-měřitelnou funkci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazýváme **náhodná veličina**,
- integrál z náhodné veličiny X vzhledem k míře P (pokud existuje) nazýváme **střední hodnota** náhodné veličiny X a značíme jej EX, tj.
$$EX = \int_\Omega X \, \mathrm{d}P \; \Big(= \int_\Omega X(\omega) \, \mathrm{d}P(\omega) \Big),$$
- **distribuční funkci** F_X náhodné veličiny X definujeme vztahem
$$F_X(x) = P(\{X \le x\}) \; \Big(= P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \le x\}) \Big), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Věta 2.12* (Čebyševova nerovnost) : Nechť X je náhodná veličina s konečným rozptylem $\operatorname{var} X = E(X - EX)^2$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí
$$P(\,|X - EX| \ge \varepsilon\,) \;\le\; \frac{\operatorname{var} X}{\varepsilon^2}\,.$$

Důkaz: Označme si pro zpřehlednění zápisu $Y = |X - EX|$. Pak můžeme psát
$$\operatorname{var} X = E(X - EX)^2 = EY^2 = \int_\Omega Y^2 \, \mathrm{d}P \ge \int_{\{\omega | Y(\omega) \ge \varepsilon\}} Y^2 \, \mathrm{d}P \ge \int_{\{\omega | Y(\omega) \ge \varepsilon\}} \varepsilon^2 \, \mathrm{d}P = \varepsilon^2 P(Y \ge \varepsilon) = \varepsilon^2 P(\,|X - EX| \ge \varepsilon\,).$$
První nerovnost je tu důsledkem nezápornosti Y, druhá monotonie integrálu – viz Tvrzení 2.1 a), d). $\square$

Střední hodnota diskrétní a absolutně spojité náhodné veličiny

Definice : Řekneme, že náhodná veličina je **diskrétní** (má **diskrétní rozdělení**), pokud existují posloupnost reálných čísel $(x_n)_{n \in \mathcal{N}_0}$ $(\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{N})$ a posloupnost kladných čísel $(p_n)_{n \in \mathcal{N}_0}$ takové, že
$$\sum_{n \in \mathcal{N}_0} p_n = 1$$
a
$$p_n = P\big(\{X = x_n\}\big) \; \Big(= P(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x_n\}) \Big).$$

Poznámka: Pro distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny X zřejmě máme
$$F_X(x) = P(\{X \le x\}) = \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ x_n \le x}} p_n.$$

Platí: Jestliže je X diskrétní náhodná veličina, pak
$$EX \;=\; \sum_{n \in \mathcal{N}_0} x_n \, p_n.$$

Důkaz: Pokud je $X \ge 0$, pak zřejmě
$$X = \sum_{n \in \mathcal{N}_0} x_n \chi_{\{X = x_n\}}.$$
Pro $K \in \mathbb{N}$ položme
$$X_K = \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ n \le K}} x_n \chi_{\{X = x_n\}}.$$
Pak $0 \le X_K \nearrow X$ a podle Leviho věty 2.3 o monotonní konvergenci máme
$$\int_\Omega X \, \mathrm{d}P = \lim_{K \to \infty} \int_\Omega X_K \, \mathrm{d}P = \lim_{K \to \infty} \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ n \le K}} x_n \int_\Omega \chi_{\{X = x_n\}} \, \mathrm{d}P = \lim_{K \to \infty} \sum_{\substack{n \in \mathcal{N}_0 \\ n \le K}} x_n \underbrace{P\big(\{X = x_n\}\big)}_{p_n} = \sum_{n \in \mathcal{N}_0} x_n \, p_n.$$
Náhodnou veličinu X, která není nezáporná, si přepíšeme ve tvaru $X = X^+ - X^-$ a na X^+ a X^- aplikujeme předchozí postup. $\square$

Definice : Řekneme, že náhodná veličina je **absolutně spojitá** (má **absolutně spojité rozdělení**), pokud existuje nezáporná borelovsky měřitelná funkce f taková, že

$$F_X(x) = P(\{X \le x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkci f pak nazýváme **hustota** náhodné veličiny X.

Platí: Jestliže je X absolutně spojitá náhodná veličina, pak

$$EX \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz: Dá se ukázat, že pokud je X absolutně spojitá náhodná veličina, pak pro každou borelovskou funkci Φ platí

$$\underbrace{\int_\Omega (\Phi\circ X)\,\mathrm{d}P}_{\displaystyle\int_\Omega \Phi(X(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega)} \;=\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Funkce Φ se nazývá borelovská, jestliže pro každou borelovskou množinu G je $\Phi^{-1}(G)$ borelovská množina.) Tedy speciálně pro $\Phi : t \mapsto t$ dostáváme

$$EX = \int_\Omega X\,\mathrm{d}P = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka: Podobně jako v předchozím důkazu dostaneme pro náhodnou veličinu $Y = X^k$ a funkci $\Phi : t \mapsto t^k$

$$EY = \int_\Omega Y\,\mathrm{d}P = \int_\Omega X^k\,\mathrm{d}P = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tedy

$$EX^k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

2.4 Fubiniova věta v $\mathbb{R}^N$

Značení: Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ a $N = n + k$.

- Pro $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ označíme

$$(x, y) \;:=\; (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^N\,.$$

- Je-li $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ měřitelná množina, f měřitelná funkce na M, pak používáme značení

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;:=\; \int_M f\;\mathrm{d}\lambda_{n+k}\,.$$

- Je-li $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$, pak pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^k$ položíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in \mathbb{R}^k \,\big|\, (x, y) \in M\},\\ M^{*,y} &= \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, (x, y) \in M\}. \end{aligned}$$

  Množinám $M^{x,*}$ a $M^{*,y}$ říkáme **řezy**.

Tvrzení 2.16* : Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ je $\mathfrak{M}_{n+k}$-měřitelná množina. Pak pro každá $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^k$ je množina $M^{x,*}$ $\mathfrak{M}_k$-měřitelná a množina $M^{*,y}$ $\mathfrak{M}_n$-měřitelná, funkce $x \mapsto \lambda_k(M^{x,*})$ a $y \mapsto \lambda_n(M^{*,y})$ jsou měřitelné a

$$\lambda_{n+k}(M) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_k(M^{x,*})\,\mathrm{d}\lambda_n \;\;= \int_{\mathbb{R}^k} \lambda_n(M^{*,y})\,\mathrm{d}\lambda_k.$$

Poznámka: V předchozím tvrzení integrujeme přes $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{R}^k$ a ne přes množinu $\{x \in \mathbb{R}^n \mid M^{x,*} \neq \emptyset\}$ resp. $\{y \in \mathbb{R}^k \mid M^{*,y} \neq \emptyset\}$, protože měřitelnost množiny M nám měřitelnost těchto množin nezaručuje.

Věta 2.19 (Fubiniova v $\mathbb{R}^N$): Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ je měřitelná množina a f je funkce měřitelná na M, která má integrál $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_{n+k}$. Potom pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je definován integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x,y) \underbrace{\mathrm{d}\lambda_k(y)}_{\text{píšeme: } \mathrm{d}y}$$

a platí

$$\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_{n+k} = \int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}\lambda_n \,,$$

neboli

$$\int_M f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{M^{x,*}} f(x,y) \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x \,.$$

Poznámka: Ve větě 2.19 není podstatné, že $x_1, \ldots, x_n$ je právě prvních n složek bodu z $\mathbb{R}^{n+k}$. Stejným způsobem bychom za předpokladu existence integrálu $\int_M f \,\mathrm{d}\lambda_{n+k}$ (ten je ve Větě 2.19 podstatný) dostali také

$$\int_M f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{M^{*,y}} f(x,y) \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}y.$$

Mohli bychom tedy zaměnit pořadí inegrace:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{M^{x,*}} f(x,y) \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{M^{*,y}} f(x,y) \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}y.$$

Poznámka: Je-li $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$, $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, kde M_i jsou měřitelné množiny, f_i jsou funkce měřitelné na M_i, a existuje integrál $\int_M f \,\mathrm{d}x$, pak z Fubiniovy věty dostáváme

$$\int_M f \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{M_1} \Big(\int_{M_2 \times \ldots \times M_n} f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \;\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \Big) \,\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_{M_1} \Big(f_1(x_1) \int_{M_2 \times \ldots \times M_n} f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \;\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \Big) \,\mathrm{d}x_1 = \int_{M_1} f_1(x_1) \,\mathrm{d}x_1 \int_{M_2 \times \ldots \times M_n} f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \;\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

$$= \ldots = \int_{M_1} f_1(x_1) \,\mathrm{d}x_1 \int_{M_2} f_2(x_2) \,\mathrm{d}x_2 \ldots \int_{M_n} f_n(x_n) \,\mathrm{d}x_n$$

2.5 Věta o substituci

Definice: Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n) : G \to \mathbb{R}^n$ má v bodě $\tilde{x} \in G$ všechny (první) parciální derivace. Pak matici

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

se nazýváme **Jacobiho matice zobrazení** ψ v bodě $\tilde{x}$. Determinant této matice nazýváme **Jacobián zobrazení** ψ v bodě $\tilde{x}$ a značíme ho $J_\psi(\tilde{x})$. Existuje-li lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(\tilde{x} + h) - \psi(\tilde{x}) - L(h)}{\|h\|} = 0 \,,$$

řekneme, že ψ má v bodě $\tilde{x}$ **(Frechetovu) derivaci**. V tomto případě je L reprezentováno Jacobiho maticí a značí se $\psi'(\tilde{x})$. Zobrazení ψ nazveme **regulární na** G, jestliže má na G spojitou derivaci (tj. všechny jeho parciální derivace jsou na G spojité) a $J_\psi(x) \neq 0$ pro každé $x \in G$.

Věta 2.20 (O substituci): Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \psi(G)$. Potom

$$\int_M u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi^{-1}(M)} u(\psi(t))\,|J_\psi(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Často používané substituce

Polární souřadnice

$G = \big\{(r,\varphi)\,\big|\, r > 0, \varphi \in (-\pi,\pi)\big\}$

$$\begin{array}{rclcl} x &=& \psi_1(r,\varphi) &=& r\cos\varphi \\ y &=& \psi_2(r,\varphi) &=& r\sin\varphi \end{array} \qquad \psi = (\psi_1,\psi_2)$$

Platí:

- $\psi(G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,|\, x \le 0\}$
- $J_\psi\big((r,\varphi)\big) = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \neq 0$ na G

  Zobrazení ψ je tedy na G regulární.
- ψ je prosté. Je-li totiž $(x,y) = \psi(r,\varphi)$, pak zřejmě $r = \sqrt{x^2+y^2}$. To nám ale dává pro φ podmínky $\varphi \in (-\pi,\pi)$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, z kterých je možné získat pro φ vyjádření $\varphi = 2\mathrm{arctg}\big(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\big)$

Sférické souřadnice

$G = \big\{(r,\varphi,\vartheta)\,\big|\, r > 0, \varphi \in (-\pi,\pi), \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big\}$

$$\begin{array}{rclcl} x &=& \psi_1(r,\varphi,\vartheta) &=& r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y &=& \psi_2(r,\varphi,\vartheta) &=& r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z &=& \psi_3(r,\varphi,\vartheta) &=& r\sin\vartheta \end{array} \qquad \psi = (\psi_1,\psi_2,\psi_3)$$

Platí:

- $\psi(G) = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(x,0,z)\,\big|\, x \le 0 \,\wedge\, z \in \mathbb{R}\big\}$
- $J_\psi\big((r,\varphi,\vartheta)\big) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta, & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta, & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta, & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta \neq 0$ na G

  (Ověřte jako cvičení.) Zobrazení ψ je tedy na G regulární.
- Zobrazení ψ je prosté. Dá se totiž ukázat, že $(x,y,z) = \psi(r,\varphi,\vartheta)$, kde $(r,\varphi,\vartheta) \in G$, právě když $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi = 2\mathrm{arctg}\big(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\big)$, $\vartheta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Poznámka: Úhel ϑ se někdy měří od kladné poloosy z. Pak

$G = \big\{(r,\varphi,\vartheta)\,\big|\, r > 0, \varphi \in (-\pi,\pi), \vartheta \in (0,\pi)\big\}$

$$\begin{array}{rclcl} x &=& \psi_1(r,\varphi,\vartheta) &=& r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &=& \psi_2(r,\varphi,\vartheta) &=& r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &=& \psi_3(r,\varphi,\vartheta) &=& r\cos\vartheta \end{array} \qquad J_\psi\big((r,\varphi,\vartheta)\big) = -r^2\sin\vartheta \neq 0$$

2.6 Integrály závislé na parametru

Věta 2.21 (Spojitost integrálu závislého na parametru): Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}$ a U je okolí bodu a. Nechť funkce $F : U \times D \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti

(a) pro **s.v.** $x \in D$ je funkce $F(\,.\,, x)$ spojitá v a,

(b) pro **všechna** $t \in U$ je funkce $F(t, \,.\,)$ měřitelná,

(c) existuje $g \in \mathcal{L}^1(D)$ tak, že pro **všechna** $t \in U$ je $|F(t, \,.\,)| \leq g$ **skoro všude** na D (tj. $|F(t, x)| \leq g(x)$ pro skoro všechna $x \in D$).

Potom pro **všechna** $t \in U$ je $F(t, \,.\,) \in \mathcal{L}^1(D)$ a funkce

$$G : t \mapsto \int_D F(t, \,.\,) \, \mathrm{d}\mu$$

je spojitá v a.

Poznámka: Spojitost funkce G v bodě a nám dává

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{t \to a} G(t) & = & G(a) \\ \| & & \| \\ \lim\limits_{t \to a} \displaystyle\int_D F(t, x) \, \mathrm{d}\mu(x) & = & \displaystyle\int_D F(a, x) \, \mathrm{d}\mu(x) \end{array}$$

Důkaz Věty 2.21: Použijeme Heineovu větu, podle které má funkce h v bodě a limitu A právě tehdy, když pro každou posloupnost $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(h)$ s $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} h(u_n) = A$. Uvažujme tedy libovolnou posloupnost $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset U$, pro kterou je $\lim_{n\to\infty} t_n = a$. Označme $f_n(x) = F(t_n, x)$, $f(x) = F(a, x)$. Pak podle předpokladu (a) pro skoro všechna $x \in D$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Dále z předpokladu (b) plyne, že všechny funkce f_n jsou měřitelné, a konečně na základě předpokladu (c) máme pro skoro všechna $x \in D$ a každé $n \in \mathbb{N}$ odhad $|f_n(x)| \leq g(x)$. Na posloupnost $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tak můžeme použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (Věta 2.9) a dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} G(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_D F(t_n, \,.\,) \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{V2.9}}{=} \int_D f \, \mathrm{d}\mu = \int_D F(a, \,.\,) \, \mathrm{d}\mu = G(a).$$

Protože $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ byla libovolná posloupnost v U s limitou a, je podle Heineovy věty $G(a)$ limitou funkce G v bodě a, tedy funkce G je v bodě a spojitá. $\square$

Věta 2.22 (Derivace integrálu podle parametru): Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $F : I \times D \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

(a) pro **s.v.** $x \in D$ je funkce $F(\,.\,, x)$ diferencovatelná na I,

(b) pro **všechna** $t \in I$ je funkce $F(t, \,.\,)$ měřitelná

(c) existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tak, že pro **všechna** $t \in I$ je

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} F(t, \,.\,) \right| \leq g \qquad \textbf{s.v. } \text{na } D,$$

(d) existuje $t_0 \in I$ tak, že $F(t_0, \,.\,) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Potom pro **všechna** $t \in I$ je $F(t, \,.\,) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, funkce

$$G : t \mapsto \int_D F(t, \,.\,) \, \mathrm{d}\mu$$

je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$G'(t) = \int_D \frac{\partial}{\partial t} F(t, \,.\,) \, \mathrm{d}\mu$$

$$\left(\text{tj.} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_D F(t, x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_D \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) \, \mathrm{d}\mu(x) \right).$$