

KAPITOLA 3: Prostory L^p

Definice: Necht' Y je lineární prostor. Pak zobrazení $\|\cdot\| : Y \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **norma**, jestliže pro každé $u, v \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

- (1) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$
- (2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**)
- (3) a) $\|u\| \geq 0$
b) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$ (nulový prvek v Y)

Dvojici $(Y, \|\cdot\|)$ pak nazveme **normovaný prostor**. (Obvykle píšeme pouze Y .)

Definice: Necht' (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou, u je μ -měřitelná funkce na X . Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ definujeme

$$\|u\|_p = \left(\int_X |u|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty = \text{ess sup } |u| := \inf \{ C \in \mathbb{R} \mid |u| \leq C \text{ s.v. na } X \}.$$

Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ položíme

$$\mathcal{L}^p(X) = \{ u \mid \|u\|_p < \infty, u \text{ je } \mu\text{-měřitelná} \}.$$

Poznámka: Hodnotě $\text{ess sup } f = \inf \{ C \in \mathbb{R} \mid f \leq C \text{ s.v. na } X \}$ se říká **podstatné** (esenciální) **supremum** funkce f na X . Je ho možné také vyjádřit ve tvaru $\text{ess sup } f = \inf_{\substack{E \in \mathcal{S} \\ \mu(E)=0}} \{ \sup_{x \in X \setminus E} f(x) \}$.

Poznámka: Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ $\|\cdot\|_p$ zřejmě splňují podmínky (1) a (3a) z definice normy. Protože $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, splňují $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$ také trojúhelníkovou nerovnost. Dokázat trojúhelníkovou nerovnost v případě $p \in (1, \infty)$ je složitější. Budeme k tomu potřebovat několik dalších nerovností.

Lemma 3.1 (Youngova nerovnost): Necht' $a, b \geq 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a^p = b^q$.

Důkaz: Předně si všimneme, že pro $p, q \in (1, \infty)$ platí rovnost $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ právě tehdy, když $\frac{1}{p-1} = q-1$, nebo také $q = \frac{p}{p-1}$. Tedy pro $x, y \geq 0$ máme

$$x^{p-1} = y \quad \text{právě tehdy, když} \quad x = y^{q-1}.$$

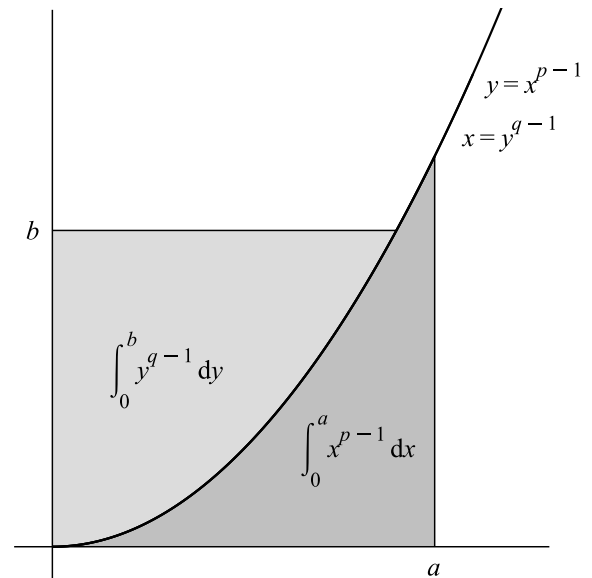
Dále

$$\frac{a^p}{p} = \left[\frac{x^p}{p} \right]_0^a = \int_0^a x^{p-1} dx,$$

$$\frac{b^q}{q} = \left[\frac{y^q}{q} \right]_0^b = \int_0^b y^{q-1} dy.$$

Z obrázku je už nyní zřejmé, že platí

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$



Rovnost přitom nastává právě tehdy, když $b = a^{p-1}$. Pak ale

$$b^q = a^{q(p-1)} = a^{\frac{p}{p-1}(p-1)} = a^p.$$

Tím jsme lemma dokázali. \square

Věta 3.2 (Hölderova nerovnost): Necht' u, v jsou μ -měřitelné funkce na X , $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q.$$

Pokud $\|uv\|_1 < \infty$, rovnost nastává, právě když existují čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, z nichž je alespoň jedno $\neq 0$, taková, že

$$c_1|u|^p = c_2|v|^q \quad \text{s.v. na } X.$$

Důkaz: Označme $s = \|u\|_p$, $r = \|v\|_q$. Pokud je $s \in \{0, \infty\}$ nebo $r \in \{0, \infty\}$, nerovnost zřejmě platí. Přitom v těchto případech může nastat rovnost (za našeho předpokladu $\|uv\|_1 < \infty$) jen tehdy, když $\|uv\|_1 = 0$ a $s = 0$ nebo $r = 0$. Pro $a \in (0, \infty)$ totiž máme $a \cdot \infty \in \{0, \infty\}$, přičemž nulu dostáváme jen pro $a = 0$. Je-li $s = 0$, pak $u = 0$ skoro všude, a tedy skoro všude platí $1 \cdot u = 0 \cdot v$. Analogicky, pokud $r = 0$, pak skoro všude $0 \cdot u = 1 \cdot v$.

Necht' nyní $s, r \in (0, \infty)$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že jsou funkce u a v nezáporné. Pak pro skoro všechna $x \in X$ dostáváme z Youngovy nerovnosti (Lemma 3.1)

$$\frac{u(x)}{s} \frac{v(x)}{r} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{u(x)}{s} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{v(x)}{r} \right)^q = \frac{(u(x))^p}{s^p p} + \frac{(v(x))^q}{r^q q}. \quad (1)$$

Nerovnost zintegrujeme a z monotonie integrálu dostaneme

$$\frac{1}{s r} \int_X u v \, d\mu \leq \frac{s^p}{s^p p} + \frac{r^q}{r^q q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tedy

$$\|uv\|_1 = \int_X u v \, d\mu \leq s r = \|u\|_p \|v\|_q.$$

Dokazovaná nerovnost je tedy splněna. Podívejme se ještě, jak je to s rovností. Ta nastává právě tehdy, když nastává rovnost v (1) pro skoro všechna $x \in X$, a to je podle Lemmatu 3.1 právě tehdy, když pro skoro všechna $x \in X$ platí

$$\left(\frac{u(x)}{s} \right)^p = \left(\frac{v(x)}{r} \right)^q.$$

Pak ale pro skoro všechna $x \in X$ máme

$$c_1(u(x))^p = c_2(v(x))^q,$$

kde $c_1 = \frac{1}{s^p}$, $c_2 = \frac{1}{r^q}$. Tím jsme větu dokázali. \square

Důsledek 3.3: Necht' $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in \mathcal{L}^p(X)$, $v \in \mathcal{L}^q(X)$. Pak $uv \in \mathcal{L}^1(X)$. Navíc

$$\left| \int_X uv \, d\mu \right| \leq \left(\int_X |u|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |v|^q \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Důkaz: Důsledek je kombinací Hölderovy nerovnosti s odhadem $|\int_X f \, d\mu| \leq \int_X |f| \, d\mu$. \square

Důsledek 3.4: Necht' $\mu(X) < \infty$ a $1 \leq p < q \leq \infty$. Pak $\mathcal{L}^q(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$ a existuje konstanta C taková, že

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{L}^q(X).$$

Důkaz: Uvažujme nejprve $q < \infty$. Necht' $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Položíme-li $\tilde{p} = \frac{q}{p}$, pak $\tilde{p} > 1$ a $1 - \frac{1}{\tilde{p}} = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$. Z Hölderovy nerovnosti tak dostáváme

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu \stackrel{V3.2}{\leq} \left(\int_X (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X |1|^{\frac{q}{q-p}} \, d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} = \\ &= \left(\left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \left(\mu(X) \right)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p \left(\mu(X) \right)^{\frac{q-p}{q}}. \end{aligned}$$

Pokud tedy položíme $C = \left(\mu(X) \right)^{\frac{q-p}{pq}}$, máme pro každé $f \in \mathcal{L}^q(X)$

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_q < \infty,$$

což ale znamená, že $f \in \mathcal{L}^p(X)$.

Nechť je nyní $q = \infty$. Pak

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \leq \int_X \text{ess sup } f^p \, d\mu = \int_X \|f\|_\infty^p \, d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X).$$

Tedy pro každé $f \in \mathcal{L}^q(X)$ platí

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_\infty < \infty,$$

kde $C = \left(\mu(X) \right)^{\frac{1}{p}}$, a tím také $f \in \mathcal{L}^p(X)$. \square

Věta 3.5 (Minkowského nerovnost): Jsou-li u, v μ -měřitelné funkce na X , $p \in (1, \infty)$, pak

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důkaz: Pro $\|u\|_p = 0$ nebo $\|v\|_p = 0$ je příslušná funkce nulová skoro všude, tedy nerovnost platí. Pokud je $\|u\|_p = \infty$ nebo $\|v\|_p = \infty$, je součet vpravo roven ∞ , tedy nerovnost opět platí. Konečně, je-li $\|u + v\|_p = 0$, nerovnost zřejmě také platí. Budeme tedy v dalším předpokládat, že $0 < \|u\|_p < \infty$, $0 < \|v\|_p < \infty$, $0 < \|u + v\|_p$.

Nejdříve ukážeme, že $\|u + v\|_p < \infty$. Pro skoro všechna $x \in X$ zřejmě máme

$$|u(x)| \leq \underbrace{\left(|u(x)|^p + |v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\geq 0}, \quad |v(x)| \leq \underbrace{\left(|u(x)|^p + |v(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\geq 0}.$$

Pokud nerovnosti sečteme a umocníme na p , dostaneme

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq \left(2(|u(x)|^p + |v(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \right)^p \leq 2^p (|u(x)|^p + |v(x)|^p).$$

Odtud už integrací přes X dostáváme

$$\|u + v\|_p^p \leq 2^p (\|u\|_p^p + \|v\|_p^p) < \infty.$$

Položíme $q = \frac{p}{p-1}$. Pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $(p-1)q = p$. Protože $|u + v|^p = |u + v|^{p-1} |u + v| \leq |u + v|^{p-1} (|u| + |v|)$, máme z Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned} \|u + v\|_p^p &= \int_X |u + v|^p \, d\mu \leq \int_X |u + v|^{p-1} |u| \, d\mu + \int_X |u + v|^{p-1} |v| \, d\mu \\ &\leq \left(\int_X |u + v|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |u|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |u + v|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_X |v|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_X |u + v|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_X |u|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |u + v|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_X |v|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\|u + v\|_p^p \right)^{\frac{p-1}{p}} (\|u\|_p + \|v\|_p) = \|u + v\|_p^{p-1} (\|u\|_p + \|v\|_p). \end{aligned}$$

Protože $0 < \|u + v\|_p < \infty$, máme odtud

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p,$$

což jsme chtěli dokázat. \square

Důsledek 3.6: Jestliže $u, v \in \mathcal{L}^p(X)$, $p \in \langle 1, \infty \rangle$, pak též $u + v \in \mathcal{L}^p(X)$.

Důkaz: Jde o bezprostřední důsledek Minkowského nerovnosti. \square

Ekvivalence na $\mathcal{L}^p(X)$, prostor $L^p(X)$

Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ splňuje $\|\cdot\|_p$ na $\mathcal{L}^p(X)$ podmínky (1), (2), (3a) z definice normy. Nemusí ale splňovat podmínku (3b), protože pro každou funkci f , která je nulová skoro všude, platí $\|f\|_p = 0$. Na $\mathcal{L}^p(X)$ proto uvažujeme ekvivalenci

$$u \sim v, \quad \text{jestliže } u = v \text{ s.v. na } X$$

(zřejmě $u \sim v \Rightarrow \|u\|_p = \|v\|_p$). Pro $u \in \mathcal{L}^p(X)$ označme jemu odpovídající třídu ekvivalence

$$[u] = \{v \in \mathcal{L}^p(X) \mid u \sim v\}$$

a položme

$$L^p(X) = \{[u] \mid u \in \mathcal{L}^p(X)\}.$$

Na $L^p(X)$ definujeme operace

$$\begin{aligned} [u] + [v] &= [u + v] \\ \alpha[u] &= [\alpha u] \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Měli bychom ověřit, že definice součtu a násobku jsou korektní, tj. jejich výsledek nezávisí na výběru reprezentantů jednotlivých tříd ekvivalence. Mějme pro případ součtu $\tilde{u} \in [u]$, $\tilde{v} \in [v]$. Pak existují množiny M, N míry nula takové, že $u = \tilde{u}$ na $X \setminus M$ a $v = \tilde{v}$ na $X \setminus N$. Tedy na $X \setminus (M \cup N)$, kde $\mu(M \cup N) = 0$, je $u + v = \tilde{u} + \tilde{v}$, tj. $[u + v] = [\tilde{u} + \tilde{v}]$. Podobně ověříme i korektnost definice násobku.

S výše uvedenými operacemi je $L^p(X)$ lineární prostor. Jeho nulovým prvkem je třída ekvivalence odpovídající funkci, která je na X identicky rovná nule. Budeme ho tedy značit $[0]$. Položíme-li pro $[u] \in L^p(X)$

$$\|[u]\|_p = \|u\|_p,$$

dostaneme normu na $L^p(X)$. Abychom ukázali, že jde opravdu o normu, stačí ověřit, že $\|[u]\|_p = 0$, pouze když $[u]$ je nulový prvek v $L^p(X)$. Ostatní vlastnosti normy jsou totiž přímým důsledkem vlastností $\|\cdot\|_p$ na $\mathcal{L}^p(X)$. Nechť tedy $\|[u]\|_p = 0$. Pak $\|u\|_p = 0$, což nastává podle Tvzení 2.1,c) právě tehdy, když funkce $|u|^p$ je skoro všude nulová, tedy u je ekvivalentní funkci identicky rovné nule na X . To ale přesně znamená, že $[u] = [0]$, což jsme potřebovali dokázat.

Na $L^p(X)$ můžeme také zavést (částečné) uspořádání, a to tak, že položíme

$$[u] \leq [v] \quad \text{právě tehdy, když } u \leq v \text{ skoro všude na } X.$$

Platí přitom, že $[u] \leq [v]$ právě tehdy, když existují funkce $\tilde{u} \in [u]$ a $\tilde{v} \in [v]$ takové, že $\tilde{u} \leq \tilde{v}$ všude na X . (Dokažte jako cvičení.)

Poznámka: Pro jednoduchost formulací se prvky prostorů $\mathcal{L}^p(X)$ a $L^p(X)$ obvykle nerozlišují zápisem ani pojmenováním. Mluvme-li tedy o funkci $f \in L^p(X)$, máme na mysli třídu $[f]$ ekvivalence \sim odpovídající funkci $f \in \mathcal{L}^p(X)$.

Důležitou vlastností prostorů $L^p(X)$ je jejich úplnost. Než si zformulujeme patričnou větu, musíme si ještě zavést některé pojmy.

Definice: Nechť Y je normovaný prostor. Řekněme, že posloupnost $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prvků z Y je **cauchyovská**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že } \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \quad \text{platí } \|y_m - y_n\| < \varepsilon.$$

Řekněme, že posloupnost $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konverguje v normě** k prvku $y \in Y$, jestliže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0,$$

tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \quad \text{platí } \|y_n - y\| < \varepsilon.$$

Definice: Normovaný prostor se nazývá **úplný**, jestliže je v něm každá cauchyovská posloupnost konvergentní (tj. konverguje v normě k nějakému *jeho* prvku).

Poznámka: Zřejmě každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Ne v každém normovaném prostoru však jsou všechny cauchyovské posloupnosti konvergentní.

Věta 3.7 (Úplnost prostorů L^p): Nechtě $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ je posloupnost prvků z $L^p(X)$, která je cauchyovská v normě $\|\cdot\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(X)$ tak, že $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f\| = 0$. Navíc existuje posloupnost $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vybraná z $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ taková, že $g_k \rightarrow f$ skoro všude na X .

Poznámka (prostory l^p): Je-li $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posloupnost reálných (příp. komplexních) čísel, položme pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$

$$\|(a_n)\|_{l^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

a

$$\|(a_n)\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ definujeme

$$l^p = \{(a_n) \mid \|(a_n)\|_{l^p} < \infty\}.$$

Platí: $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ je úplný normovaný prostor.

Důkaz: Uvažme prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \alpha)$, kde α je aritmetická míra na \mathbb{N} . Protože je každá množina $B \subset \mathbb{N}$ měřitelná, je každá funkce $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. \mathbb{C}) měřitelná. Měřitelná je tedy i funkce $|g|^p$ pro každé $p \geq 1$. Dále pro každou nezápornou funkci f (pro kterou je jistě definován integrál) platí

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Položíme-li totiž

$$f_k = f \cdot \chi_{\{1, \dots, k\}} \left(= f \sum_{n=1}^k \chi_{\{n\}} = \sum_{n=1}^k f(n) \chi_{\{n\}} \right),$$

pak zřejmě $f_k \geq 0$ a $f_k \nearrow f$, tedy podle Leviho věty 2.3

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}} f_k \, d\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{n=1}^k f(n) \alpha(\{n\})}_{\sum_{n=1}^k f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Pro $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ a $p \in \langle 1, \infty \rangle$ tak máme

$$\|g\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

V případě aritmetické míry pojmy *všude* a *skoro všude* splývají (nulovou mírou má totiž jen prázdná množina). Splývají tak i pojmy *supremum* a *podstatné supremum* a platí

$$\|g\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |g(n)|.$$

Kromě toho všechny třídy ekvivalence \sim jsou jednoprvkové, takže pokud ztotožníme každou třídu ekvivalence s jejím jediným prvkem, máme pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ rovnost $L^p(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{N})$.

Nyní už stačí jen ztotožnit posloupnosti s funkcemi na \mathbb{N} a dostaneme

$$(l^p, \|\cdot\|_{l^p}) = L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \alpha).$$

Protože prostory L^p jsou úplné, je též prostor $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ je úplný. \square

Poznámka: Ztotožníme-li pro $p \in \langle 1, \infty \rangle$ stejně jako výše prostory $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ s prostory $L^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \alpha)$, dostaneme diskrétní varianty Hölderovy a Minkowského nerovnosti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (\text{Hölderova nerovnost})$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{Minkowského nerovnost})$$

Speciálně pro $p = q = 2$ můžeme Hölderovu nerovnost zapsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}.$$