KAPITOLA 8:
Spektrální analýza operátorů a matic

16. května 2020

Definice : *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor. Řekneme, že operátor $T \in \mathcal{B}(H)$ je* ***normální****, jestliže*

$$T^*T \;=\; TT^*.$$

Tvrzení : *Operátor $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální právě tehdy, když*

$$\|Tx\| \;=\; \|T^*x\| \qquad \forall x \in H.$$

Důkaz: Podle důsledku (ii) polarizační identity se operátory $R, S \in B(H)$ rovnají právě tehdy, když pro všechna $x \in H$ platí $\langle Rx,\, x\rangle = \langle Sx,\, x\rangle$. To znamená, že $TT^* = T^*T$, právě když pro všechna $x \in H$ je $\langle TT^*x,\, x\rangle = \langle T^*Tx,\, x\rangle$. Tato rovnost je ale z definice adjungovaného operátoru ekvivalentní s rovností $\|Tx\| = \|T^*x\|$, protože $\langle TT^*x,\, x\rangle = \langle T^*x,\, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$ a $\langle T^*Tx,\, x\rangle = \langle Tx,\, Tx\rangle = \|Tx\|^2$. $\square$

Tvrzení : *Každý samoadjungovaný, pozitivní nebo unitární operátor je normální.*

Důkaz: Tato skutečnost vyplývá okamžitě z definice samoadjungovaného a unitárního operátoru a skutečnosti, že pozitivní operátor je samoadjungovaný. $\square$

Definice : ***Spektrum***, *$\sigma(T)$, operátoru $T \in \mathcal{B}(H)$ je podmnožina $\mathbb{C}$*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, (T - \lambda I) \quad \textit{nemá inverzi v } \mathcal{B}(H).\}$$

Nebo-li

$\lambda \notin \sigma(T)$ právě tehdy, když existuje $S \in \mathcal{B}(H)$ tak, že

$$S(T - \lambda I) \;=\; (T - \lambda I)S \;=\; I.$$

Hodnotu

$$r(T) \;=\; \sup\{\,|\lambda| \;\big|\; \lambda \in \sigma(T)\,\}$$

*nazýváme **spektrální poloměr** operátoru T. **Bodové spektrum** operátoru T je množina*

$$\sigma_p(T) \;=\; \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T - \lambda I \;\textit{není prostý}\}.$$

*Prvek $\lambda \in \sigma_p(T)$ se nazývá **vlastní číslo** operátoru T. Vektor $v \in H \setminus \{\mathbf{0}\}$, pro který platí*

$$Tv \;=\; \lambda\, v,$$

*se nazývá **vlastní vektor** příslušný vlastnímu číslu λ.*

Příklad : Nechť $M \neq \{0\}$ je uzavřený vlastní podprostor Hilbertova prostoru H a P_M je ortogonální projekce na tento podprostor. Pak $\sigma(P_M) = \{0,\, 1\}$, a tedy $r(P_M) = 1$.
Odvození: Všechny nenulové vektory v M a $M^{\perp}$ jsou vlastní vektory P_M příslušné vlastním číslům 0 a 1. Tedy $\{0, 1\} \subset \sigma(P_M)$. Vezměme nyní libovolné komplexní číslo $\lambda \neq 0, 1$. Můžeme psát

$$P_M - \lambda I = (1 - \lambda)P_M - \lambda(I - P_M)$$

Snadno se pak ověří, že omezený operátor

$$(1 - \lambda)^{-1}P_M - \lambda^{-1}(1 - P_M)$$

je inverzí k $P_M - \lambda I$.

Věta o spektru: *Každý operátor $T \in B(H)$ má neprázdné spektrum $\sigma(T)$. Spektrum, $\sigma(T)$ je vždy uzavřená množina v $\mathbb{C}$ obsažená v kruhu $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$.*

Důkaz Vyloučíme případ $T = 0$, kdy $\sigma(T) = \{0\}$. Důkaz neprázdnosti a uzavřenosti je netriviální a nebudeme ho dělat. Dokážeme si však, že spektrum je v absolutní hodnotě omezeno konstantou $\|T\|$. Vezměme tedy $\lambda \in \mathbb{C}$ s $|\lambda| > \|T\| > 0$. Operátor $T - \lambda I$ má omezenou inverzi právě tehdy, když ji má operátor $I - \frac{T}{\lambda}$ neboť platí, že

$$T - \lambda I = \lambda I \left(\frac{T}{\lambda} - I \right).$$

Označme $B = \frac{T}{\lambda}$. Pak $B \in B(H)$ a $\|B\| < 1$. Stačí tedy ukázat, že $I - B$ má inverzi v $B(H)$. Vezměme si řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n = I + B + B^2 + \cdots .$$

a ukažme, že konverguje v Banachově prostoru $B(H)$. Pro částečné součty

$$S_n = \sum_{n=0}^{n} B^n$$

platí pro $m > n$

$$\|S_m - S_n\| = \| \sum_{i=n+1}^{m} B^i \| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \|B\|^i .$$

Vzhledem k tomu, že $\|B\| < 1$ je číselná geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n$ konvergentní a tedy $\sum_{i=n+1}^{m} \|B\|^i \to 0$ pro $n, m \to \infty$. To znamená, že posloupnost (S_n) je cauchyovská a má tedy limitu $S = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$.

Všimněne si nyní snadným výpočtem, že

$$(I - B)S_n = S_n(I - B) = I - B^{n+1} \to I \text{ pro } n \to \infty .$$

To znamená, že po limitním přechodu máme

$$S(I - B) = (I - B)S = I .$$

Tím je důkaz ukončen. $\square$.

Další stěžejní věta funkcionání analýzy, kterou uvedeme bez důkazu:

Věta o inverzi: *Ať X a Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je omezený prostý surjektivní operátor. Pak inverzní zobrazení $T^{-1} : Y \to X$ je také omezený operátor.*

Poznámka : Bereme-li v úvahu Větu o inverzi, můžeme říci, že pro $\lambda \in \mathbb{C}$ bude platit $\lambda \in \sigma(T)$ ze dvou důvodů:

1) Operátor $T - \lambda I$ není prostý. Pak je $\lambda \in \sigma_P(T)$.

2) Operátor $T - \lambda I$ je prostý, ale není na, tj. $R(T) \neq H$.

Jak ukážeme, pro operátory na prostoru konečné dimenze může nastat jen první případ. Na druhou stranu uvidíme, že v případě operátoru na prostoru nekonečné dimenze může být bodové spektrum prázdné.

Tvrzení : Nechť $T \in B(H)$, $\dim H < \infty$. Pak $\sigma(T) = \sigma_P(T)$.

Důkaz: Lineární zobrazení mezi prostory stejné konečné dimenze je na právě tehdy, když je prosté. To znamená, že inverzní operátor k operátoru $T - \lambda I$ neexistuje právě pro ta λ, pro která není operátor $T - \lambda I$ prostý. (Přitom každý lineární operátor na prostoru konečné dimenze je omezený, a tedy i spojitý. Odtud dostáváme, že do spektra $\sigma(T)$ patří přesně ta λ, která leží v $\sigma_P(T)$.)

Příklad (Operátor s nebodovým spektrem) : Uvažujme operátor $T : H = L^2\langle 0, 1\rangle \to H = L^2\langle 0, 1\rangle$ definovaný předpisem $Tf = xf(x)$ (tj. $T = T_g$ je multiplikativní operátor odpovídající násobení funkcí $g(x) = x$). Spektrum operátoru T má tyto vlastnosti:

- $\underline{\sigma(T) = \langle 0,\, 1 \rangle}$: Ať $\lambda \in (0, 1)$. Ukážeme, že $T - \lambda I$ nemá inverzi v $B(H)$. Speciálně ukážeme, že $T - \lambda I$ není operátor na. Dokážeme to sporem. Předpokládejme, že $T - \lambda\, I$ je na. Vezměme si funkci $h(x) = 1$ pro všechna $x \in \langle 0,\, 1 \rangle$. Musí existovat funkce $g(x) \in H$ tak, že

$$(x - \lambda) g(x) = h(x)\,, \text{ pro skoro všechna } x \in \langle 0,\, 1 \rangle\,.$$

Tímto máme, že pro skoro všechna $x \in \langle 0,\, 1 \rangle$ platí

$$g(x) = \frac{1}{x - \lambda}\,.$$

Toto však není funkce z H neboť

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x - \lambda)^2}\, dx = \infty\,.$$

To můžeme vidět následujícícm způsobem: Volme $0 < \epsilon < \lambda$. a počítejme

$$I \geq \int_0^{\lambda - \epsilon} \frac{1}{(x - \lambda)^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x - \lambda} \right]_0^{\lambda - \epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\lambda} \to \infty \text{ pro } \epsilon \to 0+\,.$$

Tedy skutečně $I = \infty$ a dostáváme spor. (Případ $\lambda = 0, 1$ je podobný.)

Tedy pro každé $\lambda \in \langle 0,\, 1 \rangle$ je $\lambda \in \sigma(T)$. Jinými slovy, $\langle 0,\, 1 \rangle \subset \sigma(T)$.

Ukážeme nyní opačnou inkluzi. Vezměme si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \langle 0,\, 1 \rangle$. Tento bod má od intervalu $\langle 0,\, 1 \rangle$ kladnou vzdálenost d. Platí tedy, že

$$\left| \frac{1}{x - \lambda} \right| \leq \frac{1}{d} \qquad \forall x \in \langle 0,\, 1 \rangle,\,.$$

Tedy fukce $h(x) = \frac{1}{x - \lambda}$ je omezená (spojitá) funkce na $\langle 0,\, 1 \rangle$. Snadno se teď ovšem ověří, že omezený operátor T_h je inverzní k operátoru $T - \lambda I$. Tím je důkaz ukončen.

- $\underline{\sigma_P(T) = \emptyset}$: Opět provedeme důkaz sporem. Ať $g \in L^2 \langle 0,\, 1 \rangle$, $g \neq 0$ a $\lambda \in \langle 0,\, 1 \rangle$ je takové, že $x\, g(x) = \lambda\, g(x)$ pro skoro všechna $x \in \langle 0,\, 1 \rangle$.

Pak ovšem pro skoro všechna $x \in M = \{x \in \langle 0, 1\rangle \,|\, g(x) \neq 0\}$ musí platit $x = \lambda$, a tedy M má (Lebesgueovu) míru nula. Tím jsme ale došli ke sporu s předpokladem, že $g \neq 0$ v $L^2\langle 0, 1\rangle$. Bodové spektrum operátoru T je tak prázdné.

Tvrzení: Nechť operátor $T \in B(H)$ má v $B(H)$ inverzi. Pak pro nenulové $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$\lambda \in \sigma(T) \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad \lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})\,.$$

Důkaz: Operátory T a T^{-1} mají v $B(H)$ inverzi a tedy tvrzení platí pro $\lambda = 0$. Můžeme tedy v dalším uvažovat jen $\lambda \neq 0$. Ukážeme, že $\lambda \notin \sigma(T)$, právě když $\lambda^{-1} \notin \sigma(T^{-1})$. Mějme tedy dáno $\lambda \neq 0$. Pak

$$T^{-1} - \lambda^{-1}I = T^{-1}(I - \lambda^{-1}T) = \lambda^{-1}T^{-1}(\lambda I - T).$$

Předpokládejme, že $(T - \lambda I)$ má inverzi v $B(H)$. Na základě předchozího vztahu ji pak má i $T^{-1} - \lambda^{-1}I$ a to

$$(\lambda I - T)^{-1}\lambda T\,.$$

Opačná implikace vyplývá (například) ze symetrie mezi T a T^{-1}.

$\square$

Tvrzení: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak

(i) Je-li $Tx = \lambda x$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{C}$, pak $T^*x = \overline{\lambda}x$.

(ii) Jestliže $\lambda_1 \neq \lambda_2$, potom $\mathrm{Ker}(T - \lambda_1 I) \perp \mathrm{Ker}(T - \lambda_2 I)$.

Důkaz: **(i)** Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$. Protože je operátor T normální, je také operátor $T - \lambda I$ normální (ověřte jako cvičení). Pro každé $x \in H$ platí

$$\|Tx - \lambda x\| = \|(T - \lambda I)\,x\| = \|(T - \lambda I)^*x\| = \|(T^* - \overline{\lambda}I)\,x\| = \|T^*x - \overline{\lambda}x\|.$$

(ii) Nechť $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 I)$, $y \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_2 I)$, tj. $Tx = \lambda_1 x$, $Ty = \lambda_2 y$. Pak

$$\lambda_1 \langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\lambda}_2 y\rangle = \lambda_2 \langle x, y\rangle.$$

Protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí nutně být $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Tvrzení: *Nechť $T \in B(H)$ je normální operátor. Pak $\lambda \notin \sigma(T)$ právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že*

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in H\,.$$

Důkaz: Jelikož $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když $0 \in \sigma(T - \lambda I)$, stačí uvažovat pouze případ $\lambda = 0$. Ukážeme tedy, že $0 \notin \sigma(T)$, právě když existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in H$ platí $\|Tx\| \geq c\|x\|$.

" $\Leftarrow$ " Protože pro všechna x platí $\|Tx\| \geq c\|x\|$, je operátor T prostý. Ukážeme nyní, že podprostor $R(T)$ je uzavřený. Nechť $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$, $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Pak z našeho předpokladu dostáváme

$$c\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\|.$$

Posloupnost $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ je ale cauchyovská (je totiž konvergentní), takže je cauchyovská i posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, a má tak v úplném prostoru H limitu. Označme tuto limitu x. Protože je operátor T spojitý, konverguje posloupnost $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ k Tx. Současně má ale také konvergovat k y. Z jednoznačnosti limity tak dostáváme, že musí být $y = x$. To znamená, že $y \in R(T)$, a podprostor $R(T)$ je tak uzavřený. Dále potřebujeme ukázat, že $R(T) = H$. K tomu předpokládejme, že $x \in R(T)^{\perp}$. Protože $TT^*x \in R(T)$ a T je normální, máme

$$0 = \langle x, TT^* x\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Je tedy $\|Tx\| = 0$, a protože je T prosté, také $x = 0$. Tím je $R(T)^{\perp} = \{0\}$ a $R(T) = H$. Zbývá ještě ověřit, že je operátor T^{-1} spojitý, tj. $T^{-1} \in B(H)$.

To vyplývá z Věty o inverzním zobrazení. Je to ovšem možno elementárně dokázat následovně: Nechť $y \in H$. Pak existuje $x \in H$ takové, že $y = Tx$ (je totiž $R(T) = H$). Podle předpokladu máme

$$\|y\| = \|Tx\| \geq c\,\|x\| = c\,\|T^{-1}y\|,$$

neboli

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\,\|y\|.$$

Protože bylo $y \in H$ libovolné, je operátor T^{-1} omezený $\left(\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}\right)$, a tím také spojitý.

" $\Rightarrow$ " Tuto část důkazu proveďte sami jako cvičení. $\square$

Několik zajímavých důsledků:

Důsledek : Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když existuje posloupnost jednotkových vektorů $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| \ = \ 0.$$

Důkaz: Podle předchozího tvrzení $\lambda \in \sigma(T)$ právě tehdy, když neexistuje $c > 0$, pro které by bylo $\|(T - \lambda I)x\| \geq c$ pro všechna $x \in H$ s normou $\|x\| = 1$, nebo=li když

$$\inf\{\, \|(T - \lambda I)x\| \;\big|\; \|x\| = 1 \,\} \ = \ 0.$$

To je ale z definice infima ekvivalentní právě s tím, že existuje posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1$, taková, že

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Tvrzení : Je-li $T \in \mathcal{B}(H)$ normální, pak

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\,\}}.$$

Důkaz: Nechť $\lambda \in \sigma(T)$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jednotkových vektorů, pro kterou platí $\|Tx_n - \lambda x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (viz předchozí důsledek). Na základě Schwarzovy nerovnosti

$$|\langle Tx_n - \lambda x_n,\, x_n\rangle| \leq \|Tx_n - \lambda x_n\|\,\|x_n\| \;=\; \|Tx_n - \lambda x_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Použijeme-li přepis

$$\langle Tx_n - \lambda x_n,\, x_n\rangle \;=\; \langle Tx_n,\, x_n\rangle - \lambda\|x_n\|^2 \;=\; \langle Tx_n,\, x_n\rangle - \lambda,$$

vidíme, že $\langle Tx_n,\, x_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Tedy $\lambda \in \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\}}$. $\square$

Tvrzení: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$. Pak

(i) T je samoadjungovaný $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

(ii) T je pozitivní $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty)$,

(iii) T je unitární $\Rightarrow$ $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Důkaz: Využijeme toho, že všechny samoadjungované, pozitivní i unitární operátory jsou normální.

(i) Pokud je operátor T samoadjungovaný, pak pro každé $x \in H$ platí $\langle Tx,\, x\rangle \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\}} \subset \mathbb{R}.$$

(ii) Je-li T pozitivní operátor, pak $\langle Tx,\, x\rangle \geq 0$ pro všechna $x \in H$. To znamená, že

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\}} \subset \langle 0,\, \infty).$$

(iii) Nechť je T unitární operátor. Protože unitární operátory zachovávají normu, máme pro $x \in H$, $\|x\| = 1$, ze Schwarzovy nerovnosti

$$|\langle Tx,\, x\rangle| \;\leq\; \|Tx\|\,\|x\| \;=\; \|x\|^2 \;=\; 1.$$

Odtud

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx,\, x\rangle \mid \|x\| = 1\}} \subset \{\lambda \,\big|\, |\lambda| \leq 1\}.$$

To ale znamená, že $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$

Je-li nyní λ ve spektru T, pak je nutně nenulové a platí podle předchozího tvrzení, že $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$. Jelikož je ovšem T^{-1} unitární operátor, platí podle předchozích argumentů, že $|\frac{1}{\lambda}| \leq 1$. To dá $|\lambda| \geq 1$ a tedy $\sigma(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Tím je důkaz ukončen.

$\square$

Věta: Nechť $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální. Pak

$$||T|| = r(T).$$

Důkaz: Nerovnost $r(T) \leq \|T\|$ jsme dokázali výše pro obecný operátor. Opačnou nerovnost dokážeme o něco později pro případ $\dim H < \infty$. $\square$

Spektrální věty

V této části se zaměříme hlavně na Hilbertovy prostory konečné dimenze. Připomeňme, že v tomto případě je spektrum operátoru T tvořeno právě jeho vlastními čísly, tj. $\sigma(T) = \sigma_P(T)$.

Věta: *Nechť H je Hilbertův prostor,* $\dim H < \infty$, $T \in B(H)$ *je normální operátor. Pak existuje ortonormální báze prostoru H složená z vlastních vektorů operátoru T.*

Důkaz: Položme $n = \dim H$. Protože spektrum operátoru je neprázdná množina, má operátor T alespoň jeden jednotkový vlastní vektor. Buď $v_1, \ldots, v_k$ nějaká ortonormální (konečná) posloupnost vlastních vektorů operátoru T, $Tv_i = \lambda_i v_i$. Protože je operátor T normální, máme $T^* v_i = \overline{\lambda} v_i$. Víme, že ortonormální množina neobsahující nulový prvek je vždy lineárně nezávislá. Je tedy nutně $k \leq n$. Jestliže je $k = n$, máme už hledanou ortonormální bázi.

Pokud $k < n$, označme $X = \text{lin}(v_1, \ldots, v_k)$, $Y = X^{\perp}$. Protože $X \subsetneq H$, je $Y \neq \{0\}$. Ať $y \in Y$. Pak pro $i = 1, \ldots, k$ máme

$$\langle v_i, Ty \rangle \;=\; \langle T^* v_i, y \rangle \;=\; \overline{\lambda} \langle v_i, y \rangle \;= \overline{\lambda} \cdot 0 \;=\; 0.$$

Odtud $Ty \in \text{lin}(v_1, \ldots, v_k)^{\perp} = Y$, a tedy $T(Y) \subset Y$ (tj. podprostor Y je **invariantní** vůči T). Zúžíme-li tedy nyní operátor T na podprostor Y a zúžení označíme $\tilde{T}$ (tj. $\tilde{T}y = Ty$ pro $y \in Y$), bude $\tilde{T} \in B(Y)$. Jako výše operátor T, musí mít nyní i operátor $\tilde{T}$ alespoň jeden jednotkový vlastní vektor. Označme ho v_{k+1}. Protože je $\tilde{T}$ jen zúžení operátoru T, je v_{k+1} také vlastním vektorem operátoru T, a to vlastním vektorem, který je kolmý ke všem vektorům $v_1, \ldots, v_k$ (máme totiž $Y = X^{\perp}$). Tedy $v_1, \ldots, v_{k+1}$ je také ortonormální množina tvořená vlastními vektory operátoru T. Pokud je $k + 1 = n$, našli jsme hledanou ortonormální bázi. Pokud je $k + 1 < n$, opakujeme právě provedený postup do té doby, než bude mít získaná ortonormální množina vlastních vektorů n prvků. $\square$

Podíváme se teď na explicitní formu normálního operátoru na konečné dimenzi.

Věta (Spektrální rozklad) :

Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak

(i) *Existuje ortnormální báze $v_1, \ldots, v_n$ prostoru H a čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tak, že*

$$Tx = \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, v_2 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle x, v_n \rangle \,.$$

(ii)

$$T \;=\; \mu_1 P_1 + \cdots + \mu_k P_k,$$

kde $\mu_i \in \sigma(T)$ a $P_1, \ldots, P_k$ jsou ortogonální projekce na navzájem kolmé podprostory.

Důkaz:

(i) Existuje ortonormální báze $v_1, \dots, v_n$ složená z vlastních vektorů operátoru T. Ať platí

$$Tv_i = \lambda_i v_i \,, i = 1, \dots n \,,$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$. Pro obecné $x \in H$ máme rozvoj do báze

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle x, v_n \rangle v_n \,.$$

Aplikujeme-li na tuto identitu operátor T, máme

$$\begin{aligned} Tx &= \langle x, v_1 \rangle T v_1 + \langle x, v_2 \rangle T v_2 + \cdots + \langle x, v_n \rangle T v_n \\ &= \lambda_1 \langle x, v_1 \rangle v_1 + \lambda_2 \langle x, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \lambda_n \langle x, v_n \rangle v_n \,. \end{aligned}$$

(ii) Vyjdeme z vyjádření (i). Uvažme množinu $A = \cup_{i=1}^{n} \{\lambda_i\}$. Tato množina má k různých prvků $\mu_1, \dots, \mu_k$ $(1 \le k \le n)$. Ať P_i $(1 \le i \le k\ )$ je projekce na podprostor generovaný těmi vektory v_s, pro které je $Tv_s = \mu_i v_s$. Pak lze snadno nahlédnout, že platí (ii).

Tím jsme větu dokázali. □

Tvrzení: *Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $T \in \mathcal{B}(H)$ je normální operátor. Pak*

$$\|T\| \;=\; r(T).$$

Důkaz: Nerovnost $r(T) \le \|T\|$ platí obecně. Dokážeme teď pro případ $\dim H < \infty$ opačnou nerovnost. Vyjděme ze spektrálního vyjádření operátoru T odvozeného výše:

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k \,,$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou vlastní čísla operátoru T a $P_1, \dots, P_k$ jsou ortogonální projekce na navzájem kolmé podprostory s

$$P_1 + P_2 + \cdots + P_k = I \,.$$

Pro $y \in H$ tak platí (Pythagorova věta), že

$$\|y\|^2 = \|P_1 y\|^2 + \|P_2 y\|^2 + \cdots + \|P_k y\|^2 .$$

Tedy pro $x \in H$ můžeme odhadnout:

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= |\lambda_1|^2 \|P_1 x\|^2 + |\lambda_2|^2 \|P_2 x\|^2 + \cdots + |\lambda_k|^2 \|P_k x\|^2 \\ &\leq \max_{i=1,\dots,k} |\lambda_i|^2 \cdot (\|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2 + \cdots + \|P_k x\|^2) = r(T)^2 \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Tím máme,

$$\|T\| \leq r(T) ,$$

a důkaz je ukončen.

$\square$

Definice : Operátor $T \in B(H)$ nazýváme **jednoduchý**, jestliže je lineární kombinací ortogonálních projekcí s navzájem kolmými obory hodnot.

Poznámka : Na základě spektrální věty je každý normální operátor na prostoru konečné dimenze jednoduchý. Spektrální teorie pro obecný Hilbertův prostor říká, že jednoduché operátory jsou husté v množině normálních operátorů. Tedy každý normální operátor je limitou jednoduchých operátorů (nedokazujeme!).

Poznámka : Uvažujme operátor $T \in B(H)$. Víme už, že pokud je T samoadjungovaný, pak $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, je-li pozitivní, pak $\sigma(T) \subset \langle 0, \infty)$, a konečně v případě unitárního operátoru máme $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$. Pokud je operátor T normální, můžeme uvedené implikace obrátit. Ukážeme to za předpokladu $\dim H < \infty$. Nechť $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, kde $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$. Položme $M_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i I)$ a $P_i = P_{M_i}$. Pak podle věty o spektrálním rozkladu

$$T \;=\; \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k ,$$

kde $PiP_j = P_jP_i = 0$ pro $i \neq j$.

(1) Je-li $\sigma(T)$ reálné, pak všechna $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou reálná a tedy

$$T^* = \overline{\lambda_1}P_1^* + \overline{\lambda_2}P_2^* + \cdots + \overline{\lambda_k}P_k^* = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k = T\,.$$

(2) Předpokládejme nyní, že $\lambda_i \geq 0$ pro všechna i. Pak pro každé $x \in H$ platí

$$\langle Tx, x\rangle = \lambda_1\|Px_1\|^2 + \cdots + \lambda_k\|Px_k\|^2 \geq 0\,.$$

(3) Konečně, jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ komplexní jednotky, pak snadný výpočet dá

$$TT^* = T^*T = |\lambda_1|^2 P_1 + \cdots + |\lambda_k|^2 P_k = P_1 + \cdots + P_k = I\,.$$

Ekvivalentní popis normální matice pomocí diagonalizace.

Věta (Diagonalizace) : Nechť H je Hilbertův prostor konečné dimenze a $(e_i)_{i=1}^n$ jeho ortonormální báze. Nechť $T \in B(H)$ je normální operátor a $\mathbf{T} = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ jeho matice vzhledem k bázi $(e_i)_{i=1}^n$, tj. $t_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$. Pak existují diagonální matice $\mathbf{D}$ a unitární matice $\mathbf{U}$ takové, že

$$\mathbf{T} \;=\; \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}\,.$$

Důkaz: Nechť $v_1, \ldots, v_n$ je ortonormální báze tvořená vlastními vektory operátoru T, $Tv_i = \lambda_i v_i$. Definujme diagonální operátor D předpisem $De_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$. (Píšeme též $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.) Volme unitární operátor U tak, že $Uv_i = e_i$, tj. $v_i = U^{-1}e_i$. Chceme nyní ukázat, že $T = U^{-1}DU$. Protože je lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami ve vektorech báze, stačí tuto rovnost otestovat na vektorech $v_1, \ldots, v_n$. Pro tyto vektory platí

$$U^{-1}DUv_i \;=\; U^{-1}De_i \;=\; U^{-1}\lambda_i e_i \;=\; \lambda_i U^{-1}e_i \;=\; \lambda_i v_i \;=\; Tv_i.$$

Tedy skutečně $T = U^{-1}DU$. Označíme-li nyní $\mathbf{D}$ a $\mathbf{U}$ matice operátorů D a U vzhledem k bázi $(e_i)_{i=1}^n$, dostaneme $\mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}$. $\square$

Poznámka : Uvažujme nyní ortonormální $H = \mathbb{C}^n$ s kanonickou ortonormální bází $e_1, \dots, e_n$. V důkazu je vidět explicitní forma matice $\mathbf{U}$ a $\mathbf{D}$. $\mathbf{D}$ má na diagonále vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Inverzní matice $\mathbf{U}^{-1}$ odpovídá lineárnímu zobrzení, které převádí e_i na v_i její sloupce jsou tedy po řadě tvořeny vektory $v_1, \dots, v_n$. Matice $\mathbf{U}$ je k této matici hermitovsky sdružená, což znamená, že její řádky jsou pořadě komplexní konjugace vektorů $v_1, \dots, v_n$.

Schematicky můžeme součin $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{U}$ vyjádřit takto:

$$\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & \dots & v_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leftarrow & \overline{v}_1 & \rightarrow \\ & \cdots & \\ \leftarrow & \overline{v}_n & \rightarrow \end{pmatrix}.$$