Matematickou analýzou za čtvrteční pondělky X: Speciální substituce, určitý integrál

Speciální substituce v integrálech *Kromě rad na str. 13 přehledu přednášky ohledně výhodných substitucí v integrálech jsme si dnes ještě k substitucím goniometrických funkcí zmiňovali: je-li funkce* $R(\sin x, \cos x)$ *uvnitř integrálu*

- *„lichá v* $\sin$*“, tj.* $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$*, vyplatí se substituce* $\cos x = t$
- *„lichá v* $\cos$*“, tj.* $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$*, vyplatí se substituce* $\sin x = t$.

1. Najděte následující primitivní funkce:

   (a) $\int \frac{2}{e^{4x}+e^{2x}-2}\,dx$ $[\frac{1}{6}\ln(e^{2x}+2) + \frac{1}{3}\ln|e^{2x}-1| - x + c; x \in (-\infty;0), (0;\infty)]$

   (b) $\int \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$ $[\arctan e^{x} + c; x \in \mathbb{R}]$

   (c) $\int \frac{1}{x\ln 3x}\,dx$ $[\ln|\ln 3x| + c; 0 < x < \frac{1}{3}$ nebo $\frac{1}{3} < x]$

   (d) $\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$ $[\ln(\sin x + 2) + c; x \in \mathbb{R}]$

   (e) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx$ $[\frac{1}{3}\ln(\cos x+2) + \frac{1}{6}\ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\ln(\cos x + 1) + c; x \in (0;\pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}]$

   (f) $\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin^2 x + 1}\,dx$ $[-\frac{1}{3}\ln\frac{1+\cos x}{2-\cos x} + c; x \in (-\pi;\pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}]$

   (g) $\int \frac{\sin^2 x + 2}{\cos x + \cos x \sin x}\,dx$ $[\frac{-3}{2(1+\sin x)} - \frac{1}{4}\ln(1+\sin x) - \frac{3}{4}\ln(1-\sin x) + c; x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}]$

Určitý integrál *Vzpomeňte si na zásadní Newtonovu-Leibnizovu formuli (kde* $F(x)$ *je primitivní funkce k* $f(x)$*):*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+),\ \text{pro } a < b,$$

pokud má pravá strana smysl.

2. Určete následující hodnoty (před samotným výpočtem si pro lepší představu nakreslete/nechte si nakreslit graf):

   (a) $\int_1^3 x\,dx$ $[4]$

   (b) $\int_0^1 x^2\,dx$ $[\frac{1}{3}]$

   (c) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ *(jak tento a předchozí příklad souvisejí?)* $[\frac{2}{3}]$

   (d) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$ $[\frac{\pi}{2} - 1]$

   (e) $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$ $[-2]$

   (f) $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ $[\frac{\pi}{12}]$

Věřím, že teď už integrály honíte po papíře jak mistři. Smutnou realitou ale je, že naprostou většinu (důležitých) integrálů lidstvo vyřešit neumí..což je pak živná půda pro odvětví jako diferenciální rovnice a numerická matematika, viz např. (`https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_integration`).