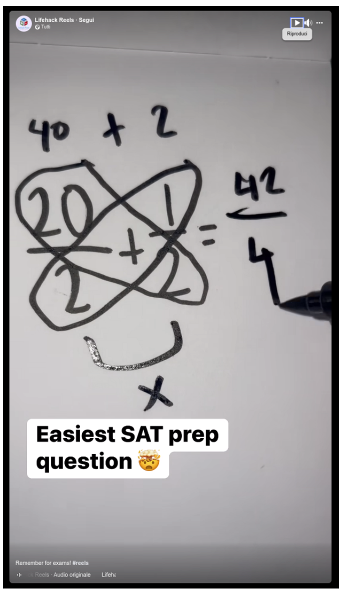
Matematickou analýzou proti splínu ze začátku semestru I

V první části prvního úkolu začneme zlehka: povětšinou se jen ujistíme, že to, co jsme dělali na prvním cviku, opravdu umíme..

1. Najděte řešení následujících (ne)rovnic pro $x \in \mathbb{R}$, případně $\mathbb{C}$:
   (a) $x^2 + 6x = -16$ [$x = -3 \pm i\sqrt{7}$]
   (b) $x^2 - 5x \leq -6$ [$x \in \langle 2; 3 \rangle$]
   (c) $\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x+1} \geq 0$ [$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0\rangle \cup \langle 3; \infty)$]
2. Doplňte na čtverec, tj. do tvaru $(x + a)^2 + b$ pro vhodná $a, b \in \mathbb{R}$, výraz $x^2 + 6x + 14$. [$(x + 3)^2 + 5$]
3. Najděte maxima, minima, infima a suprema následujících množin:
   (a) $2\mathbb{Z} = \{2 \cdot k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ [max $2\mathbb{Z}$ ani min $2\mathbb{Z}$ neexistují; sup $2\mathbb{Z} = +\infty$, inf $2\mathbb{Z} = -\infty$]
   (b) $M = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r^2 \leq 2 \,\&\, |r| = r\} \cap \mathbb{Q}$ [max M neex., sup $M = \sqrt{2}$, min M = inf $M = 0$]
   (c) $N = \left\{\frac{n+1}{n+2} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ [max N neex., sup $N = 1$, min $N = \frac{2}{3}$, inf $N = \frac{2}{3}$]

Ve druhé části už budete muset místy zapřemýšlet, co se dělo na přednášce:

4. Ukažte, že $\sqrt{7}$ je iracionální číslo.
5. Mějme f rostoucí funkci. Co můžeme říci z hlediska růstu/klesání o funkci:
   (a) $-3f$ [klesající]
   (b) $5f$ [rostoucí]
   (c) $|f|$ (kreslete si plno obrázků) [je-li f vždy nazáporná, je rostoucí; je-li vždy nekladná, je klesající; pro f s různými zneménky nemusí být monotónní]
   (d) f^2 [stejně jako $|f|$]
   (e) $1/(2f)$? [je-li f kladná, či záporná, je klesající]
6. Určete definiční obory následujících funkcí:
   (a) $f(x) = \frac{2-x}{x^2-11}$ [$\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{11}\}$]
   (b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{3x^2 + 7} + \frac{1}{7}\sqrt{2 - x}$ [$(-\infty; -2\rangle \cup \{2\}$]
   (c) $h(x) = \log\left(1 - \log\left(x^2 - 5x + 16\right)\right)$ [$(2; 3)$]
   (d) $j(x) = \arccos\sqrt{x + \frac{1}{2}}$ [$\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$]
   (e) $k(x) = \ln|\cos x|$ [$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$]
   (f) $\ell(x) = (\arctan(x + 1))^{-1/x}$ (Před řešením se podívejte na stránku č. 2 pod tabulku hodnot funkce sin v "Přehledu přednášky"– najdete v Moodlu.) [$(-1; 0) \cup (0; +\infty)$]



Lifehack hodný videa na Facebooku.