

**Matematickou analýzou na za ještě trochu zimy IV:
limity, derivace**

1. Když jste v minulém úkolu počítali limity funkcí tvaru $\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ v nevlastních bodech ($\pm\infty$) určitě jste si všimli, že důležité jsou nakonec jen některé konkrétní informace. Rozmyslete si, jak je to přesně:

vztah stupňů	limita v nevlastním bodě
stupeň čitatele < stupeň jmenovatele	
stupeň čitatele = stupeň jmenovatele	
stupeň čitatele > stupeň jmenovatele	$\pm\infty$

vztah stupňů	limita v nevlastním bodě
stupeň čitatele < stupeň jmenovatele	0
stupeň čitatele = stupeň jmenovatele	podíl vedoucích koeficientů
stupeň čitatele > stupeň jmenovatele	$\pm\infty$

2. Na čem všem závisí znaménko u nekonečna v posledním řádku tabulky? [znaménka koeficientů u nejvyšších mocnin, zda je rozdíl stupňů sudý, či lichý a zda je limita v $+\infty$, či $-\infty$]
3. Spočtěte následující limity:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 4}{3x^2 + 1}$ [2]

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 2}$ $[-\frac{1}{4}]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ [existují pouze jednostranné: $\pm\infty$ pro $2\pm$]

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 3}$ $[-\frac{3}{2}$ - pozor, že platí $\sqrt{x^2} = |x|$]

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{2x + 3}$ [0]

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \sin x}{x - \cos x}$ [0]

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x \sin 3x$ [neexistuje]

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + \cos 2x)$ $[\infty]$

Na následující limity použijte Větu o limitě složené funkce (je docela šťavnatá, takže kdyby hrozil karambol, určitě na to koukneme i za týden) ze str. 3 materiálu k přednášce:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $[\pi]$

(j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ [neexistuje (koukni na definiční obor)]

4. Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{\cos 5x}{1-2^x}$ a v jeho krajních bodech určete limity této funkce. [neexistuje v $-\infty$, $\pm\infty$ pro $0\mp$, 0 v ∞]
5. Oblíbený fór na téma limity je tento. Co je špatně v jeho první polovině?

Předchozí příklady by měly převážně odpovídat jednotlivým prototypům, které člověk typicky potká. Na limity to ale chce mít dost drilu, takže doporučuji okouknout např. sbírku přednášejícího. Na závěr ještě pár jednoduchých derivací (pro začátek si klidně pomozte materiály k přednášce):

6. Určete derivace následujících funkcí a odpovídající intervaly existence:

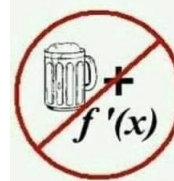
(a) $(x^5 - 7x^3 + 3x + \pi)'$ $[5x^4 - 21x^2 + 3, x \in \mathbb{R}]$

(b) $(\frac{1}{x^3} + 7\sqrt[4]{x})'$ $[-\frac{3}{x^4} + \frac{7}{4\sqrt[4]{x^3}}, x > 0]$

(c) $(5e^{3x} - 2 \sin 5x)'$ $[15e^{3x} - 10 \cos 5x, x \in \mathbb{R}]$

(d) $(\cosh x)'$ $[\sinh x, x \in \mathbb{R}]$

**DON'T DRINK
AND DERIVE**



**Mathematicians
Against
Drunk
Deriving**

**Know Your
Limits!**