Matematickou analýzou za tečnější tečny a mocnější mocniny IV: derivace a jejich aplikace

Derivace šťavnatějších funkcí

1. Určete derivace následujících funkcí a pro která $x \in \mathbb{R}$ to platí - typicky (pro naše pěkné funkce) tedy definiční obor výchozí funkce. (Připomeňme si, že funkce tvaru $f(x)^{g(x)}$ bereme jako ekvivalentní funkcím $e^{g(x)\ln f(x)}$.)

   (a) $x \cdot \cos x \cdot \arctan x$ [$\cos x \arctan x - x \sin x \arctan x + \frac{x\cos x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$]

   (b) $\sqrt{x^5+2}$ [$\frac{5x^4}{2\sqrt{x^5+2}}, x > \sqrt[5]{-2}$]

   (c) $\sqrt{\ln^2 x + 1}$ [$\frac{\ln x}{x\cdot\sqrt{\ln^2 x+1}}, x > 0$]

   (d) $\ln^2(x^3)$ [$\frac{6}{x}\ln x^3, x > 0$]

   (e) $\ln \ln \sin x$ [funkce není definována, takže nemá derivaci]

   (f) x^x [$x^x(1+\ln x), x > 0$]

   (g) $\sqrt[x-3]{x^2+1}$ [$\sqrt[x-3]{x^2+1} \cdot \left(-\frac{\ln(x^2+1)}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right), x \neq 3$]

   Ta byla, co?! Pro silné žaludky je připravena i následující (dobrovolná):

   (h) $\arctan^{\ln x}(1-x^2)$ [$\arctan^{\ln x}(1-x^2) \cdot \left(\frac{1}{x}\ln\arctan(1-x^2) + \ln x \cdot \frac{1}{\arctan(1-x^2)} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2)^2+1}\right), x \in (0;1)$]

Pokud si nejste derivováním úplně na beton jistí, doporučuju opět nakouknout do sbírky přednášejícího – derivace budeme ještě hodně potřebovat.

2. Určete druhou derivaci funkce xe^{x^2}. [$2e^{x^2}(2x^3+3x), x \in \mathbb{R}$]

3. Ukažte, že derivací liché funkce je funkce sudá.

4. Je derivace sudé funkce lichá funkce? [Ano, ukáže se podobně jako výše.]

Derivace cosi říká nejen o „okamžité změně“ funkce, ale i o tečně, a tím i k normále, k jejímu grafu (str. 5 nahoře v textu k přednášce).

5. Napište rovnice tečny, resp. normály ke grafu funkce $2x^2-1$ v bodě $[-\frac{1}{2}; ?]$. [$y = -2x - \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$]

6. Napište rovnici vodorovné tečny ke grafu funkce x^x a normály k ní. [$y = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}; x = \frac{1}{e}$]