Matematickou analýzou na oslavu astronomického jara V:
Taylorův polynom, L'Hospitalovo pravidlo, průběh funkce

Další využití derivací - Taylorův polynom

1. Najděte Taylorův polynom řádu 3 pro funkci $f(x) = e^{2x}\cos x$ v bodě 0. (Zkuste si průběžně třeba na `www.wolframalpha.com` nechat vykreslovat společně grafy $f(x)$ a postupně získávaných Taylorových polynomů řádů 0,1,2,3 v okolí nuly.) $[1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3]$

2. Kdyby někoho zajímala hezká intuice za Taylorovým polynomem, pak doporučuji video Taylor series od 3Blue1Brown.

Další využití derivací - l'Hospitalovo pravidlo

3. Spočtěte následující limity:

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(x^2-8)}{x^2-3x}$ [2]

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ [$\frac{a}{b}$ pro $b \neq 0$]

   (c) $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$ [1 pro $a, b > 0$]

   (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x+\sin x}{x+1}$ [2; l'Hospitalovo pravidlo nezabere]

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$ [1]

   (f) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^x$ [1]

   (g) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{x}$ [1]

   (h) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ [e^{-1}]

Z přednášky (přehledu, str. 5 vpravo) víte, jak znaménko derivace funkce f na intervalu I souvisí s tím, zdali je f na I rostoucí/klesající.

4. Buď $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$.

   (a) Načrtněte graf funkce $f(x)$ tak, jak to umíte už ze střední: dělení se zbytkem, asymptoty...

   (b) Určete $f'(x)$ a kde je kladná/záporná. Porovnejte, zda to, co jste nakreslili v předchozím bodě, odpovídá výpočtům, a na kterých intervalech je $f(x)$ rostoucí/klesající.[klesající na $(-\infty; \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}; \infty)$ (nikoli na $(-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$!)]

5. Položme $g(x) = (x+1) \cdot |x-3| + 1$.

   (a) Určete intervaly monotonie funkce $g(x)$ (tj. na kterých intervalech je rostoucí/klesající). (Nápověda: bude třeba odstranit absolutní hodnotu.) [rostoucí na $(-\infty; 1\rangle$, $\langle 3; \infty)$; klesající na $\langle 1; 3\rangle$]

   (b) Jaká je derivace (jaké jsou jednostranné derivace) v bodě $x = 3$? [derivace neexistuje; jednostranné ano: $f'_{\pm}(3) = \pm 4$]