# Matematickou analýzou za větší maxima a menší minima VII: Aplikace diferenciálního počtu, jednoduché primitivní funkce

**Dva povinné příklady, abyste měli zpětnou vazbu** *Na začátku jsem zmiňoval, že v průběhu semestru dvakrát zadám pár příkladů, jejichž vypracování bude povinné: chci vám je opravit „jako u zkoušky“ – zdá se totiž, že taková zpětná vazba umí až o polovinu zlepšit pravděpodobnost úspěchu při prvním pokusu u zkoušky. Takže je to zde!*

*Abych se z opravování nezbláznil, odevzdávejte jako jedno pdf s povinnými příklady na začátku, díky!*

1. Určete koeficient u $x^3$ Taylorova polynomu řádu 3 v bodě $\frac{\pi}{2}$ pro funkci
$$f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}.$$
2. Načrtněte graf funkce a určete všechny důležité vlastnosti funkce
$$g(x) = x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Optimalizační problémy** *V tomto typu úloh obvykle hledáme stacionární bod. Nezapomeňte ale zdůvodnit, proč se v daném bodě nabývá požadovaného extrému (maxima/minima) – občas se dá druhé derivování ušetřit např. geometrickým náhledem.*

3. Do elipsy o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vepište obdélník, který má strany rovnoběžné s osami elipsy a má maximální obsah. [délky stran obdélníka jsou $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$]
4. Jaký je největší možný objem válcového sudu (s víkem/bez víka) při zadaném povrchu? [nejlepší je poměr výška = 2· poloměr, resp. výška = poloměr]

*Jedna „praktická úloha ze života“ na skoro aktuální téma:*

5. Uvažme funkci $\mathbf{CoV}(t)$ = počet osob s prokázaným onemocněním COVID-19 v čase $t$; její graf si můžete prohlédnout zde (druhý obrázek). Čemu odpovídají $\mathbf{CoV}'(t)$, resp. $\mathbf{CoV}''(t)$? [první derivace odpovídá dennímu přírůstku; druhá jakýmsi způsobem reprodukčnímu číslu]

*A jeden superšťavnatý pro dobrovolníky:*

6. Pro jaké základy logaritmů existuje číslo, které je rovno svému logaritmu? (Nápověda na konci stránky.) [pro základy menší nebo rovné než $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$]

**Základní integrály** *Druhá polovina semestru se věnuje teorii a praxi okolo integrálů, my začneme zlehka, konkrétně jen využitím linearity integrálu a znalosti základních primitivních funkcí:*

7. Najděte neurčitý integrál (tj. množinu všech primitivních funkcí, kterou typicky zapisujeme jako $F + c$ a máme tím na mysli množinu $\{F + c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$) k následujícím funkcím (využijte přehled tabulkových integrálů na str. 7 v materiálu k přednášce + linearitu integrálu). Určete také na jakém intervalu jsou nalezené funkce primitivními k zadané funkci:
   (a) $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4}\right) \mathrm{d}x$ [$-\frac{3}{4x^4} + \frac{2}{3x^3} + c; x \in (-\infty; 0), x \in (0; +\infty)$ ]
   (b) $\int (\sqrt[5]{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) \,\mathrm{d}x$ [$\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c, x \in (-\infty; 0), x \in (0; +\infty)$]
   (c) $\int (\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-2x}) \,\mathrm{d}x$ [$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{-x} - \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2x} + c; x \in \mathbb{R}$]
   (d) $\int (2\cos 5x - 3\sin 2x) \,\mathrm{d}x$ [$\frac{2}{5}\sin 5x + \frac{3}{2}\cos 2x + c, x \in \mathbb{R}$]
   (e) $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ *(zkuste opravdu jen pomocí linearity a vlastností kosínu)* [$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c; x \in \mathbb{R}$]
   (f) $\int \frac{x^2}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$ [$x - \arctan x + c, x \in \mathbb{R}$]

**Nápověda k příkladu č. 6:** *(Pro jednodušší výpočty můžete problém převést na problém ohledně exponenciál; nakreslete si pár grafů pro různé základy a uvažujte případné průsečíky s přímkou $y = x$; pak porovnejte s obecnou rovnicí tečny.)*