Matematickou analýzou za kudrlinky na koncích integrálů VIII: Per partes, substituce v integrálu

Jako tradičně bude platit, že v boji s integrály je třeba získat hodně praxe, která se pak týden před zkouškou už hodně špatně dohání – spočítání úkolu je úplné minimum, takže opět doporučuji sbírky přednášejícího..

Ještě základní typy integrálů

1. Najděte neurčité integrály a odpovídající intervaly k zadaným funkcím pouze s využitím linearity a znalosti základních derivací/primitivních funkcí:

   (a) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x$ $[x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + c; x \in (-\infty; 0), x \in (0; \infty)]$

   (b) $\int 2^x \, \mathrm{d}x$ *(Nápověda: převeďte na mocninu se základem* e*.)* $[\frac{1}{\ln 2} 2^x + c, x \in \mathbb{R}]$

   (c) $\int (2^x + 3^x)^2 \, \mathrm{d}x$ $[\frac{4^x}{\ln 4} + 2\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + c; x \in \mathbb{R}]$

   (d) $\int \frac{1+x}{1-x} \, \mathrm{d}x$ $[-x - 2\ln|1-x| + c; x \in (-\infty; 1), x \in (1; \infty)]$

Integrování metodou *per partes* *Vzorec najdete ve skriptech na str. 7 vlevo uprostřed. Pokud jej ale stejně jako já sotva kdy udržíte v paměti, doporučuji na rozmyšlenou si proběhnout, jak jej dokázat ze vzorce pro derivaci součinu funkcí.*

2. Najděte neurčité integrály a odpovídající intervaly k zadaným funkcím metodou *per partes*:

   (a) $\int (x^2 + x) \sin 2x \, \mathrm{d}x$ $[\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\sin 2x + c; x \in \mathbb{R}]$

   (b) $\int (3x^2 - x) \ln 4x \, \mathrm{d}x$ $[(x^3 - \frac{1}{2}x^2)\ln 4x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + c; x \in (0; \infty)]$

   (c) $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$ $[-x\cos x + \sin x + c; x \in \mathbb{R}]$

   (d) $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ *(ten už jste spočítali na minule, ale nedal by se porazit i skrze per partes?)* $[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x \cos x + c; x \in \mathbb{R}]$

Substituce v integrálu

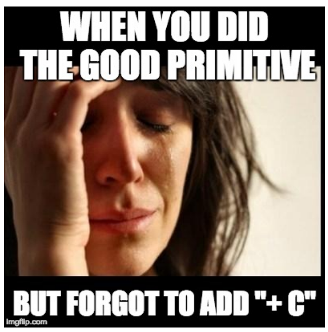
3. Najděte neurčité integrály a odpovídající intervaly k zadaným funkcím pomocí vhodné substituce (návrhy substitucí jsou na konci zadání):

   (a) $\int \sqrt[6]{2-3x} \, \mathrm{d}x$ $[-\frac{2}{7}(2-3x)^{\frac{7}{6}} + c; x \leq \frac{2}{3}]$

   (b) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\ln x} \, \mathrm{d}x$ $[\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + c; x \in \langle 1; \infty)]$

   (c) $\int \sin x \cdot \cos^3 x \, \mathrm{d}x$ $[-\frac{1}{4}\cos^4 x + c; x \in \mathbb{R}]$

   (d) $\int \operatorname{cotg} 3x \, \mathrm{d}x$ *(Nápověda:* cotg *napište pomocí* $\sin$ *a* $\cos$*.)* $[\frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + c; x \in (0; \frac{\pi}{3}) + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z})]$



Nápovědy k substitucím: *(a)* $2 - 3x = t$; *(b)* $\ln x = t$; *(c)* $\cos x = t$, *jde i* $\sin x = t$; *(d)* $\sin 3x = t$