Matematickou analýzou za výhřevnější zlomky IX: Parciální zlomky, integrování racionálních funkcí

Rozklad na parciální zlomky Teorii (a praktické ukázky) najdete ve velice pěkném soupisu (i s pokročilými metodami, dokonce využívajícími rozklady v $\mathbb{C}$) na `http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3db3i.htm`.

1. Rozložte na součet parciálních zlomků následující racionální funkce:

   (a) $\frac{3x^2+2x-9}{x^2+x-2}$ $\left[3+\frac{-\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{\frac{1}{3}}{x+2}\right]$

   (b) $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$ (tenhle je VELMI šťavnatý, na rychlé dělení polynomů dobře funguje Hornerovo schéma) $\left[\frac{1}{8(x+1)}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{17}{8(x+3)}-\frac{5}{4(x+3)^2}-\frac{1}{2(x+3)^3}\right]$

   (c) $\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x^2+x+2)}$ $\left[\frac{2}{x+1}+\frac{x-2}{x^2+x+2}\right]$

   (d) $\frac{x^3-x^2+4x+1}{(x^2+2)^2}$ $\left[\frac{2x+3}{(x^2+2)^2}+\frac{x-1}{x^2+2}\right]$

Integrování racionálních funkcí Rozklad na parciální zlomky nám umožňuje funkce příjemněji integrovat s využitím pouhé linearity, příp. vhodných substitucí (viz strany 7 a 8 skript).

2. Najděte primitivní funkce k funkcím z (a), (b) předchozího příkladu (ostatní jsou dost pracné..). [

   (a) $3x-\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\ln|x+2|+c; x\in(-\infty;-2), x\in(-2;1), x\in(1;\infty)$

   (b) $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+c; x\in(-\infty;-3), x\in(-3;-2), x\in(-2;-1), x\in(-1;\infty)$

   (c) $2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+x+2|-\frac{5}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{2})+c; x\in(-\infty;-1), x\in(-1;\infty)$

   ]

3. Najděte následující neurčité integrály:

   (a) $\int\frac{3x+6}{2x^2+8x+9}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{3}{4}\ln(2x^2+8x+9)+c; x\in\mathbb{R}\right]$

   (b) $\int\frac{x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{-1}{4(x^2+1)^2}+c; x\in\mathbb{R}\right]$

   (c) $\int\frac{4x+2}{(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{-2}{x^2+x+3}+c; x\in\mathbb{R}\right]$

   (d) $\int\frac{1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{1}{3}\arctan\frac{x-1}{3}+c; x\in\mathbb{R}\right]$

   (e) $\int\frac{5x+1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$ $\left[\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+5)+3\arctan\frac{x-1}{2}+c; x\in\mathbb{R}\right]$