Domácí úkol 1

V domácím úkolu si prosvištíme především práci s polynomy. Vzpomeňte si na definici polynomu ze cvičení, která předepisovala tvar $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$. Je-li zadáno nalézt nějaký polynom, pokuste se ho upravit právě do tohoto tvaru.

1. Rozložte polynom $p(x) = 2x^4 - 2$ na součin polynomů co nejmenšího stupně

a) nad $\mathbb{C}$,
b) nad $\mathbb{R}$.

2. Najděte polynom stupně $n > 0$

a) s koeficienty v $\mathbb{Z}$, který však nemá žádný kořen v $\mathbb{Z}$,
b) s koeficienty v $\mathbb{Q}$, který však nemá žádný kořen v $\mathbb{Q}$,
c) s koeficienty v $\mathbb{R}$, který však nemá žádný kořen v $\mathbb{R}$.

3. Najděte nějaký polynom čtvrtého stupně, který má kořeny 1, 2, -2 (a případně nějaké další).

4. Najděte reálný polynom, který má kořeny 1 a $1 + i$ (a případně nějaké další).

5. Najděte reálný polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, který má přesně následující kořeny: $x = 3$ s násobností 2 a $x = -2$ s násobností 1.

Jako přípravu na další cvičení ještě zopakujeme řešení soustav lineárních rovnic. Jako všechny cesty vedou do Říma, tak všechny úlohy v lineární algebře povedou na soustavy lineárních rovnic.

6. Vyřešte následující soustavy lineárních rovnic.

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y - z = 4 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$
f) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

A nakonec něco pro opravdové nadšence. Níže naleznete několik **nepovinných** *teoretičtějších úkolů. Doporučuji se na ně podívat těm, kteří aspirují na ty nejlepší známky. Můžete se pokusit je vyřešit hned, nebo si je nechat na procvičování před zkouškou.*

7. Dokažte, že každý reálný polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

8. Ukažte, že množina $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ tvoří (číselné) těleso.