Domácí úkol 2

*Začneme zostra něčím, co jsme zatím necvičili, ale měli byste znát z přednášky – **konečnými tělesy**. Pokud si ve výpočtech nejste jisti, nevadí. Na příštím cvičení řešení probereme.*

1. Spočítejte v $\mathbb{Z}_7$ $((3+6)\cdot 2 - 5)^{-1}$.

2. Spočítejte v $\mathbb{Z}_3[x]$ $(x^2+2x+1)(2x^2+2)$.

*Teď trocha opakování definice **lineárního prostoru**, kterou vlastně zatím znáte také jen z přednášky.*

3. Ukažte, že $\mathbb{C}$ je lineární prostor nad $\mathbb{R}$.

A nyní se konečně vraťme k podstatě lineární algebry.

4. Napište polynom $p(x) = 2x^2 + 5x - 8 \in \mathbb{R}[x]$ jako lineární kombinaci (nad $\mathbb{R}$) polynomů

a) $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$,
b) $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = 2x - 5$, $f_3(x) = -x^2 - x + 1$.

5. Uvažujme následující vektory v $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Označme $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$, $W = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$. Rozhodněte zda platí následující tvrzení

a) $\vec{y}_1 \in V$, b) $\vec{y}_2 \in V$, c) $\vec{y}_3 \in V$,
d) $\vec{x}_1 \in W$, e) $\vec{x}_2 \in W$, f) $\vec{x}_3 \in W$,
g) $V = W$, h) $V = \mathbb{R}^3$, i) $W = \mathbb{R}^3$.

6. Najděte průnik přímky

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \tag{$*$}$$

s rovinou

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. Rozhodněte, zda je přímka zadaná předpisem $(*)$ lineární podprostor $\mathbb{R}^3$.

8. Určete parametrickou rovnici přímky rovnoběžné s $(*)$, jež prochází počátkem, tj. nulovým vektorem $\vec{o}$. Tvoří tato nová přímka vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$?