# Domácí úkol 3

**1.** Rozhodněte, zda následující množiny jsou lineární prostory nad $\mathbb{R}$. (Nápověda: Vzpomeňte si, že stačí ověřit, že se jedná o podprostory známého lineárního prostoru $\mathbb{R}[x]$. Níže pomocí $\deg p(x)$ značíme stupeň polynomu $p(x)$.)

a) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) = 3\}$,
b) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \leq 3\}$,
c) $\{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \text{ je sudý}\}$,
d) $\left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{koef. u lichých} \\ \text{mocnin nulové} \end{array} \right\}$.

**2.** Vzpomeňme si na seznam vektorů z minulého úkolu

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde jsme rovněž označili $V := \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$.

a) Připomeňte si, jak se ukáže, že je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ lineárně závislý.
b) Ukažte, že seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ je lineárně nezávislý.
c) Ukažte, že seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ generuje $V$, tj. $V = \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.
d) Tvoří seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ bázi $V$? Tvoří bázi $\mathbb{R}^3$?
e) Jaká je dimenze $V$?

**3.** Uvažujme lineární prostor spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nad $\mathbb{R}$, tj.

$$C(\langle 0,1\rangle) = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R} \mid f \text{ spojitá}\}.$$

(Kdo chce, rozmyslí si, že je toto skutečně lineární prostor.) Ukažte, že je seznam funkcí $(\sin, \cos)$ lineárně nezávislý.

**4.** Uvažujme lineární prostor polynomů s koeficienty v $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, tj.

$$\mathbb{R}^{\leq 2}[x] = \{p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ukažte, že seznamy

a) $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$, kde $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$,
b) $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$, kde $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = 2x - 5$, $f_3(x) = -x^2 - x + 1$,

jsou báze $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$. Jaká je dimenze tohoto lineárního prostoru?

*Nakonec ještě pár teoretičtějších úloh.*

**5.** Ukažte, že je-li seznam $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ lineárně závislý, pak v daném seznamu existuje nějaký vektor $\vec{x}_i$, jenž je lineární kombinací ostatních. Dá se toto tvrzení říct o každém z vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ v seznamu?

*Kdo chce, může se pokusit využitím úlohy výše přesně zformulovat a dokázat následující větu:*

**Věta.** Z každého generujícího seznamu lze vybrat bázi.

**6.** Ukažte, že je-li seznam $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ lineárně nezávislý, ale není generující, tj. existuje vektor $\vec{y} \notin \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$, pak je nově utvořený seznam $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y})$ rovněž lineárně nezávislý.

*Kdo chce, může se pokusit využitím úlohy výše přesně zformulovat a dokázat následující větu:*

**Věta.** Každý lineárně nezávislý seznam lze doplnit na bázi.

**7.** Buď $V$ nějaký lineární podprostor lineárního prostoru $L$. Uvažujme $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$. Ukažte, že je-li $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$, pak $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \subset V$.

*Kdo chce, může se pokusit využitím úlohy rozmyslet následující otázku:*

**Otázka.** Jak lze pro nějaké dva dané seznamy $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ a $\mathscr{Y} = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l)$ prakticky ukázat rovnost $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_l\}$?