Domácí úkol 4

1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ seznam $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, kde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Je tento seznam lineárně nezávislý? (*Návod:* Zkuste na to přijít bez počítání!)
b) Je tento seznam generující? (*Návod:* Zkuste se nejprve zamyslet nad lineární nezávislostí seznamu $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.)

2. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ vektory

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ generující (zda generuje celé $\mathbb{R}^3$). (*Návod:* Zkuste na to přijít bez počítání!)
b) Rozhodněte, zda je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ lineárně nezávislý.
c) Určete dimenzi $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.
d) Doplňte tento seznam na bázi $\mathbb{R}^3$, tj. najděte bázi $\mathbb{R}^3$ obsahující vektory $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$. (*Návod:* Označíme-li $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ vektory kanonické báze, pak je seznam $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ určitě generující. Vybrat bázi z generujícího seznamu umíme z minulého cvičení.)
e) Najděte souřadnice vektorů $\vec{y}_1$ a $\vec{y}_2$ v bázi, kterou jste právě nalezli.
f) Rozhodněte zda platí $\operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} = \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$. (*Návod:* Jak plyne z minulého domácího úkolu, stačí ověřit, zda $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ a zda $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \operatorname{span}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$.)

3. V $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ označme

$$V_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Rozhodněte, zda platí rovnosti $V_1 = V_2$, $V_2 = V_3$, $V_1 = V_3$.
b) Najděte $V_1 \cap V_2$. (*Návod:* Podobnou úlohu jsme už jednou řešili v domácím úkolu 2.)
c) Najděte $V_1 \vee V_2$. (*Návod:* Připomeňte si z přednášky, že platí $\operatorname{span} M \vee \operatorname{span} N = \operatorname{span}(M \cup N)$.)
d) Připomeňte si z přednášky větu o dimenzi spojení a průniku. Jaké jsou příslušné dimenze v tomto příkladě?

4. Určete dimenzi lineárního prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.