Domácí úkol 5

1. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dané maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Určete, jak matice působí na obecný vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

b) Najděte všechna řešení rovnice $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Rozhodněte, zda daná množina řešení tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, jaká je jeho dimenze?

d) Uvažujme lineární obal sloupečků matice $\mathbf{A}$, tj. $V := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Najděte bázi V a určete dimenzi V.

e) Ukažte, že V je ve skutečnosti obor hodnot (tzv. *obraz*) zobrazení $\mathbf{A}$, tj. $V = \{\mathbf{A}\vec{v} \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$. (Na některých cvičeních jsem to už ukazoval, na jiných cvičeních jsme to nestihli.)

Na cvičení jsme si zatím ukázali, jak se násobí matice krát vektor. Pro následující cvičení si zopakujte z přednášky, jak mezi sebou mají násobit dvě matice.

2. Uvažujme následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte všechna možná maticová násobení mezi dvojicemi matic, která provést lze. (Tj. rozhodněte, zda lze vynásobit $\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{BA}$ a podobně a součin případně skutečně proveďte.) Jakým zobrazením (mezi jakými prostory) jednotlivé matice odpovídají? Jakému zobrazení odpovídá jejich součin?

Na cvičení jsme si řekli, že posunutí ***není*** *lineární transformace. V počítačové grafice a podobných aplikacích, kde je posouvání potřeba, se tento problém obchází následujícím způsobem.*

3. Spočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tentokrát nebudeme končit teoretickými úlohami, ale zábavou.

4. Navštivte stránky shad.io/MatVis a hrajte si.

(*Návod:* Pomocí červeného a zeleného terče se nastaví obrazy vektorů standardní báze. Tím se současně nastaví, jak vypadá matice v levém horním rohu. Táhlo pod obrázkem pak zrealizuje danou lineární transformaci. Je-li táhlo vlevo, nacházíme se v definičním oboru. Táhnutím doprava pak aplikujeme lineární transformaci a úplně vpravo je pak daný obraz.)

Zkuste se speciálně podívat na následující transformace

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Jak by se tyto transformace daly popsat slovy?

Dokážete najít matici zrcadlení podél přímky $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (tj. přímka procházející počátkem a bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. směřující šikmo doprava nahoru)?