Domácí úkol 9 (středa)

1. Najděte všechny hodnoty parametru $\lambda \in \mathbb{C}$, pro která má následující soustava řešení (v komplexních číslech). Rozhodněte rovněž, pro která λ je řešení určené jednoznačně.

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^3 \end{cases}$$

2. Najděte všechny hodnoty parametru $\lambda \in \mathbb{C}$, pro něž je zobrazení $\mathbf{A}\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dané následující maticí prosté.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{C}$ má následující matice inverzi a najděte ji

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

4. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Každé tvrzení buď dokažte, nebo vyvraťte.

a) Existuje monomorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
b) Existuje epimorfismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
c) Nechť je lineární operátor $\mathbf{f}\colon V \to V$ izomorfismus. Pak je i inverzní operátor $\mathbf{f}^{-1}\colon V \to V$ izomorfismus.
d) Hodnost matice je vždy větší nebo rovna jejímu defektu, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \geq \operatorname{def} \mathbf{A}$ pro každou matici $\mathbf{A}$.
e) Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi cílového lineárního prostoru, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq r$ pro každou matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.
f) Hodnost matice je vždy menší nebo rovna dimenzi definičního oboru, tj. $\operatorname{rank} \mathbf{A} \leq s$ pro každou matici $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r$.