# Domácí úkol 11

**1.** Uvažujme následující matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte její vlastní čísla a vlastní vektory. Je tato matice diagonalizovatelná? Najděte matici zobrazení $\mathbf{A}$ v bázi $\mathscr{X} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

**2.** Uvažujme matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $\mathbf{B}^{2021}$. *Návod:* Spočítejte nejprve vlastní čísla a vlastní vektory matice. Matici diagonalizujte, tj. vyjádřete v bázi vlastních vektorů. Místo umocňování původní matice $\mathbf{A}$ můžete umocnit matici zobrazení v této nové bázi.

**3.** Vzpomeňme si znovu na operátor derivování $\mathbf{D}\colon \mathbb{R}^{\leq 3} \to \mathbb{R}^{\leq 3}$ a na jeho matici ve standardní bázi. Spočítejte, jak vypadají matice zobrazení $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$, $\mathbf{D}^3$ a tak dále. Ukažte, že $\mathbf{D}$ je tzv. *nilpotentní*, tj. pro nějakou mocninu $k$ už máme $\mathbf{D}^k = \mathbf{O}$, kde $\mathbf{O}$ je nulový operátor.

**4.** Dokažte následující tvrzení:

*Nechť $\mathbf{f}\colon V \to V$ je libovolný nenulový lineární operátor. Je-li $\mathbf{f}$ nilpotentní (tj. $\mathbf{f}^k = \mathbf{O}$ pro nějaké $k$), pak $\mathbf{f}$ není diagonalizovatelný.*

*Nápověda:* Dokazujte sporem/obměnou. Předpokládejte, že $\mathbf{f}$ je diagonalizovatelný (a nenulový), a ukažte, že pak nemůže být nilpotentní. (Nebo můžete předpokládat, že je diagonalizovatelný a nilpotentní a ukázat, že pak už je nutně nulový.)