

Domácí úkol 12

1. Diagonalizujte matici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ nalezněte všechna řešení následující soustavy. Pokuste se při počítání využít Cramerovo pravidlo.

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha^2 y & = \alpha^3 \\ x + \alpha y + \alpha z & = \alpha \\ -x + y - \alpha z & = 1 \end{cases}$$

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. Každé tvrzení buď dokažte, nebo vyvráťte.

- Je-li matice $\mathbf{A}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ nilpotentní, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
- Má-li matice $\mathbf{B}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ na diagonále samé nuly, pak $\det \mathbf{B} = 0$.
- Má-li matice $\mathbf{C}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ n vzájemně různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Nakonec nepovinná úloha, která je spíš cvičením z teorie složitosti než z lineární algebry.

4. Pokuste se v závislosti na rozměru n dané matice řádově odhadnout, kolik operací (sčítání/odčítání, násobení) je potřeba pro různé algoritmy výpočtu determinantu, které jsme probrali:

- z definice,
- rozvoj podle řádku/sloupce,
- Gaussova eliminace.