Domácí úkol 13

1. Pomocí adjungované matice nalezněte inverzi matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Vyřešte následující maticové rovnice. (Neznámou je matice $\mathbf{X}$. Nejprve je nutné určit její rozměry!)

a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{B} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right)$,

b) $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$, kde $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$,

c) $\mathbf{AX} = \mathbf{X}$, kde $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Najděte matici ortogonální projekce $\mathbf{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na podprostor

a) $W = \operatorname{span}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$,

b) $W = \operatorname{span}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$,

c) $W = \operatorname{span}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$. (pozn[1])

Ve všech případech najděte kolmý průmět vektoru $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ do roviny W.

4. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Dokažte, že báze $\mathscr{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ortonormální právě tehdy, když $\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}}$ je ortogonální matice, tj. $\mathbf{T}_{\mathscr{E} \mapsto \mathscr{X}} = (\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}})^{-1} = (\mathbf{T}_{\mathscr{X} \mapsto \mathscr{E}})^{\mathrm{T}}$. Zde značíme $\mathscr{E}$ standardní bázi $\mathbb{R}^n$.

---

[1] Zadání jsem změnil 18. 12. Původně tam bylo $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$, ale tam pak vycházela poměrně nepříjemná čísla. Pokud už to máte vyřešené s tím starým zadáním, tak nevadí.