Cvičení 1

V tomto cvičení budeme především opakovat znalosti ze střední školy. Hlavními tématy jsou komplexní čísla, vlastnosti operací a polynomy.

Komplexní čísla

Cvičení 1.1. Pro komplexní čísla $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 3i$ spočítejte

a) $z_1 + z_2$, b) $z_1 - z_2$, c) $z_1 \cdot z_2$, d) $\bar{z}_1$, e) z_1/z_2.

Pokud vám některý z výpočtů dělal problémy, doporučuji problematiku komplexních čísel co nejdříve osvěžit.

Vlastnosti operací

Definice. Operace $\bullet\colon M \times M \to M$ je **komutativní**, jestliže pro každé $x, y \in M$ platí $x \bullet y = y \bullet x$.

Cvičení 1.2. Ukažte, že sčítání komplexních čísel je komutativní.

Cvičení 1.3. Ukažte, že násobení komplexních čísel je komutativní.

Definice. Operace $\bullet\colon M \times M \to M$ má **neutrální prvek** $e \in M$, jestliže pro každé $x \in M$ platí $x \bullet e = x = e \bullet x$.

Definice. Prvek $y \in M$ je **inverzní** k $x \in M$ vzhledem k operaci $\bullet\colon M \times M \to M$, jestliže $x \bullet y = e = y \bullet x$.

Cvičení 1.4. Najděte neutrální prvek vzhledem ke sčítání komplexních čísel. Ke každému $z \in \mathbb{C}$ najděte inverzní prvek vzhledem ke sčítání.

Cvičení 1.5. Najděte neutrální prvek vzhledem k násobení komplexních čísel. Ke každému $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ najděte inverzní prvek vzhledem k násobení.

Doporučuji osvěžit si rovněž zákony ***asociativiní*** *a* ***distributivní****. Na uvedené pojmy narazíte hned v páteční přednášce, kde se bude definovat, co je to* ***těleso****. My na cvičení začneme zlehka a podíváme se na speciální příklady těles, které už jistě znáte.*

Definice. **Číselné těleso** je množina čísel $T \subset \mathbb{C}$, která je uzavřená na sčítání, odčítání, násobení a dělení. To znamená, že pro každé $x, y \in T$ je také $x + y \in T$, $x - y \in T$, $xy \in T$ a pro $y \neq 0$ rovněž $x/y \in T$.

Cvičení 1.6. Rozmyslete si, zda je množina všech celých čísel $\mathbb{Z}$ těleso.

Cvičení 1.7. Rozmyslete si, zda je množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ těleso.

Polynomy

Polynomy ze střední školy znáte možná pod českým termínem ***mnohočleny****.*

Definice. Buď T (číselné) těleso. **Polynom** stupně $n \in \mathbb{N}$ s koeficienty v T je výraz tvaru

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n,$$

kde $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in T$, $\alpha_n \neq 0$. Pro **nulový polynom** $p(x) = 0$ zavádíme speciálně stupeň $-\infty$. Množinu všech polynomů nad T značíme $T[x]$.

Poznámka. Polynomy se většinou nedefinují nad tělesy, ale nad tzv. okruhy. Abychom do přehršele abstraktních definic nepřidávali další, tak pro jistotu zatajíme, co je to okruh. Přesto však občas použijeme označení $\mathbb{Z}[x]$ pro polynomy s koeficienty v $\mathbb{Z}$, ačkoliv $\mathbb{Z}$ není těleso.

Cvičení 1.8. Uvažte polynomy $p(x) = x^2 + 2x + 5$, $q(x) = -x + 3$. Spočítejte

a) $p(x) + q(x)$, b) $p(x) - q(x)$, c) $p(x)q(x)$

Cvičení 1.9. Vydělte se zbytkem $(2x^4 - 3x^2 - 5) : (x - 2)$.

Definice. Kořen polynomu $p(x) \in T[x]$ je číslo $x_0 \in T$ takové, že $p(x_0) = 0$.

Cvičení 1.10. Ukažte, že polynom $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 15$ má kořen 3. Vyzkoušejte k tomu tzv. *Hornerovo schéma.*

Věta. (Základní věta algebry) Každý polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupně $n > 0$ má alespoň jeden kořen.

Věta. Každý polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupně $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně napsat jako součin **kořenových činitelů**

$$p(x) = \alpha_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

kde $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ jsou právě všechny kořeny $p(x)$.

Definice. Buď $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ polynom a $x_0 \in \mathbb{C}$ jeho kořen. Počet výskytů x_0 mezi kořenovými činiteli nazveme **násobností** tohoto kořene.

Cvičení 1.11. Rozložte polynom $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 15$ na kořenové činitele.

Cvičení 1.12. Najděte polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, který má kořeny -2 (násobnosti 2), $2 - 3i$ a $2 + 3i$.

Pozorování. Uvažujme komplexní číslo $z = a + bi$ a číslo komplexně sdružené $\bar{z} = a - bi$. Polynom, jenž má právě tyto dva kořeny, vypadá takto

$$p(x) = \alpha(x - a - bi)(x - a + bi) = \alpha(x^2 - 2ax + a^2 + b^2).$$

Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, pak je tento polynom reálný. Toto pozorování lze snadno zobecnit: Platí-li pro polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, že s každým jeho kořenem x_0 je i číslo komplexně sdružené $\bar{x}_0$ kořen, pak má $p(x)$ až na vynásobení konstantou reálné koeficienty. (Tím „až na vynásobení konstantou“ myslíme toto: Je-li koeficient u nejvyšší mocniny reálný, pak jsou všechny reálné.)

Platí i opačné tvrzení:

Věta. Pro polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ platí, že $x_0 \in \mathbb{C}$ je jeho kořenem právě tehdy když $\bar{x}_0 \in \mathbb{C}$ je jeho kořenem.

Důsledek. Každý polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ lze jednoznačně napsat jako součin

$$p(x) = c\,\underbrace{(x - x_1) \cdots (x - x_k)}_{\substack{\text{Koř. činitelé odp.} \\ \text{reálným kořenům.}}}\,\underbrace{(x^2 + \alpha_1 x + \beta) \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)}_{\substack{\text{Koř. činitelé odp.} \\ \text{dvojicím komplexně} \\ \text{sdružených kořenů}}},$$

kde $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ jsou reálné kořeny $p(x)$ a $c, \alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \ldots, \beta_l \geq 0$.

Řešení

1. a) $3 + 2i$; b) $1 - 4i$; c) $5 + 5i$; d) $2 + i$; e) $-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$
4. neutr. prvek je $e = 0$; pro lib. $z = a + bi \in \mathbb{C}$ je inverze $-z = -a - bi$
5. neutr. prvek je $e = 1$; pro lib. $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ je inverze $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$
6. ne, v $\mathbb{Z}$ nelze dělit
7. ano
8. a) $x^2 + x + 8$; b) $x^2 + 3x + 2$; c) $-x^3 + x^2 + x + 15$
9. $2x^3 + 4x^2 + 5x + 10 + \frac{15}{x-2}$
11. $(x - 3)(x + 2 - i)(x + 2 - i)$
12. $x^4 + x^2 + 36x + 52$