Cvičení 2

Soustavy lineárních rovnic

*Naším cílem bude naučit se efektivním způsobem řešit soustavy lineárních rovnic. Později se tento algoritmus známý jako **Gaussova eliminace** formalizuje na přednášce.*

Cvičení 2.1. Vyřešte následující soustavu (v $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= 2 \\ y + z &= 5 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Cvičení 2.2. Vyřešte následující soustavu (v $\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= 2 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Onen příhodný tvar soustavy z cvičení výše, kde v každém následujícím řádku ubude zleva alespoň jedna proměnná, budeme nazývat **horní blokový tvar**.[1]

Cvičení 2.3. Vyřešte následující soustavu převodem na horní blokový tvar.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + 5y &= -3 \end{aligned}$$

Tvrzení. Následující **ekvivalentní řádkové úpravy** nemění množinu řešení soustavy:

1. prohození dvou řádků,
2. vynásobení řádku nenulovým číslem,
3. přičtení jednoho řádku k druhému.

Pozor, je poněkud ošemetné pokoušet se provádět více úprav naráz! Zkušený řešič či zkušená řešička to jistě zvládne, ale je potřeba postupovat obezřetně. Jinak se člověku všechno navzájem vyruší a ze soustavy nezbude nic.

Cvičení 2.4. Převeďte následující soustavy do maticového tvaru a vyřešte převodem na horní blokový tvar pomocí ekvivalentních řádkových úprav.

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y - z = 4 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$

Lineární obal, lineární podprostor

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem T. Neprázdná množina $V \subset L$ se nazývá **vektorový podprostor**, jestliže je uzavřená na operace lineárního prostoru. To znamená, že pro každou dvojici vektorů $v, w \in V$ je $v + w \in V$ a pro každý skalár $\alpha \in T$ a vektor $v \in V$ je $\alpha v \in V$.

Cvičení 2.5. Rozhodněte, zda řešení následujících soustav tvoří lineární podprostory $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$

[1] Toto není žádné jednotné ustálené označení. Na Matfyzu tomu, pokud vím, říkají *horní schodovitý tvar*, na Jaderce zase říkají *stupňovitý*. Anglicky se tomu říká *row echelon form*.

Definice. Buď L lineární prostor nad tělesem T. Nechť $M \subset L$ je nějaká množina vektorů. Její **lineární obal** definujeme jako

$$\operatorname{span} M = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in M, k \in \mathbb{N}\}.$$

Speciálně $\operatorname{span} \emptyset = \{\vec{o}\}$.

Tvrzení. Lineární obal je vždy lineární podprostor. Naopak každý lineární podprostor V je lineárním obalem, neboť platí $V = \operatorname{span} V$.

Cvičení 2.6. Napište vektor $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{x}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{x}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

*Tímto jsme současně ukázali, že $\vec{y} \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$. Kromě toho jsme našli **souřadnice** vektoru $\vec{y}$ v **bázi** $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.*

Cvičení 2.7. Uvažujme $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pro následující volby $\vec{y}$ rozhodněte, zda platí $\vec{y} \in \operatorname{span}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$:

a) $\vec{y} = \vec{x}_1$, b) $\vec{y} = \vec{o}$, c) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, d) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

V případě, že ano, uveďte příslušnou konkrétní lineární kombinaci. Dá se v případě b) onen nulový vektor nakombinovat *netriviálním* způsobem (tj. tak, aby koeficienty lineární kombinace byly nenulové)?

*Soubor vektorů $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je **lineárně závislý**. To se projevuje tak, že výše uvedená cvičení nemají jednoznačné řešení. Důsledkem mimo jiné je, že v tomto případě nemůže být řeč o nějakých souřadnicích. Pojmy **lineární závislost** a **nezávislost**, **báze** a **souřadnice** se zatím nemusíte zatěžovat. Uslyšíte o nich na následujících přednáškách a důkladně je procvičíme na dalším cvičení.*

Řešení

1. $x = -1$, $y = 3$, $z = 2$
2. $x = t/2 - 5$, $y = t$, $z = 2$, $t \in \mathbb{R}$
3. $x = 2$, $y = -1$
4. a) $x = y = z = 0$; b) $x = t$, $y = -t$, $z = t - 4$, $t \in \mathbb{R}$; c) $x = t$, $y = s$, $z = t + s - 1$, $t, s \in \mathbb{R}$
5. a) ano; b) ne; c) ano
6. $\vec{y} = 2\vec{x}_1 + \vec{x}_2$
7. a) ano; b) ano; c) ano; d) ne